

فى

الرياضيات البحتة



تأ

ماهر أحـ

يطلب من دار الـ
الدعم الفنى : ٠١٣..٥
وللإقتراحات : ٠١٣
٠ : ١٣
_MATH@Yahoo.com
أو على صفحتنا [

مجتويات الكتاب

أولاً : الجبر

الوحدة الأولى :

الوحدة الثانية :

ثانيًا : التفاضل

الوحدة الثالثة :

ثالثًا : حساب المثلثات

الوحدة الرابعة :

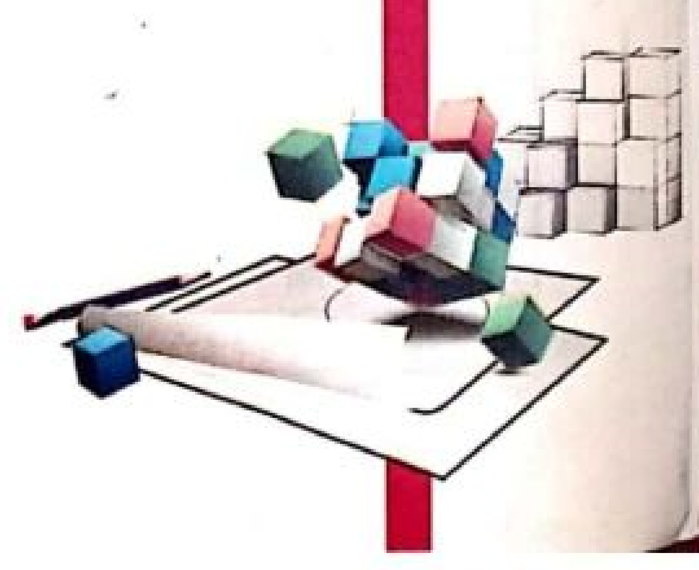
أولاً : الجبـر

الوحدة الأولى :

- الدرس ① : المتتابعات والمتسلسلات .
- الدرس ② : المتتابعة الحسابية .
- الدرس ③ : الأوساط الحسابية .
- الدرس ④ : المتسلسلات الحسابية .
- الدرس ⑤ : المتتابعة الهندسية .
- الدرس ⑥ : الأوساط الهندسية .
- الدرس ⑦ : المتسلسلات الهندسية .

الوحدة الثانية :

- الدرس ① : مبـدأ العـد.
- الدرس ② : التبـاديـل .
- الدرس ③ : التوافـيـق .





الدرس ١

المتتابعات والمتسلسلات

درسنا في السنوات السابقة بعض الأنماط العددية مثل النمط ٢، ٤، ٦، ٨، ... والنمط ١٠، ٢٠، ٣٠، ... ونلاحظ أن النمط العددي هو ترتيب لمجموعة من الأعداد الحقيقية حيث تربط بين كل عدد والعدد الذي يليه علاقة، هذه العلاقة هي التي نوجد عن طريقها حدود هذا النمط أو نوجد حد ما بدون الحاجة إلى معرفة الحدود السابقة له وفي هذه الوحدة سوف نتناول هذه الأنماط بدراسة أكثر عمقًا تحت مسمى جديد وهو المتتابعات.

تعريف

المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص^+$ أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية ح حيث يرمز للحد الأول بالرمز $ح_١$ والحد الثاني بالرمز $ح_٢$ والحد الثالث بالرمز $ح_٣$ وهكذا ... والحد النوني بالرمز $ح_ن$ ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتي:

($ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، ...، $ح_ن$) ويرمز لها بالرمز ($ح_ن$)

فمثلاً المتتابعة $ح_ن = ٢ن + ١$ هي دالة مجالها $ص^+$

أي إننا نعوض عن ن بالأعداد ١، ٢، ٣، ... وينتج الحدود $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، ...

أى إننا

بالتعويض عن $ن = ١$ ينتج $ح_١ = ٢ × ١ + ١ = ٣$ أى أن الحد الأول هو ٣

وبالتعويض عن $ن = ٢$ ينتج $ح_٢ = ٢ × ٢ + ١ = ٥$ أى أن الحد الثانى هو ٥

وبالتعويض عن $ن = ٣$ ينتج $ح_٣ = ٢ × ٣ + ١ = ٧$ أى أن الحد الثالث هو ٧

أما $ح_ن$ فهى الحد العام الذى نوجد منه أى حد من خلال التعويض فإذا أردنا إيجاد الحد السادس نعوض عن $ن = ٦$ ويرمز للحد السادس بالرمز $ح_٦$ وبنفس الطريقة يمكن إيجاد أى حد ويمكن كتابة المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كما يلى :

(٣، ٥، ٧، ...) ويرمز للمتتابعة بالرمز ($ح_ن$)

ملاحظات هامة

١ حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

٢ لاحظ الفرق بين ($ح_ن$)، $ح_ن$ حيث ($ح_ن$) يعبر عن المتتابعة بينما $ح_ن$ يعبر عن حدها النونى.

٣ يجب أن نفرق بين المتتابعة والمجموعة فالمتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) أى أن الترتيب له أهمية كبرى بينما المجموعة لا يهم ترتيب عناصرها.

٤ عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهيًا (أى يمكن حصره أو عده)

مثل (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠)

وتكون المتتابعة غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (أى عدد لا نهائى من الحدود)

مثل (١، ٣، ٥، ...)

مثال (١)

أكتب كلاً من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة :

١ $ح_ن = ٢ن + ١$ (إلى خمسة حدود إبتداء من الحد الأول)

٢ $ح_ن = ن^٢$ (إلى عدد غير منته من الحدود إبتداء من الحد الأول)

الحل

١ بوضع $ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥$

$\therefore ح_١ = ٢(١) + ١ = ٣$ ، $ح_٢ = ٢(٢) + ١ = ٥$



$ح_3 = 2(3) + 1 = 7$ ، $ح_4 = 2(4) + 1 = 9$

$ح_5 = 2(5) + 1 = 11$

∴ المتتابعة هى (3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11) متتابعة منتهية.

(2) بوضع ن = 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، …

∴ $ح_1 = (1)^2 = 1$ ، $ح_2 = (2)^2 = 4$

$ح_3 = (3)^2 = 9$ ، $ح_4 = (4)^2 = 16$

$ح_5 = (5)^2 = 25$

∴ المتتابعة هى (1 ، 4 ، 9 ، 16 ، 25 ، …) متتابعة غير منتهية.

الحد العام للمتتابعة

الحد العام للمتتابعة (ويسمى أحياناً بالحد النونى) يكتب $ح_ن$ حيث $ح_ن$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى مجال المتتابعة ويمكن إستنتاجه أحياناً من خلال حدود معطاة للمتتابعة.

فمثلاً

الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، … هو $ح_ن = 2ن$

الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، … هو $ح_ن = 2ن - 1$

الحد العام للمتتابعة: $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ، …. هو $ح_ن = \frac{(-1)^ن}{ن + 2}$

مثال (2)

أكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتابعة ($ح_ن$) المعرفة كالأتى: $ح_1 = 2$ ، $ح_{ن+1} = 2ح_ن$ حيث ن ≥ 1

الحل

لاحظ أن
بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الأن مثل متتابعة الأعداد الأولية (2 ، 3 ، 5 ، 7 ، …)

بالتعويض عن قيمة ن = 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

فى العلاقة $ح_{ن+1} = 2ح_ن$

بوضع ن = 1 ∴ $ح_2 = 2ح_1$

(بالتعويض عن $ح_1 = 2$)

أى أن $ح_2 = 2 \times 2 = 4 = 2^2$

بوضع ن = 2 ∴ $ح_3 = 2ح_2$



أى أن : $ح_٣ = ٢ \times ٤ = ٨ = ٢^٣$ (بالتعويض عن $ح_٢ = ٤$)

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٤ = ٢ ح_٣$

أى أن : $ح_٤ = ٢ \times ٨ = ١٦ = ٢^٤$ (بالتعويض عن $ح_٣ = ٨$)

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_٥ = ٢ ح_٤$

أى أن : $ح_٥ = ٢ \times ١٦ = ٣٢ = ٢^٥$ (بالتعويض عن $ح_٤ = ١٦$) ،

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هى : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢)

الحد العام للمتتابعة ($ح_ن$) هو : $ح_ن = ٢^ن$

ملاحظات

١ إذا اختلفت إشارة كل حد فى المتتابعة عن الحد السابق له مباشرة مثل المتتابعة ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ....) فإن المتتابعة فى هذه الحالة تسمى متتابعة تذبذبية .

٢ المتتابعة الثابتة هى متتابعة جميع حدودها متساوية ويكون حدها العام على الصورة $ح_ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ويكون أى حد − الحد السابق له = صفر وقد تكون منتهية مثل المتتابعة (٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦) أو غير منتهية مثل (١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ...)

٣ بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة وبالتالى غير معروف حدها العام.

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

تكون المتتابعة ($ح_ن$) تزايدية إذا كان $ح_{ن+١} > ح_ن$

أى أن : المتتابعة تكون تزايدية إذا كان كل حد من حدود المتتابعة أكبر من الحد السابق له مباشرة.

وتكون المتتابعة ($ح_ن$) تناقصية إذا كان $ح_{ن+١} < ح_ن$

أى أن : المتتابعة تكون تناقصية إذا كان كل حد من حدود المتتابعة أصغر من الحد السابق له مباشرة.

فمثلاً

المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) متتابعة تزايدية لأن

٥ > ٢ أى أن : $ح_٢ > ح_١$ ، ٨ > ٥ أى أن : $ح_٣ > ح_٢$ وهكذا

المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ...) متتابعة تناقصية لأن

٤ < ٨ أى أن : $ح_٢ < ح_١$ ، ٢ < ٤ أى أن : $ح_٣ < ح_٢$ وهكذا



مثال (٢)

بين أيا من المتتابعات ($ح_{ن}$) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

❶ $ح_{ن} = ٢ن + ١$ ❷ $ح_{ن} = \frac{١}{٢ن - ١}$ ❸ $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن} + ٣$

الحل

نوجد $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن}$ ثم نوجد $ح_{ن+١} - ح_{ن}$

إذا كان الناتج > ، تكون المتتابعة تزايدية وإذا كان الناتج < ، تكون المتتابعة تناقصية

(١) $\because ح_{ن+١} = ٢(ن+١) + ١ = ٢ن + ٢ + ١ = ٢ن + ٣$ ، $ح_{ن} = ٢ن + ١$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٢ن + ٣ - (٢ن + ١) = ٢ن + ٣ - ٢ن - ١ = ٢$

$\because ح_{ن+١} > ح_{ن}$ لأن الناتج أكبر من صفر

$\therefore$ المتتابعة تزايدية لجميع قيم ن

(٢) $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢(ن+١) - ١} = \frac{١}{٢ن + ٢ - ١} = \frac{١}{٢ن + ١}$ ، $ح_{ن} = \frac{١}{٢ن - ١}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{١}{٢ن + ١} - \frac{١}{٢ن - ١} = \frac{٢ن - ١ - ٢ن - ١}{(٢ن + ١)(٢ن - ١)} = \frac{-٢}{(٢ن + ١)(٢ن - ١)}$

$\because ح_{ن+١} < ح_{ن}$ لأن الناتج أصغر من صفر

$\therefore$ المتتابعة تناقصية لجميع قيم ن

(٣) $ح_{ن+١} = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} + ٣$ ، $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن} + ٣$

$ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} + ٣ - \frac{(-١)^{ن}}{ن} - ٣ = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} - \frac{(-١)^{ن}}{ن}$

$= \frac{(-١)^{ن+١}}{ن + ١} + \frac{(-١)^{ن+١}}{ن} = (-١)^{ن+١}\left[\frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن}\right]$

$= (-١)^{ن+١}\left[\frac{ن + (ن + ١)}{ن(ن + ١)}\right] = (-١)^{ن+١}\left(\frac{٢ن + ١}{ن(ن + ١)}\right)$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردي وسالب عندما ن عدد زوجي أي أن المتتابعة ليست تزايدية وليست تناقصية.



المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هى عملية جمع حدود المتتابعة فمثلاً (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠) هى متتابعة تتكون من خمسة حدود بينما المتسلسلة هى عملية جمع لهذه الحدود.

أى أن: ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة وذلك بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة ويمكن إستخدام رمز التجميع « $\sum$ » ويقرأ «سيجما» لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

فمثلاً

المتسلسلة السابقة تتكون من جمع الحدود الخمسة للمتتابعة وتكتب بإستخدام رمز التجميع بالصورة $\sum_{ر=١}^{٥} ح_ر$ وهى تعنى $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥$

ومن ذلك يمكن تعريف المتسلسلة المنتهية والمتسلسلة غير المنتهية كما يلى:

المتسلسلة المنتهية

تكتب بالصورة: $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_ر + \dots + ح_ن$ حيث ن عدد صحيح موجب، $ح_ن$، هو الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة ففى المتسلسلة المنتهية $أ_١ + أ_٢ + أ_٣ + أ_٤ + \dots + أ_ن$ يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر)$ وتقرأ مجموع $أ_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

أى أن مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية والقيمة العددية للمتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

ويمكن إيجاد مجموع مفكوك المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٣} ر^٣$ كما يلى:

$$\sum_{ر=١}^{٣} (ر^٣) = (١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ = ١ + ٨ + ٢٧ = ٣٦$$

المتسلسلة غير المنتهية

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها فمثلاً المتسلسلة ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... تكتب الصورة $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢)^ر$ وقد إستخدم الرمز ∞ ليدل على ذلك.







الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت $(ح_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، $ن \in ص^+$ ، $جـ \in ح$ فإن :

خاصية ١

$$\sum_{ر=١}^{ن} جـ = جـ ن$$

فمثلاً $\sum_{ر=١}^{١٠} ٧ = ٧ \times ١٠ = ٧٠$

خاصية ٢

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

أى أن : $\sum_{ر=١}^{٧} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢} = \frac{٧(٧+١)}{٢} = ٢٨$

خاصية ٣

$$\sum_{ر=١}^{ن} جـ ح_ر = جـ \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$$

أى أن : $\sum_{ر=١}^{ن} جـ ر = جـ \sum_{ر=١}^{ن} ر$

فمثلاً $\sum_{ر=١}^{٧} ٢ر = ٢\sum_{ر=١}^{٧} ر = ٢ \times \frac{٧(٧+١)}{٢} = ٥٦$

خاصية ٤

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

فمثلاً $\sum_{ر=١}^{٨} ر^٢ = \frac{٨(٨+١)(٢\times٨+١)}{٦} = ٢٠٤$

خاصية ٥

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ح_ر \pm هـ_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} هـ_ر$$

فمثلاً

$$\sum_{ر=١}^{٨} (ر^٢ + ٢ر) = \sum_{ر=١}^{٨} ر^٢ + ٢\sum_{ر=١}^{٨} ر$$

$$= \frac{٨(٨+١)(٢\times٨+١)}{٦} + ٢ \times \frac{٨(٨+١)}{٢}$$

$$= ٢٠٤ + ٧٢ = ٢٧٦$$

ملاحظة

جميع الخواص الجبرية السابقة لرمز التجميع لا تستخدم إلا فى حالة إيجاد مجموع المتتابعة بدءًا من الحد الأول أى لإيجاد $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$



ويمكن أن نصل إلى بعض النتائج من هذه الخواص منها :

١ مجموع الأعداد الزوجية

مجموع الأعداد الزوجية = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٢ر

$$= \sum_{ر=1}^{ن} ٢ر = ٢\sum_{ر=1}^{ن} ر = ٢ \times \frac{ن(ن+١)}{٢} = ن(ن+١)$$

أى أن مجموع الأعداد الزوجية إلى ن حدًا = ن (ن + ١)

٢ مجموع الأعداد الفردية

مجموع الأعداد الفردية = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٢ر − ١

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (٢ر-١) = ٢\sum_{ر=1}^{ن} ر - \sum_{ر=1}^{ن} ١$$

$$= ٢ \times \frac{ن(ن+١)}{٢} - ١ \times ن = ن^٢ + ن - ن = ن^٢$$

أى أن مجموع الأعداد الفردية إلى ن حدًا = $ن^٢$

مثال ٤

أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك :

① $\sum_{ر=1}^{٤} ر^٢$ ② $\sum_{ر=1}^{٦} (٢ر+١)$ ③ $\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right)$

الحل

① بوضع ر = ١ يكون $ح_١ = (١)^٢ = ١$ ، بوضع ر = ٢ يكون $ح_٢ = (٢)^٢ = ٤$

بوضع ر = ٣ يكون $ح_٣ = (٣)^٢ = ٩$ ، بوضع ر = ٤ يكون $ح_٤ = (٤)^٢ = ١٦$

وتكون المتسلسلة هى $(ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤)$

أى أن : المتسلسلة هى (١ + ٤ + ٩ + ١٦) ويكون $\sum_{ر=1}^{٤} ر^٢ = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$



ويمكن التحقق من مجموع المتسلسلة باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

١ نضغط على مفتاح رمز التجميع $\sum_{x=\square}^{\square}$ حسب اللون المحدد لذلك وهو غالبًا Log Shift ستفتح الشاشة بحيث نكتب قاعدة المتتابعة أولاً

٢ نكتب قاعدة المتتابعة $ر^٢$ كالتالى : x^2) Alpha Log

٣ نستخدم المفتاح (Replay) REP لننتقل إلى أسفل لكتابة العدد الذى نبدأ به وهو «١» ثم ننتقل إلى أعلى باستخدام المفتاح REP لنكتب عدد الحدود وهو «٤» فيكون شكل الشاشة هو $\sum_{x=1}^{4} (x)^2$

٤ نضغط على مفتاح = ليعطى الناتج على الشاشة وهو ٣٠ وهو مطابق لناتج الجمع السابق.

(٢) بوضع ر = ٢ يكون $ع_١$ = ٢ × ٢ + ١ = ٥

بوضع ر = ٣ يكون $ع_٢$ = ٢ × ٣ + ١ = ٧

بوضع ر = ٤ يكون $ع_٣$ = ٢ × ٤ + ١ = ٩

بوضع ر = ٥ يكون $ع_٤$ = ٢ × ٥ + ١ = ١١

بوضع ر = ٦ يكون $ع_٥$ = ٢ × ٦ + ١ = ١٣

وتكون المتسلسلة هى مجموع هذه الحدود

أى أن : المتسلسلة هى (٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣) ويكون $\sum_{ر=٢}^{٦}$ (٢ ر + ١) = ٤٥

(٣) $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right) = \left(\frac{١}{١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) + \dots + \left(\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١}\right)$

$= ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \dots + \frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١}$

$= ١ - \frac{١}{ن+١} = \frac{ن + ١ - ١}{ن+١} = \frac{ن}{ن+١}$



مثال ٥

أوجد بطريقتين مختلفتين : $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ - ٣ر + ر^{٢})$

الحل

الطريقة الأولى : التعويض المباشر :

$$\sum_{ر=١}^{٤} (٢ - ٣ر + ر^{٢}) = (٢ - ٣ \times ١ + ١^{٢}) + (٢ - ٣ \times ٢ + ٢^{٢}) + (٢ - ٣ \times ٣ + ٣^{٢})$$

$$+ (٢ - ٣ \times ٤ + ٤^{٢}) = ٠ + ٠ + ٢ + ٦ = ٨$$

الطريقة الثانية : إستخدام الخواص الجبرية للتجميع :

$$\sum_{ر=١}^{٤} (٢ - ٣ر + ر^{٢}) = \sum_{ر=١}^{٤} ٢ - ٣\sum_{ر=١}^{٤} ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$$

$$= ٢ \times ٤ - ٣ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} + \frac{٤(٤+١)(٢ \times ٤ + ١)}{٦}$$

$$= ٨ - ٣ \times \frac{٤ \times ٥}{٢} + \frac{٤ \times ٥ \times ٩}{٦}$$

$$= ٨ - ٣٠ + ٣٠ = ٨$$

مثال ٦

إذا كان $\sum_{ر=١}^{ن} ر = ١٩٠$ أوجد قيمة ن

الحل

$\sum_{ر=١}^{ن} ر = ١٩٠$

$\therefore \frac{ن(ن+١)}{٢} = ١٩٠$

$\therefore ن(ن+١) = ٣٨٠$

$\therefore ن^{٢} + ن - ٣٨٠ = ٠$

$\therefore (ن - ١٩)(ن + ٢٠) = ٠$

$\therefore ن = ١٩$ أو $ن = -٢٠$ (مرفوض لأن $ن \in ص^{+}$)

مثال (٧)

أوجد ما يأتى :

١ مجموع الأعداد الزوجية إلى العدد ١٠٠

٢ مجموع الأعداد الفردية إلى العدد ٤٩

الحل

① المجموع = ٢ + ٤ + ٦ + ... + ١٠٠ ∴ عدد الحدود ن = ٥٠

$\sum_{ر=١}^{٥٠} ٢ر = ن (ن + ١) = ٥٠ (٥٠ + ١) = ٢٥٥٠$

② ∵ ٤٩ = ٢ن − ١ ∴ ن = ٢٥

$\sum_{ر=١}^{٢٥} (٢ر − ١) = ن^٢ = (٢٥)^٢ = ٦٢٥$

مثال (٨)

أوجد عدد الحدود فى كل مما يأتى :

١ إذا كان ٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ر = ١٢٦٠

٢ إذا كان ١ + ٣ + ٥ + ... + ٢ر − ١ = ٢٨٩

الحل

① ∵ ٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ر = ١٢٦٠

∴ $\sum_{ر=١}^{ن} ٢ر = ن (ن + ١)$ ∴ ١٢٦٠ = $ن^٢$ + ن

∴ $ن^٢$ + ن − ١٢٦٠ = ٠ ∴ (ن + ٣٦) (ن − ٣٥) = ٠

∴ ن = −٣٦ (مرفوض) ، ن = ٣٥ ∴ عدد الحدود = ٣٥ حدًا

② ∵ ١ + ٣ + ٥ + ... + ٢ر − ١ = ٢٨٩

$\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر − ١) = ن^٢$ ∴ $ن^٢$ = ٢٨٩

∴ ن = ١٧ ∴ عدد الحدود = ١٧ حدًا





مثال ٩

إستخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة : ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ٤ × ٥ + ...

الحل

نكتب أولاً الحد العام بالطريقة التالية :

$ح_١$		$ح_٢$		$ح_٣$
٢ × ٣	+	٣ × ٤	+	٤ × ٥

$ح_١$ = ٢ × ٣ = (١ + ١) (١ + ٢)

$ح_٢$ = ٣ × ٤ = (٢ + ١) (٢ + ٢)

$ح_٣$ = ٤ × ٥ = (٣ + ١) (٣ + ٢)

$ح_ر$ = (ر + ١) (ر + ٢)

∵ الحد العام للمتتابعة هو $ح_ر$ = (ر + ١) (ر + ٢) حيث ر ∈ $ص^+$

∴ ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ٤ × ٥ + ... = $\sum_{ر=١}^{\infty}$ (ر + ١) (ر + ٢)





تمرين ١ على المتتابعات والمتسلسلات





أولاً راجع معنا واختبر نفسك

عزيزى الطالب
في هذا المكان من كل تمرين ستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق فى صورة إختبار تراكمى على ما سبق دراسته يتم الإجابة فى نفس الورقة قبل أن تدخل فى الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست بإستمرار ولا تنساه ويجعلك فى مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك فى تواصل ... يعودك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر ؛



ثانياً مسائل المستوى الأول

١ أكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

① متتابعة الأعداد الفردية السالبة التى تبدأ بالعدد (-١)

② متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ ، ٨١ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥

---

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

① المتتابعة هى دالة مجالها هو ....

[ح⁺ أ ح⁻ أ ص أ ص⁺ أو مجموعة جزئية منها]

② الحد الخامس للمتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٢ن - ١$ هو ....

[٩ أ -٩ أ ١١ أ ٦٠]

③ الحد الرابع للمتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ن^٢ + ٣$ هو ....

[٤ أ ١٦ أ ١٩ أ ٢٠]

④ فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_{ن+١} = ن + ح_ن$ إذا كان $ح_١ = ١$ فإن $ح_٢ =$ ....

[١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

⑤ تكون المتتابعة تناقصية إذا كان $ح_{ن+١}$ .... $ح_ن$ لكل $ن \geqslant ١$

[< أ $\leqslant$ أ > أ =]



(٦) تكون المتتابعة ثابتة إذا كان $ح_{ن+1}$ .... $ح_ن$ لكل ن ≥ ١

[< أو ≤ أو > أو =]

(٧) تكون المتتابعة تزايدية إذا كان $ح_{ن+1}$ .... $ح_ن$ لكل ن ≥ ١

[< أو ≤ أو > أو =]

(٨) الحد السابع للمتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٢ن^٢ + ٣$ هو ....

[١٧ أو ٤٩ أو ٩٨ أو ١٠١]

(٩) الحد الرابع للمتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = \frac{\sqrt{ن}}{ن+١}$ هو ....

[$\frac{٢}{٥}$ أو $\frac{٥}{٢}$ أو ٥ أو $\frac{٤}{٣}$]

(١٠) فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ٣ن^٢ - ١$ إذا كان $ح_ن = ٧٤$ فإن ن = ...

[٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦]

(١١) الحد النونى للمتتابعة (١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...) هو ....

[$٣ن$ أو $ن^٣$ أو $ن^٢$ أو $٣ن^٢$]

(١٢) الحد النونى للمتتابعة (-١، ٤، -٩، ١٦، ...) هو ....

[$(-١)^ن$ أو $ن^٢$ أو $-ن^٢$ أو $(-١)^ن ن^٢$]

٣ بين المتتابعات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية :

(١) (١، ٤، ٧، ١١، ...)

(٢) (٣، ٥، ٧، ٩، ...، ٢١)

(٣) المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ن^٢ - ١$، ن ∈ ص+

(٤) المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = \frac{٢}{ن} + ٣$، ن ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

٤ أكتشف النمط ثم أكتب الحد التالى :

(١) ٦٥، ٦٩، ٧٣، ٧٧، ٨١، ...

(٢) ٣، -٦، ١٢، -٢٤، ٤٨، ...

(٣) $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ....

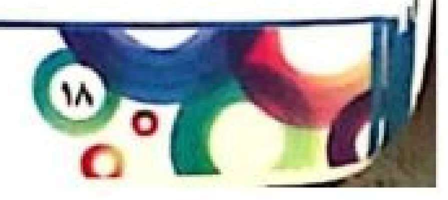
(٤) ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ...

ثالثا مسائل المستوى الثانى

٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

(١) الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ....

[٥ أو ٢٥ أو ٢٠ أو ١٠]





(٢) الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ هو ....

[$\frac{-٤}{٥}$ أ، $\frac{-١}{٥}$ أ، $\frac{١}{٥}$ أ، $\frac{٤}{٥}$]

(٣) قاعدة المتتابعة ((٢ × ٣)، (٣ × ٤)، (٤ × ٥)، (٥ × ٦)، ...) هى ....

[(ن − ١)(ن + ١) أ، ن (ن + ١) أ، ٢ن (ن + ١) أ، (ن + ١)(ن + ٢)]

(٤) المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل متتابعة ....

[تزايدية أ، تناقصية أ، ثابتة أ، تذبذبية]

٦ أكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(١) $ح_ن = ن + ن^٢$

(٢) $ح_ن = \frac{١}{٢ن - ٥}$

(٣) $ح_ن = \left(\frac{١}{٣}\right)^ن$

(٤) $ح_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

(٥) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$

(٦) $ح_ن = جا \left(\frac{ن}{٤} \pi\right)$

٧ أكتب كلاً من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة :

(١) $ح_ن = ٢ن - ١$ (إلى خمسة حدود إبتداء من الحد الأول)

(٢) $ح_ن = ن^٣$ (إلى عدد غير منته من الحدود إبتداء من الحد الأول)

٨ أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة ($ح_ن$) المعرفة كالآتى :

$ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = ٢ ح_ن$ حيث $ن \geq ١$

٩ أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة ($ح_ن$) المعرفة كالآتى :

$ح_١ = ٣$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن-١}$ حيث $ن \geq ٢$

١٠ يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميًا

(١) **أكتب** الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

(٢) **أوجد** الحد العام لهذه المتتابعة.

(٣) **أوجد** الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.

(٤) **فى أى** يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ **وضح** إجابتك.



١١ بين أيًا من المتتابعات ($ح_ن$) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك فى كل مما يأتى :

① $ح_ن = \frac{١}{ن} + ٢$ ② $ح_ن = ٣ن + ٥$

③ $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ④ $ح_ن = (-٢)^{ن}$

⑤ $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١}$ ⑥ $ح_ن = (-١)^{ن}(ن^{٢} + ١)$

١٢ أكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

① $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$ ② $\sum_{ر=١}^{٨} \left((-١)^{ر} + ٤ر\right)$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ ④ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right)$

١٣ أوجد مجموع المفكوك فى كل من المتسلسلات الآتية ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

① $\sum_{ر=١}^{١٠} ٩$ ② $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر + ٣)$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢)$ ④ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ١)^{٢}$

⑤ $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر^{٢} - ٢)$ ⑥ $\sum_{ر=٢}^{٦} \left(\frac{١}{ر} + ٢\right)$

⑦ $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١}$ ⑧ $\sum_{س=١}^{٣} جتا\left(\frac{\pi س}{٦}\right)$

١٤ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① المتسلسلة ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ٥٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر)$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (٥ر)$ ، $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٢ر)$ ، $\sum_{ر=١}^{٥} (٥ر)$]

② المتسلسلة ٧ × ١ + ٧ × ٢ + ٧ × ٣ + ... + ٧ × ٢٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=١}^{١٠} (ر + ٧)$ ، $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٧ر)$ ، $\sum_{ر=١}^{٥} (٤ر)$ ، $\sum_{ر=١}^{٥} (٧ر)$]

③ المتسلسلة $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + ...$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر}$ ، $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٤}\right)^{ر}$ ، $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢)^{ر}$ ، $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٥}\right)^{ر}$]



④ المتسلسلة ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ... إلى ن حدًا تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ن=1}^{\infty} 1-(10)^{ن}$ أ، $\sum_{ن=1}^{9} (10)^{ن}-1$ أ، $\sum_{ن=1}^{\infty} (10)^{ن}-1$ أ، $\sum_{ن=1}^{\infty} (10)^{ن}$]

---

١٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

① المتسلسلة ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{20} ر$ أ، $\sum_{ر=1}^{10} (2ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{5} (4ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{10} (4ر)$]

② المتسلسلة ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... + ٦٠ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{15} (4ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{30} (2ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{15} (4ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{60} ر$]

③ المتسلسلة ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{5} (4ر+1)$ أ، $\sum_{ر=1}^{10} (2ر+1)$ أ، $\sum_{ر=1}^{3} (7ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{7} (3ر)$]

④ المتسلسلة ٢ + ١ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$ + ... تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{\infty} 4^{1-ن}$ أ، $\sum_{ر=1}^{\infty} (2)^{2-ن}$ أ، $\sum_{ر=1}^{\infty} (2)^{-ن}$ أ، $\sum_{ر=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2-ن}$]

⑤ المتسلسلة ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ... + ٦٤ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{8} (ر^{2})$ أ، $\sum_{ر=1}^{4} ر^{2}$ أ، $\sum_{ر=1}^{16} (4ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{8} (8ر)$]

⑥ المتسلسلة $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{10}$ + $\frac{1}{15}$ + $\frac{1}{20}$ + ... + $\frac{1}{50}$ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=1}^{5} (4ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{5} (2ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{10} (5ر)$ أ، $\sum_{ر=1}^{10} \left(\frac{1}{5ر}\right)$]

---

١٦ إذا علمت أن $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$ ، $\sum_{ر=1}^{ن} ر^{2} = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$

فاوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتى :

① $\sum_{ر=8}^{12} 2(ر+5)$

② $\sum_{ر=5}^{8} (2ر^{2}-3ر)$

---

١٧ أكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

① (٢، ٥، ٨، ١١، ....)

② ($\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{3}{4}$، $\frac{4}{5}$، ....)

③ (١، ٨، ٢٧، ٦٤، ....)

④ (١، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{100}$، $\frac{1}{1000}$، ....)

⑤ (-١، ٢، -٤، ٨، -١٦، ....)

⑥ (جتا $\frac{\pi}{3}$، جتا $\frac{2\pi}{3}$، جتا π، جتا $\frac{4\pi}{3}$، ....)



١٨ في المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ن$ س أوجد قيمة س [٩]

١٩ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) الحد النوني للمتتابعة (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، .....) يساوى ....

[ن - ١ أ $٢^{ن}$ - ١ أ $٢^{ن-١}$ أ $\frac{٢^{ن}}{ن}$]

(٢) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^٢ + ر + ١) = $ ....

[١٣٧٥ أ ٣٧٢٠ أ ١٤٤٠٠ أ ٢٢٣٢٠٠٠]

(٣) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٠ \times (\frac{١}{٢})^{ر-١}$ تساوى ....

[٤٠ أ ٨٠ أ ١٠٠ أ ٤٠٠]

(٤) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{٥} (٥ ر - ١)$ تساوى ....

[٤٩ أ ٤٠ أ ٣٣ أ ٦٦]

(٥) الحد النوني للمتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....) هو ....

[ن + ٢ أ ٢ أ $٢^{ن}$ أ $ن^٢$]

(٦) الحد النوني للمتتابعة : (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ....) هو ....

[$(-٦)^{ن-١}$ أ $٣ \times (-٢)^{ن-١}$ أ $٢ \times (-٣)^{ن-١}$ أ $٣ \times (-٢)^{ن-١}$]

(٧) المتتابعة ($ح_ن$) = ٢ ن + ٣ متتابعة ....

[تزايدية أ تناقصية أ ثابتة أ تذبذبية]

(٨) المتتابعة التي حدها النوني $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث ن ∋ $ص^+$ تمثل متتابعة ....

[تزايدية أ تناقصية أ ثابتة أ تذبذبية]

(٩) إذا كانت ن ∋ $ص^+$ ، $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ٣$ فإن المتتابعة ....

[تزايدية أ تناقصية أ ثابتة أ تذبذبية]

(١٠) إذا كانت ن ∋ $ص^+$ ، $ح_{ن+١} - ح_ن = -٢$ فإن المتتابعة ....

[تزايدية أ تناقصية أ ثابتة أ تذبذبية]

(١١) الحد العام للمتتابعة ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ....)

هو $ح_ن$ = ...

[(ن - ١)(ن + ١) أ ن(ن + ١) أ ٢ن(ن + ١) أ (ن + ١)(ن + ٢)]





رابعاً: مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢٠ أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

① $\sum_{ر=١}^{س} (ر + ٢) = ٧٥$ [١٠] ② $\sum_{ر=١}^{س} (٣ ر - ٤) = ٢٥$ [٥]

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (\text{لو}\ ر\ س) = \text{لو}\ ٧٢٠$ [٦] ④ $\sum_{ن=١}^{٢٠} (٢ + س\ ن) = ٨٠$ [$\frac{٤}{٢١}$]

---

٢١ أوجد قيمة:

① $\sum_{ر=٣١}^{٦٠} [\text{طا}\ ر - \text{طا}\ (ر - ١)]$ [$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$] ② $\sum_{س=١}^{٩٩} \left(\text{لو}\ \frac{س}{س + ١}\right)$ [-٢]

③ $\sum_{ن=١٠}^{٣٩} [\text{لو}_٢ (ن + ١) - \text{لو}_٢\ ن]$ [٢] ④ $\sum_{ن=١}^{٦٢} ٣\ ت^{ن}$ [٣ت]

⑤ $\sum_{ر=٤}^{٦٣} (\sqrt{ر + ١} - \sqrt{ر})$ [٦] ⑥ $\sum_{ر=٢}^{١٣} \frac{١}{ر^٢ - ر}$ [$\frac{١٢}{١٣}$]

---

٢٢ إذا كان $د(س) = \sum_{ن=١}^{س} ن$ حيث $د : ط \leftarrow ط$ ، $ر(س) = \sum_{ن=١}^{س} ن^٢$ حيث $ر : ط \leftarrow ط$

أوجد $(د \circ ر)(٣)$ [١٠٥]

---

٢٣ إذا كانت $د(س) = ٣ س - ٢$ فأوجد $\sum_{ر=١}^{٩} د^{-١}(س)$ [٢١]

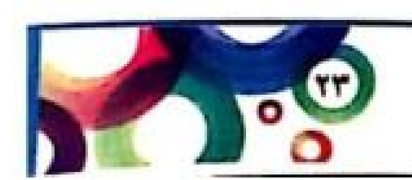
---

٢٤ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ هما جذري المعادلة $٢ س^٢ - (م + ٢) س - ٧ = ٠$

وكان $\sum_{ر=١}^{٢} (٣ س_ر - ٢ ر) = ١٨$ فأوجد قيمة م [١٤]

---

٢٥ أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٩٠} (\text{جتا}\ ن - \text{جا}\ ن)$ [-١]





الدرس ٢

المتتابعة الحسابية

فى المتتابعة (١، ٣، ٥، ٧، ....) نلاحظ أن كل حد من الحدود يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثابت (قيمته ٢) وهذا يعنى أن الفرق بين أى عددين متتالين هو ٢ وهو مقدار ثابت وهذا النوع من المتتابعات التى يكون فيها الفرق بين أى عددين مقدار ثابت يسمى بالمتتابعة الحسابية وهذا المقدار الثابت يسمى «أساس المتتابعة» ويرمز له عادة بالرمز « ء »

ومن ذلك يمكن تعريف المتتابعة الحسابية كما يلى :

المتتابعة الحسابية

هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ء) أى إن $ء = ح_{ن+١} - ح_{ن}$ لكل $ن \in ص^+$

أى إن أساس المتتابعة الحسابية = أى حد فيها − الحد السابق له مباشرة

يمكن تكوين المتتابعة بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء)

فمثلاً إذا كان الحد الأول أ = ١ والأساس ء = ٢

فإن المتتابعة يكون حدها الأول ١ وحدها الثانى يزيد ٢ عن حدها الأول أى :

$ح_٢ = ٣$ ، $ح_٣ = ٣ + ٢ = ٥$ وهكذا ، وتكون المتتابعة هى (١، ٣، ٥، ٧، ....)



مثال ١

أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية :

① (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩) ② (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ....) ③ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، ....)$

الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_ن)$ حسابية أم لا فإننا نوجد $ح_{ن+١} - ح_ن$ فإذا كان الناتج مقدار ثابت كانت المتتابعة $(ح_ن)$ حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

① $\because ح_٢ - ح_١ = ٧ - ٣ = ٤$ ، $ح_٣ - ح_٢ = ١١ - ٧ = ٤$

$\therefore ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ح_٥ - ح_٤ = ... = ٤$

$\therefore$ المتتابعة حسابية وأساسها = ٤

② $\because ح_٢ - ح_١ = ٢٢ - ٢٥ = -٣$ ، $ح_٣ - ح_٢ = ١٩ - ٢٢ = -٣$

$\therefore ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ... = -٣$

$\therefore$ المتتابعة حسابية وأساسها = -٣

③ $\because ح_٢ - ح_١ = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$ ، $ح_٣ - ح_٢ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} = -\frac{١}{١٢}$

$\therefore ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$

$\therefore$ المتتابعة ليست حسابية.

ملاحظة تسمى المتتابعة توافقية إذا كان مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية مثل المتتابعة السابقة.

ملاحظات هامة

- المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث $ن \in ص^+$ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.
- فمثلاً $(ح_ن) = (٢ن - ١)$ متتابعة حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الأولى فى ن وأساسها ء = ٢
- $(ح_ن) = (ن^٢ + ١)$ متتابعة ليست حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الثانية فى ن



المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ تكون تزايدية إذا كان أساسها موجب (أى ء > صفر)

المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ تكون تناقصية إذا كان أساسها سالب (أى ء < صفر)

المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ تكون ثابتة إذا كان أساسها (ء = صفر)

فمثلاً

فى المتتابعة (١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ....) نلاحظ أن الأساس ء = ٤ − ١ = ٣ (عدد موجب)

لذلك فإن المتتابعة تكون تزايدية

وفى المتتابعة (١٠ ، ٨ ، ٦ ، ....) نلاحظ أن الأساس ء = ٨ − ١٠ = −٢ (عدد سالب)

لذلك فإن المتتابعة تكون تناقصية

وفى المتتابعة (٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ....) نلاحظ أن الأساس ء = ٦ − ٦ = صفر

لذلك فإن المتتابعة تكون ثابتة

مثال (٢)

أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية ، وإذا كانت متتابعة حسابية فاوجد أساسها مبينًا ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة :

❶ $(ح_ن) = (٢ن + ١)$ ❷ $(ح_ن) = (ن^٢ − ٢ن)$

❸ $(ح_ن) = (٢ − ٣ن)$ ❹ $(ح_ن) = \left(\frac{١}{ن} + ٢\right)$

الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_ن)$ حسابية أم لا فإننا نوجد $ح_{ن+١} − ح_ن$ فإذا كان الناتج مقدار ثابت كانت المتتابعة $(ح_ن)$ حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

(١) $ح_{ن+١} − ح_ن = [٢(ن + ١) + ١] − [٢ن + ١]$

$= ٢ن + ٢ + ١ − ٢ن − ١ = ٢ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٢ن + ١)$ متتابعة حسابية وأساسها ء = ٢

∵ ء > ٠ (موجبة) ∴ المتتابعة متزايدة

(٢) $ح_{ن+١} − ح_ن = [(ن + ١)^٢ − ٢(ن + ١)] − [ن^٢ − ٢ن]$

$= ن^٢ + ٢ن + ١ − ٢ن − ٢ − ن^٢ + ٢ن = ٢ن − ١ ≠$ مقدار ثابت لأنه يعتمد على ن

∴ $(ح_ن) = (ن^٢ − ٢ن)$ متتابعة غير حسابية



③ $ح_{ن+1} - ح_ن = [٢ - ٣(ن + ١)] - [٢ - ٣ن]$

$= ٢ - ٣ن - ٣ - ٢ + ٣ن = -٣ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٢ - ٣ن)$ متتابعة حسابية وأساسها = ء = -٣

∵ ء < ٠ (سالبة) ∴ المتتابعة متناقصة

④ $ح_{ن+1} - ح_ن = \left[\frac{١}{ن+١} + ٢\right] - \left[\frac{١}{ن} + ٢\right]$

$= \frac{١}{ن+١} + ٢ - \frac{١}{ن} - ٢$

$= \frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن} = \frac{-١}{ن(ن+١)}$

وهذا المقدار غير ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ $(ح_ن) = \left(\frac{١}{ن} + ٢\right)$ ليست متتابعة حسابية

⑤ التمثيل البياني للمتتابعة الحسابية

لتمثيل متتابعة حسابية ولتكن (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠)

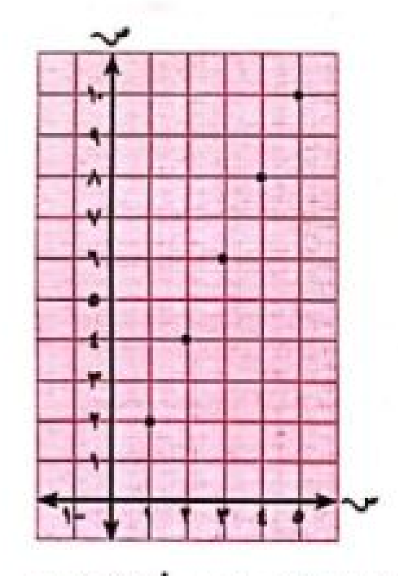
فإننا نلاحظ أن مجال المتتابعة (كما علمنا من الدرس الأول)

هو {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

وتكون الأزواج المرتبة الممثلة للمتتابعة هى :

{(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)، (٥، ١٠)}

ويمكن تمثيلها كما بالشكل المقابل ويكون هذا الشكل هو التمثيل البيانى للمتتابعة (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠) ونلاحظ من الشكل أن :



النقط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على إستقامة واحدة مما يعنى أن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ $ص^+$ وهو المتغير المستقل و $ح_ن$ حيث $ح_ن$ ∈ ح هو المتغير التابع ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة أى أن العلاقة بين المتغيرين ن ، $ح_ن$ هى $ح_ن = ء ن + ب$ حيث ب ، ء ثابتان ، ء أساس المتتابعة.



الحد النونى (الحد العام) للمتتابعة

إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ى فإن $ح_1$ = أ وكل حد يزيد عن السابق له بمقدار ى

أى أن $ح_2$ = أ + ى ، $ح_3$ = أ + ٢ ى ، $ح_4$ = أ + ٣ ى وهكذا

ونلاحظ من ذلك أن معامل ى يقل بمقدار الوحدة عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

فمثلاً $ح_{20}$ = أ + ١٩ ى ، $ح_{45}$ = أ + ٤٤ ى وهكذا

وبالإستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ى

ومن ذلك يمكن تعريف الحد النونى كما يلى :

الحد النونى للمتتابعة الحسابية

إذا رمزنا للحد الأول فى المتتابعة الحسابية بالرمز أ وللأساس بالرمز ى فـإن $ح_ن$ (أى الحد الذى رتبته ن) يسمى الحد النونى أو الحد العام للمتتابعة الحسابية

حيث $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ى حيث ن ∈ $ص^+$ ، ن رتبة الحد.

وإذا كان عدد حدود المتتابعة الحسابية ن فإن حدها الأخير $ح_ن$ يرمز له بالرمز ل

أى أن ل = أ + (ن − ١) ى

وإذا كتبنا بعض حدود المتتابعة وذلك بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فى الحد العام للمتتابعة الحسابية فإننا نحصل على المتتابعة (أ ، أ + ى ، أ + ٢ ى ، أ + ٣ ى ، ...) وتسمى هذه الصورة بالصورة العامة للمتتابعة الحسابية التى حدها الأول أ وأساسها ى

تعيين المتتابعة الحسابية

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول والأساس

فمثلاً إذا كان حدها الأول أ = ٢ والأساس ى = ٣

فإن المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

إستخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة حسابية

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة المتتابعة السابقة كما يلى :

١ نكتب قيمة أ (العدد ٢) ثم نضغط علامة [=]

٢ نضع قيمة ى بالضغط على [+] ثم (العدد ٣) ونضغط علامة [=] فنعطى الحد الثانى للمتتابعة.



③ بتكرار الضغط على علامة [=] تعطى الحدود التالية وهكذا ...

أى يكون الضغط على الأزرار بالتتابع الآتى : [2] [=] [+] [3] [=] [=] [=] [=]

ملاحظات هامة

- لاحظ الفرق بين (ح$_ن$) ، ح$_ن$ حيث (ح$_ن$) ترمز للمتتابعة بينما ح$_ن$ ترمز للحد النونى للمتتابعة.
- لإيجاد عدد حدود المتتابعة نوجد رتبة الحد الأخير فيها ن = $\frac{ل - أ}{ء} + ١$
- لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نوجد أصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يحقق المتباينة [ح$_ن$ < ٠] أو ن > $\frac{-أ}{ء} + ١$
- لإيجاد رتبة أخر حد موجب فى المتتابعة الحسابية توجد أكبر عدد صحيح موجب ن بحيث يحقق المتباينة [ح$_ن$ > ٠] أو ن < $\frac{-أ}{ء} + ١$
- لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معينة س فى متتابعة متزايدة نوجد أصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يحقق المتباينة [ح$_ن$ > س]
- إذا كان أساس المتتابعة (ء > ٠) كانت المتتابعة تزايدية.
- وإذا كان أساس المتتابعة (ء < ٠) كانت المتتابعة تناقصية.

مثال (٢)

فى المتتابعة الحسابية الآتية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) أوجد :

① قيمة ح$_{١٥}$ ② رتبة الحد الذى قيمته ٥٣

③ رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٩٨

الحل

أ = ٣ ، ء = ٥ - ٣ = ٢

① قيمة ح$_{١٥}$ = أ + ١٤ ء = ٣ + ١٤ × ٢ = ٣١

② نفرض أن الحد الذى قيمته = ٥٣ هو ح$_ن$

∴ ح$_ن$ = ٥٣ ∴ أ + (ن - ١) ء = ٥٣

∴ ٣ + (ن - ١) × ٢ = ٥٣ ∴ ٣ + ٢ ن - ٢ = ٥٣

∴ ٢ ن = ٥٣ + ٢ - ٣ ∴ ٢ ن = ٥٢

∴ ن = ٢٦

∴ رتبة الحد الذى قيمته ٥٣ هى ٢٦ (أى أن ح$_{٢٦}$ = ٥٣)



حل آخر $ن = \frac{ح_ن - أ}{د} + ١ = \frac{٥٣ - ٣}{٢} + ١ = ٢٦$

③ لإيجاد رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٩٨ نفرض أن $ح_ن > ٩٨$

$\therefore أ + (ن - ١) د > ٩٨$ $\therefore ٣ + (ن - ١) × ٢ > ٩٨$

$\therefore ٣ + ٢ن - ٢ > ٩٨$ $\therefore ٢ن > ٩٧$

$\therefore ن > ٤٨ \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ٤٩ هى أصغر قيمة للعدد ن تجعل $ح_ن > ٩٨$

$\therefore$ رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٩٨ هو ٤٩ أى $ح_{٤٩}$

حل آخر $ن > \frac{ح_ن - أ}{د} + ١$ $\therefore ن > \frac{٩٨ - ٣}{٢} + ١$ $\therefore ن > ٤٨،٥$ $\therefore ن = ٤٩$

مثال ٤

فى المتتابعة الحسابية الآتية (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ... ، −٧٢) **أوجد :**

① رتبة أول حد سالب وأوجد قيمته ② قيمة $ح_{١٣}$ من البداية

③ قيمة $ح_٩$ من النهاية ④ عدد حدود المتتابعة

الحل

$أ = ٣٢$ ، $د = ٢٨ - ٣٢ = -٤$

① لإيجاد رتبة أول حد سالب نفرض أن $ح_ن < ٠$

$\therefore أ + (ن - ١) د < ٠$ $\therefore ٣٢ + (ن - ١) × -٤ < ٠$

$\therefore ٣٢ - ٤ن + ٤ < ٠$ $\therefore -٤ن < -٣٦$

$\therefore ن > ٩$

$\therefore$ ١٠ هى أصغر قيمة للعدد ن تجعل $ح_ن$ سالباً

$\therefore$ رتبة أول حد سالب = ١٠

وقيمته $ح_{١٠} = أ + ٩ د = ٣٢ + ٩ × -٤ = -٤$

حل آخر $ن > \frac{-أ}{د} + ١$ $\therefore ن > \frac{-٣٢}{-٤} + ١$

$\therefore ن > ٩$ $\therefore$ رتبة أول حد سالب = ١٠





② ح$_{13}$ = أ + ١٢ ء = ٣٢ + ١٢ × −٤ = −١٦

③ لإيجاد ح$_{9}$ من النهاية فإن المتتابعة تكون معكوسة وتصبح أ = −٧٢ ، ء = +٤

∴ ح$_{9}$ = أ + ٨ ء = −٧٢ + ٨ × ٤ = −٤٠

④ لإيجاد عدد حدود المتتابعة نوجد رتبة آخر حد فيها

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ −٧٢ = ٣٢ + (ن − ١) × −٤

∴ −٧٢ = ٣٢ − ٤ن + ٤ ∴ ن = ٢٧

∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٧

حل آخر ن = $\frac{\text{ح}_{\text{ن}} - \text{أ}}{\text{ء}}$ + ١ = $\frac{-٧٢ - ٣٢}{-٤}$ + ١ = ٢٦ ∴ ن = ٢٧

مثال

متتابعة حسابية فيها ح$_{2}$ + ح$_{5}$ = ٣٠ ، ح$_{8}$ = −٣ **أوجد** المتتابعة **وأوجد** رتبة آخر حد موجب فيها ، وإذا كان −٣٥ أحد حدود هذه المتتابعة **فما** رتبته.

الحل

∵ ح$_{2}$ + ح$_{5}$ = ٣٠ ∴ أ + ء + أ + ٤ء = ٣٠

∴ ٢أ + ٥ء = ٣٠ ← ① ∵ ح$_{8}$ = −٣

∴ أ + ٧ء = −٣ ← ②

وبحل المعادلتين ① ، ② :

٢أ + ٥ء = ٣٠

أ + ٧ء = −٣ بالضرب × −٢ والجمع

∴ ٢أ + ٥ء = ٣٠

−٢أ − ١٤ء = ٦

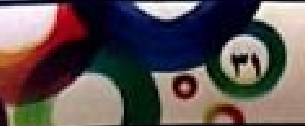
− ٩ء = ٣٦ ∴ ء = −٤

وبالتعويض في المعادلة ② :

∴ أ + ٧ × −٤ = −٣ ∴ أ = ٢٥

∴ المتتابعة هي (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ......)

لإيجاد رتبة آخر حد موجب فيها نفرض أن ح$_{ن}$ > ٠



∴ أ + (ن − ١) ء > ٠ ∴ ٢٥ + (ن − ١) × −٤ > ٠

∴ ٢٥ − ٤ن + ٤ > ٠ ∴ −٤ن > −٢٩

∴ ن < ٧ $\frac{١}{٤}$

آخر حد موجب هو $ح_٧$

لإيجاد رتبة الحد الذى قيمته −٣٥ نفرض أن $ح_ن$ = −٣٥

∴ أ + (ن − ١) ء = −٣٥ ∴ ٢٥ + (ن − ١) × −٤ = −٣٥

∴ ٢٥ − ٤ن + ٤ = −٣٥ ∴ ن = ١٦

حل آخر ن = $\frac{-٣٥ - ٢٥}{-٤}$ + ١ = ١٦

∴ $ح_{١٦}$ = −٣٥

يمكن استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة حل المعادلتين

٢أ + ٥ء = ٣٠ ، أ + ٧ء = −٣

بإتباع الخطوات التالية :

① **نضغط** على مفتاح العمليات [Mode] ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها وغالبًا 5 أو 3 فى بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية anx + bnY = cn وذلك بالضغط على المفتاح [1]

② **ندخل** معاملات (أ) ، (ء) والحد المطلق بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية مباشرة ونضغط على الأزرار من اليسار إلى اليمين مباشرة على النحو التالى :

ابدأ ⟵ [2] [=] [5] [=] [3] [0] [=] [1] [=] [7] [=] [-] [3] [=]

③ **لاستدعاء النواتج :**

نضغط على المفتاح [=] للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول أ ويكون الناتج x = 25

ثم نضغط على المفتاح [=] مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثانى ء ويكون الناتج y = -4

للخروج من البرنامج نضغط على المفاتيح [1] [Mode] ⟵ ابدأ





مثال (٦)

إذا كان مجموع الحد الثالث والحد الخامس من متتابعة حسابية هو ١٦ وحاصل ضرب حدها الثانى فى حدها السادس = ٤٨ **فأوجد** المتتابعة

الحل

∵ $ح_{٣} + ح_{٥} = ١٦$ ∴ أ + ٢ء + أ + ٤ء = ١٦

∴ ٢أ + ٦ء = ١٦ ∴ أ + ٣ء = ٨

∴ أ = ٨ − ٣ء ← (١)

∵ $ح_{٢} × ح_{٦} = ٤٨$

∴ (أ + ء) (أ + ٥ء) = ٤٨ ← (٢)

وبالتعويض من (١) فى المعادلة (٢) :

∴ (٨ − ٣ء + ء) (٨ − ٣ء + ٥ء) = ٤٨

∴ (٨ − ٢ء) (٨ + ٢ء) = ٤٨ ∴ ٦٤ − ٤$ء^{٢}$ = ٤٨

∴ $ء^{٢}$ = ٤ ∴ ء = ±٢

وبالتعويض فى المعادلة (١) :

عندما ء = ٢ ∴ أ = ٢ ، عندما ء = −٢ ∴ أ = ١٤

∴ يوجد متتابعتان الأولى هى (٢ ، ٤ ، ٦ ، ...) والثانية هى (١٤ ، ١٢ ، ١٠ ، ...)

مثال (٧)

إذا كانت (أ ، ١٢ ، .... ، ب ، ٣٩) متتابعة حسابية وكانت ب = ٤أ

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب وكذا رتبة حدها الأخير

الحل

∵ المتتابعة حسابية ∴ ء = ١٢ − أ = ٣٩ − ب ∴ ب = أ + ٢٧

∵ ب = ٤أ ∴ ٤أ = أ + ٢٧ ∴ ٣أ = ٢٧

∴ أ = ٩ ∴ ب = ٩ + ٢٧ ∴ ب = ٣٦

∴ ء = ١٢ − ٩ ∴ ء = ٣

∵ الحد الأخير ل = ٣٩ ، ل = أ + (ن − ١) ء

∴ ٣٩ = ٩ + (ن − ١) × ٣ ∴ ٣٩ = ٩ + ٣ن − ٣

∴ ٣ن = ٣٩ − ٩ + ٣ ∴ ن = ١١ ∴ الحد الأخير هو $ح_{١١}$



مثال ٨

ثلاث أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣

أوجد هذه الأعداد.

الحل

ملاحظة

في جميع المسائل التي يذكر فيها مجموع ثلاث حدود في متتابعة حسابية نفرض أن الحدود
أ - ء ، أ ، أ + ء
وإذا كان ٤ حدود نفرضها
أ - ٣ء ، أ - ء ، أ + ء ، أ + ٣ء
وهكذا لتسهيل الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة التي تكون المتتابعة هي :

أ - ء ، أ ، أ + ء   ∴ أ - ء + أ + أ + ء = ١٥

∴ ٣أ = ١٥   ∴ أ = ٥

∵ $(أ - ء)^{٢} + أ^{٢} + (أ + ء)^{٢} = ٩٣$

∴ $(٥ - ء)^{٢} + ٥^{٢} + (٥ + ء)^{٢} = ٩٣$

∴ $٢٥ - ١٠ء + ء^{٢} + ٢٥ + ٢٥ + ١٠ء + ء^{٢} = ٩٣$

∴ $٢ء^{٢} + ٧٥ = ٩٣$ ∴ $ء^{٢} = ٩$

∴ ء = ± ٣

إذا كانت ء = ٣   ∴ الأعداد هي ٢ ، ٥ ، ٨

إذا كانت ء = -٣   ∴ الأعداد هي ٨ ، ٥ ، ٢

مثال ٩

أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١ في المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ....)

الحل

لمعرفة ما إذا كان يوجد حد قيمته ١٥١ أم لا فإننا نوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥١
فإذا كانت عدد صحيح موجب فهذا يعني أنه يوجد حد قيمته ١٥١
أما إذا كانت رتبة الحد (ن) سالبة أو كسر فهذا معناه أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١

∵ أ = ١٣ ، ء = ١٧ - ١٣ = ٤

∴ لإيجاد قيمة ن نفرض أن $ح_{ن} = ١٥١$

∴ أ + (ن - ١) ء = ١٥١   ∴ ١٣ + (ن - ١) × ٤ = ١٥١



∴ ١٣ + ٤ن - ٤ = ١٥١   ∴ ٤ن = ١٥١ - ١٣ + ٤

∴ ٤ن = ١٤٢   ∴ ن = ٣٥,٥ وهذا لا يمكن

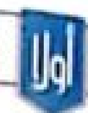
∴ لا يوجد حد قيمته ١٥١






تمرين ٢ على المتتابعة الحسابية



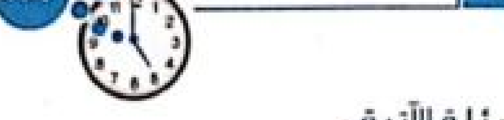



أولا راجع معنا واختبر نفسك



اختبار تراكمى ١





١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) الحد الخامس فى المتتابعة $ح_ن = ٢ ن - ١$ هو ....

[٩ ، ١٠ ، ٥ ، ١١]

(٢) المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = ١ - ٣ ن$ هى متتابعة ....

[تزايدية ، تناقصية ، ثابتة ، تذبذبية]

(٣) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر - ١)$ هو ....

[١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠]

(٤) $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢ =$ ....

[١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠]

---

(٥) أكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ ر - ٢)$ ....

....

(ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر - ١}$ ....

....

---

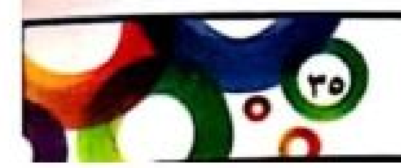
(٦) أكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(أ) $ح_ن = ن + ن^٢$ ....

....

(ب) $ح_ن = \left(\frac{١}{٣}\right)^ن$ ....

....



ثانيًا مسائل المستوى الأول

٢ حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية وأيها غير حسابية ثم أوجد الأساس في حالة كونها حسابية :

① (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤) ② (٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٣٨)

③ (−٥ ، −١١ ، −١٧ ، −٢٣ ، −٢٩) ④ (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

⑤ (س + ٢ ص ، ٣ س + ٣ ص ، ٥ س + ٤ ص) حيث س ، ص كميتان موجبتان

٣ أكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية في كل من الحالات الآتية :

① أ = ٢ ، ء = ٥ ② أ = ٧ ، ء = −٣ ③ أ = −٤ ، ء = $\frac{١}{٤}$

٤ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① تسمى المتتابعة ($ح_ن$) متتابعة حسابية إذا كان $ح_{ن+١} - ح_ن$ ....

[> مقدار ثابت أو = مقدار ثابت أو < مقدار ثابت أو = صفر]

② أساس المتتابعة الحسابية ء = ...

[$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ أو $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}}$ أو $ح_{ن+١} - ح_ن$ أو $ح_{ن+١}$]

③ $ح_ن$ = أ + ... [(ن − ١) ء أو ء أو (ن − ١) أو (ن + ١) ء]

④ ($ح_ن$) = (٢ ن + ١) متتابعة حسابية فإن :

أولًا أساسها = ... [٢ أو ٣ أو ١ أو ٥]

ثانيًا حدها الأول = ... [٢ أو ٣ أو ١ أو ٥]

⑤ الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) هو ....

[١١ أو ١٤ أو ١٧ أو ٢٠]

⑥ الحد الحادي عشر من المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٣ ن − ٥ هو ....

[٢٥ أو ٢٨ أو ٣٣ أو ٣٦]

⑦ الحد النوني للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ....) هو $ح_ن$ = ...

[٤ ن − ٨٥ أو ٤ ن + ٨٥ أو ٨٥ − ٤ ن أو ن − ٨٥]





٨) الحد النوني للمتتابعة الحسابية ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ....) هو ح$_{ن}$ = ...

[$\frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤}$ ن أ $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}$ ن أ $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤}$ ن أ $\frac{١}{٤}$ ن $- \frac{٣}{٤}$]

٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

١) (ح$_{ن}$) = (٥ − ٣ ن) متتابعة حسابية أساسها = ...

[٥ أ ٣ أ −٣ أ ٢]

٢) الحد النوني للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ....) هو ح$_{ن}$ = ...

[٣ن + ١ أ ٢ن − ١ أ ٣ن − ١ أ ن − ٣]

٣) عدد حدود المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٦ ، .... ، ١٢) هو ....

[٤ أ ٥ أ ٦ أ ١٢]

٤) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة ....

[(٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ....) أ (−١١ ، −١٥ ، −١٩ ، −٢٣ ، ....) أ

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ....) أ ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ....)]

٥) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هي ....

[(ح$_{ن}$) = $\left(\frac{ن + ١}{ن}\right)$ أ (ح$_{ن}$) = $(ن + ١)^{٢}$ أ

(ح$_{ن}$) = $\left(\frac{٣}{ن}(ن + ٢)\right)$ أ (ح$_{ن}$) = $\left(\frac{ن^{٣} - ١}{ن^{٢} + ن + ١}\right)$]

٦ أوجد :

١) قيمة الحد السابع من المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) [٢٠]

٢) ح$_{٤}$ ، ح$_{٨}$ ، ح$_{١٦}$ من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٦ ، ٩ ، ....) [١٢ ، ٢٤ ، ٤٨]

٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

١) متتابعة حسابية أساسها ٤ وحدها الخامس عشر = ٤٠ فإن حدها الأول ....

[−١٦ أ ١٦ أ ٤٠ أ −٤]

٢) متتابعة حسابية أساسها ٣ وحدها التاسع = ٢١ فإن حدها الأول ....

[٣ أ صفر أ −٣ أ ١٨]

٣) متتابعة حسابية حدها الأول = − ٢١ وحدها العشرون = ٣٦ فإن هو أساسها ....

[صفر أ −٣ أ ٣ أ ٩]



ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٨ ① بين أن المتتابعة $(ح_ن) = ٢ن + ١$ تكون متتابعة حسابية ثم أوجد قيمة حدها الثامن. [١٧]

② أثبت أن المتتابعة $(ح_ن) = ٧ - ٢ن$ هي متتابعة حسابية وأوجد أساسها ثم أكتب الأربعة حدود الأولى منها. [-٢ ، (٥ ، ٣ ، ١ ، -١)]

---

٩ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، ....) [$ح_{٢٤} = -٢$]

---

١٠ في المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، .... ، ١٠٠) أوجد الحد العاشر ثم أوجد عدد حدود هذه المتتابعة. [٤٠ ، ٣٠]

---

١١ أوجد $ح_٩$ ثم أوجد رتبة آخر حد موجب في المتتابعة الحسابية (١٧ ، ١٥ ، ١٣ ، ....) [١ ، ٩]

---

١٢ أوجد الحد السابع من المتتابعة الحسابية (١١ ، ٨ ، ٥ ، ....) ثم أثبت أنه لا يوجد فيها حد يساوي صفر [-٧]

---

١٣ أكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(ح_ن) = (٢ + ٥ن)$ ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧٢ من المتتابعة وأوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠ [(٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ....) ، ١٤ ، ٢٠]

---

١٤ متتابعة حسابية حدها الثاني = ٤ وحدها التاسع = -١٧ أوجد المتتابعة ثم أوجد الحد العشرين منها. [(٧ ، ٤ ، ١ ، ....) ، -٥٠]

---

١٥ متتابعة حسابية فيها $ح_٦ = ١٦$ ، $ح_{٢٠} = -٢٦$ أوجد المتتابعة ثم أوجد الحد السابع والعشرين فيها. [(٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ....) ، -٤٧]

---

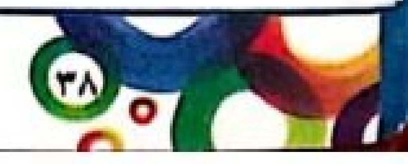
١٦ أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = ٢١ وحدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثاني. [(٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....)]

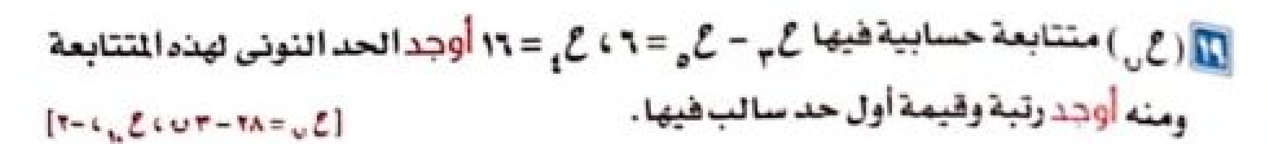
---

١٧ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ومجموع حديها الخامس والتاسع = ٤٠
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥٢ في هذه المتتابعة [(٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) ، ٥١]

---

١٨ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_١ + ح_٢ = ٩$ ، $ح_٥ = ٢٢$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي ٦٢ [(٢ ، ٧ ، ١٢ ، ....) ، ١٣]





١٩ ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{٣} - ح_{٥} = ٦$ ، $ح_{٤} = ١٦$ **أوجد** الحد النونى لهذه المتتابعة ومنه **أوجد** رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

[$ح_{ن} = ٢٨ - ٣ن$ ، $ح_{١٠} = -٢$]

---

٢٠ ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعهم = ١٥ وحاصل ضربهم = ١٠٥

أوجد هذه الأعداد الثلاثة.

[٣، ٥، ٧]

---

٢١ متتابعة حسابية حدها الثانى ضعف حدها الرابع وحدها العاشر ينقص عن ضعف حدها السابع بمقدار ٦ **أوجد** المتتابعة.

[(١٥، ١٢، ٩، ....)]

---

٢٢ **أوجد** المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

[(١٠، ١٢، ١٤، ....)]

---

٢٣ ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{٢} + ح_{٤} = ٤٢$ ، $ح_{٣} \times ح_{٥} = ٣١٥$

أوجد هذه المتتابعة.

[(٢٧، ٢٤، ٢١، ....)]

---

٢٤ إذا كونت خمسة أعداد متتابعة حسابية مجموعها ٤٥ وحاصل ضرب العدد الأول فى العدد الخامس مضافًا إليه حاصل ضرب العدد الثانى فى العدد الرابع = ١١٧ **فما هى** هذه الأعداد ؟

[(٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥)]

---

٢٥ فى المتتابعة الحسابية (٣، ٩، ١٥، ....، ٩٩) **أوجد** حدها الخامس عشر ثم **أوجد** عدد حدود المتتابعة.

[٨٧، ١٧]

---

٢٦ متتابعة حسابية حدها الأول = ٦ ، $ح_{ن} = ح_{ن-١} + ٢$ **أوجد** $ح_{٤} + ح_{٥}$

[٢٦]

---

٢٧ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_{ن} = ٣٩$ ، $ح_{٢ن} = ٧٩$

أوجد قيمة ن ثم **أوجد** المتتابعة.

[ن = ١٠ ، (٣، ٧، ١١، ....)]

---

٢٨ متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ وحدها الأخير = −٢٦ وعدد حدودها ٢٠ حدًا

أوجد المتتابعة.

[(١٢، ١٠، ٨، ....، −٢٦)]

---

٢٩ إذا كانت (٣، أ، ....، ب، ١٦٣) متتابعة حسابية وكان ب = ١٩ أ + ٦

أوجد قيمة كل من أ ، ب وكذا رتبة حدها الأخير.

[٨، ١٥٨، ٣٣]



٣٠ إذا كانت (٨ ، ا ، ..... ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حدًا فأوجد قيمة ا ، ب [١٢ ، ٦٤]

٣١ متتابعة حسابية حدها الثالث يزيد عن حدها الخامس بمقدار ١٨ وضعف حدها السابع ينقص عن حدها الرابع بمقدار ٣١ أوجد المتتابعة. [(٥٠ ، ٤١ ، ٣٢ ، .....)]

٣٢ فى المتتابعة الحسابية (٥ س + ١ ، ٣ س + ١٢ ، ..... ، ٣٥ س − ١٤ ، ٣٠ س + ٦) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة. [٤ ، ١٧]

٣٣ متتابعة حسابية يزيد حدها الثالث عن حدها الأول بمقدار ٦ ومجموع مربعى حديها الثانى والرابع = ٢٦ أوجد المتتابعة. [(−٤ ، −١ ، ٢ ، .....) أ (−٨ ، −٥ ، −٢ ، .....)]

٣٤ فى المتتابعة الحسابية (٣ س ، ٢ س + ص ، ٣ ص − ٣ ، ٢٤ ، ..... ، ٦٣) أوجد قيمة س ، ص ثم أوجد المتتابعة وعدد حدودها. [٥ ، ٨ ، ن = ١٧]

٣٥ أوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ٤٢ وكل منها لا يقبل القسمة على ٣ [٢٦]

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٣٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① عدد حدود المتتابعة الحسابية : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٢٧١) هو ....

[٣٢ أ ٦٧ أ ١٦٩ أ ٩٣١٣]

② متتابعة حسابية فيها $ح_{ن+٢} - ح_{ن+١} = ٣$ ، $ح_٧ = ٢٣$ فإن $ح_٨ =$ ....

[٢٥ أ ١٨ أ ٢٠ أ ٢٦]

③ متتابعة حسابية حدها الأول = ٦ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ٢$ فإن $ح_٧ =$ ....

[٢٠ أ ٢٤ أ ١٨ أ ١٢]

④ إذا كانت (٢١ ، س ، ١٥ ، ص) حدود متتابعة حسابية فإن ص = ...

[١٨ أ ١٢ أ ١٦ أ ٢٤]

⑤ إذا كانت (١٢ ، ا ، ..... ، ٣ ا ، ٤٨) متتابعة حسابية فإن ا = ...

[١٥ أ ٣٠ أ ٣ أ ٤٥]

⑥ عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٧ ، ١٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٣ يساوى ....

[٢٨ أ ٢٩ أ ٣٠ أ ٣١]





(٧) عدد حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، س ، ٧ ، ..... ، ٨ س + ١) يساوى ....

[١٠ أ ١٩ أ ٢٠ أ ٢١]

(٨) عدد الحدود فردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ..... ، ١١٠) يساوى ....

[١٨ أ ٢٠ أ ١٩ أ ٣٧]

(٩) إذا كان (٢ ك + ١ ، ٥ ك - ١ ، ٦ ك + ٣) متتابعة حسابية فإن ك = ...

[١ أ ٢ أ ٣ أ ٥]

(١٠) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣٥ وأساسها عدد صحيح ، $ح_{١٠}$ هو أول حد سالب

فإن $ح_{١٠}$ = ... [-١ أ -٢ أ -٣ أ -٤]

(١١) متتابعة حسابية حدها الأول = -٥١ وأساسها عدد صحيح ، $ح_{١٩}$ هو أول حد موجب

فإن $ح_{١٩}$ = ... [١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

(١٢) متتابعة حسابية فيها $ح_١ = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ٢١$ ، $ح_{٣ن-٢} = ٤١$

فإن ن = ... [٤ أ ٥ أ ٦ أ ٧]

(١٣) إذا كان أ ، ٧ ، ..... ، ب ، ٢٥ تكون متتابعة حسابية وكانت ب = ٥ أ + ٢

فإن عدد حدود المتتابعة = ... [٧ أ ٨ أ ٩ أ ١٠]

(١٤) فى أى متتابعة حسابية يكون $ح_{٣ن} + ح_{٥ن} - ح_{٢ن}$ = ...

[$ح_{٧ن}$ أ $ح_{٨ن}$ أ $ح_{٦ن}$ أ $ح_{٤ن}$]

(١٥) إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_م = م^٢$ ، $ح_ن = ن^٢$ فإن أساس المتتابعة = ...

[م ن أ م - ن أ ن - م أ م + ن]

(١٦) متتابعة حسابية فيها $ح_م = \frac{١}{ن}$ ، $ح_ن = \frac{١}{م}$ فإن $ح_{م+ن}$ = ...

[$ح_م + ح_ن$ أ $ح_م \times ح_ن$ أ $ح_م - ح_ن$ أ $\frac{ح_م}{ح_ن}$]

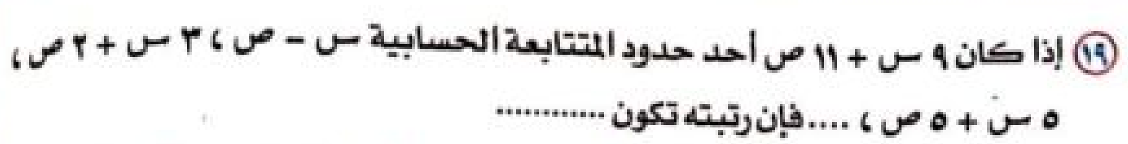
(١٧) أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهم ٢٠ و مجموع مقلوبى الحدين الثانى والثالث يساوى $\frac{٥}{١٢}$ فإن الأعداد هى ....

[١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ أ ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ أ ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ أ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

(١٨) إذا كان $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الحسابية ١٣ ، $١٣ \frac{١}{٢}$ ، ١٤ ، ..... يساوى $ح_{٦ن+٢}$ من المتتابعة الحسابية ٤٦ ، $٤٤ \frac{١}{٢}$ ، ٤٣ ، ..... فإن ن = ...

[٦ أ ٥ أ ٣ أ ٤]





(١٩) إذا كان ٩ س + ١١ ص أحد حدود المتتابعة الحسابية س - ص ، ٣ س + ٢ ص ، ٥ س + ٥ ص ، .... فإن رتبته تكون ....

[الرابع أ) الخامس أ) السادس أ) السابع]

٣٧ إذا كونت س ، ص ، ع متتابعة حسابية فأثبت أن (٣ س + ١ ، ٣ ص + ١ ، ٣ ع + ١) تكون متتابعة حسابية أيضًا.

٣٨ إذا كان الحد الأول والثالث من متتابعة حسابية يساويان على الترتيب الحدين الثانى والخامس من متتابعة حسابية أخرى فأثبت أن الحد الخامس من المتتابعة الأولى يساوى الحد الثامن من المتتابعة الثانية.

٣٩ إذا كان الحد الأخير من متتابعة حسابية يساوى عشرة أمثال حدها الأول والحد قبل الأخير فى هذه المتتابعة يساوى مجموع حديها الرابع والخامس فأثبت أن أساس هذه المتتابعة يساوى حدها الأول وأوجد عدد حدودها.
[١٠]

٤٠ متتابعة حسابية فيها $ح_{٧} = ٣٠$ ، $ح_{٣}$ وسطًا متناسبًا بين $ح_{١}$ ، $ح_{١١}$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٦٦
[(٣ ، ٧٫٥ ، ١٢ ، ....) ، ١٥]

٤١ (س ، ص ، ع ، ل ، ....) متتابعة حسابية حدودها موجبة فإذا كان ص ع - س ل = ٣٢ ، ص ل - ٢ س ع = ٣٩ فأثبت أن ١٩٩ يكون حدًا فيها وأوجد رتبته.
[٥٠]

٤٢ (س ، ص ، ع ، ل ، ....) متتابعة حسابية فيها س + ل = ٤ ، $ص^{٢} + ع^{٢} = ٢$ س
أوجد المتتابعة.
[(٥ ، ٣ ، ١ ، ....) ، (٨ ، ٤ ، ٠ ، ....)]

٤٣ (أ ، ب ، هـ ، ....) متتابعة حسابية متناقصة فإذا كان أ + ب + هـ = ١٢ ، أ ب هـ = ٤٨ فأوجد الحد العام للمتتابعة وأوجد رتبة أول حد تقل قيمته عن -٥٠١
[٨ - ٢ ن ، $ح_{٢٥٥}$]

٤٤ ($ح_{ن}$) متتابعة معرفة بحيث $ح_{١} = -٥٠$ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ٥$ ، ($ح'_{ن}$) متتابعة أخرى معرفة بحيث $ح'_{ن} = ٧ ح_{ن} + ٢$ أثبت أن كلاً من ($ح_{ن}$) ، ($ح'_{ن}$) متتابعة حسابية وأوجد كلاً منهما ثم أوجد أول حد موجب فى المتتابعة ($ح'_{ن}$)
[$ح'_{١١} = ٢$]





الأوســـاط الحسابيـــة



إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن ب تعرف بالوسط الحسابي بين الحدين أ ، جـ وقد علمنا مما سبق أن الأساس = أي حد − السابق له أي أنه في المتتابعة (أ ، ب ، جـ) يكون : ء = ب − أ ، ء = جـ − ب

$\therefore$ ب − أ = جـ − ب $\quad \therefore$ ب + ب = أ + جـ $\quad \therefore$ ٢ب = أ + جـ $\quad \therefore$ ب = $\frac{\text{أ + جـ}}{٢}$

وكما علمنا في السنوات السابقة أن الوسط الحسابي لأي عددين يساوي $\frac{\text{مجموع العددين}}{٢}$

وعليه فإن الوسط الحسابي للحدين أ ، جـ هو $\frac{\text{أ + جـ}}{٢}$ وهو ما يتوافق مع ما ندرسه الآن ومن ذلك نلاحظ أن الوسط الحسابي لأي حدين عند وضعه بين الحدين فإن الحدود الثلاثة تكون متتابعة حسابية.

أي أن (أ ، ب ، جـ) أو (أ ، $\frac{\text{أ + جـ}}{٢}$ ، جـ) متتابعة حسابية وإذا كانت المتتابعة الحسابية تتكون من أربعة حدود مثل (أ ، ب ، جـ ، ء) فإن ب ، جـ يكونان وسطين حسابيين وتسمى جميع الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين بالأوساط الحسابية.



إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

إذا كان أ ، ب حدين فإنه يمكن إدخال عدة أوساط حسابية مثل $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، $س_ن$ بين الحدين أ ، ب بحيث تكون الأعداد (أ ، $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، $س_ن$ ، ب) متتابعة حسابية.

مثال ١

ادخل ٧ أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥

الحل

∵ عدد الأوساط = ٧ ∴ عدد الحدود = ٧ + ٢ = ٩

∴ لدينا متتابعة حدها الأول = ٣ ، حدها الأخير = ٣٥ ، ن = ٩

∵ ل = أ + (ن – ١) ء ∴ ٣٥ = ٣ + (٩ – ١) × ء

∴ ٨ ء = ٣٢ ∴ ء = ٤

∴ الأوساط هي : ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ٣١

ملاحظة : أ = ٣ ، ل = ٣٥ ، و = ٧ ∴ ء = $\frac{٣٥ - ٣}{٧ + ١}$ = ٤

∴ الأوساط هي (٧ ، ١١ ، ..... ، ٣١)

ملاحظات هامة

- عدد الأوساط الحسابية في أي متتابعة = عدد حدود المتتابعة – ٢ = ن – ٢
- الوسط الذي ترتيبه ر في متتابعة حسابية = أ + ر ء

فمثلاً : الوسط الثالث = أ + ٣ ء والوسط الخامس = أ + ٥ ء وهكذا ....

- بفرض أن و هي عدد الأوساط فإن ء = $\frac{ل - أ}{و + ١}$

الإثبات : عدد الأوساط و = عدد الحدود – ٢ = ن – ٢ ∴ ن = و + ٢

∵ ل = أ + (ن – ١) ء ∴ ل – أ = (و + ٢ – ١) ء ∴ ء = $\frac{ل - أ}{و + ١}$

مثال ٢

أوجد العددين الذين وسطهما الحسابى $\frac{١}{٢}$ ٧ والنسبة بينهما ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العددين ٢ س ، ٣ س

∴ الوسط الحسابى = $\frac{\text{٢ س + ٣ س}}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

∴ ٥ س = ١٥

∴ س = ٣

∴ العددين هما = ٢ × ٣ ، ٣ × ٣

∴ العددين هما ٦ ، ٩

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل تكون المتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، ..... ، ل − ٢ ء ، ل − ء ، ل) ويكون الوسط الأول = $ح_٢$ = أ + ء ، الوسط الثانى = $ح_٣$ = أ + ٢ ء وهكذا ..... ، الوسط الأخير = ل − ء ، الوسط قبل الوسط الأخير = ل − ٢ ء وهكذا ....

مثال ٣

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٢٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأول والرابع إلى مجموع الوسطين الأخيرين هما ١ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن أساس المتتابعة = ء

∴ الوسطين الأول والرابع هما ٢ + ء ، ٢ + ٤ ء ، الوسطين الأخيرين هما ٢٤ − ء ، ٢٤ − ٢ ء

∴ $\frac{\text{٢ + ء + ٢ + ٤ ء}}{\text{٢٤ − ء + ٢٤ − ٢ ء}} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{٤ + ٥ ء}}{\text{٤٨ − ٣ ء}} = \frac{١}{٣}$

∴ ١٢ + ١٥ ء = ٤٨ − ٣ ء

∴ ١٨ ء = ٣٦

∴ ء = ٢

∴ ل = أ + (ن − ١) ء

∴ ٢٤ = ٢ + (ن − ١) × ٢

∴ ٢٤ = ٢ + ٢ ن − ٢

∴ ن = ١٢

∴ عدد الأوساط = ١٠

ملاحظة أ = ٢ ، ل = ٢٤

∵ ء = $\frac{\text{ل − أ}}{\text{ر + ١}}$

∴ ٢ = $\frac{\text{٢٤ − ٢}}{\text{ر + ١}}$

∴ ر + ١ = ١١

∴ ر = ١٠

∴ عدد الأوساط = ١٠



مثال ٤

إذا كان ب وسطًا حسابيًا للعددين أ ، جـ فأثبت أن : $\frac{\text{٥جـ} - \text{٥أ}}{\text{ب} - \text{أ}} + \frac{\text{٢أ} - \text{٢جـ}}{\text{جـ} - \text{ب}} = ٦$

الحل

$\because$ ب وسطًا حسابيًا للعددين أ ، جـ $\quad \therefore \text{ب} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}$

$$\therefore \frac{\text{٥جـ} - \text{٥أ}}{\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢} - \text{أ}} + \frac{\text{٢أ} - \text{٢جـ}}{\text{جـ} - \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}} = \frac{\text{٥جـ} - \text{٥أ}}{\frac{\text{أ} + \text{جـ} - \text{٢أ}}{٢}} + \frac{\text{٢أ} - \text{٢جـ}}{\frac{\text{٢جـ} - \text{أ} - \text{جـ}}{٢}}$$

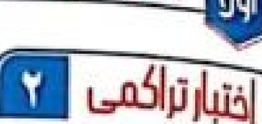
$$= \frac{\text{٥جـ} - \text{٥أ}}{\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{٢}} + \frac{\text{٢أ} - \text{٢جـ}}{\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{٢}} = \frac{\text{٣جـ} - \text{٣أ}}{\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{٢}} = \frac{٢ \times ٣(\text{جـ} - \text{أ})}{\text{جـ} - \text{أ}} = ٦$$

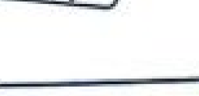














الأسئلة التى قبلها علامة لها نفس فكرة كتاب المدرسة

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① الحد السابع للمتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) هو ....

[١٧ أ، ١٨ أ، ١٩ أ، ٢٠]

② إذا كان $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣$ فإن أساس المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ = ...

[-٣ أ، ٣ أ، -٢ أ، ٢]

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ك + ١)$ = ...

[٢٥ أ، ٣٠ أ، ٣٥ أ، ٤٠]

④ الحد الخامس للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن - ١$ هو ....

[١١ أ، ٩ أ، ١٣ أ، ١٥]

---

⑤ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، ....)

....

....

....

---

⑥ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_١ + ح_٢ = ٩$ ، $ح_٥ = ٢٢$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته تساوى ٦٢

....

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كونت (٣ ، ٧ ، ١١ ، ..... ، ٤٣ ، ٤٧) متتابعة حسابية فإن ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٤٣ تسمى ....

[أوساط حسابية أ) متتابعة تناقصية أ) متتابعة تذبذبية أ) متتابعة ثابتة]

② عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة ....

[+٢ أ) +١ أ) -١ أ) -٢]

③ عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد أوساط هذه المتتابعة ....

[+٢ أ) +١ أ) -١ أ) -٢]

④ الوسط الحسابي للعددين ٨ ، ١٢ هو .... [٦ أ) ٨ أ) ١٠ أ) ٢٠]

⑤ إذا كان الوسط الحسابي للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوي ....

[١٠ أ) ١٤ أ) ٢١ أ) ١٦]

٣ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كان عدد حدود المتتابعة ١٥ حدًا فإن الحد الأوسط هو ....

[$ح_{٧}$ أ) $ح_{٨}$ أ) $ح_{٩}$ أ) $ح_{١٤}$]

② إذا كان ب هو الوسط الحسابي بين ل ، م فإن ل + م = ...

[ب أ) ٢ب أ) $\frac{ب}{٢}$ أ) $ب^{٢}$]

③ إذا كانت ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية حيث $ح_{ن}$ = ٣ ن + ٢ فإن الوسط الحسابي بين $ح_{٥}$ ، $ح_{١١}$ يساوي ....

[٨ أ) ١٦ أ) ٢٢ أ) ٢٦]

④ إذا كان ٢ أ + ١ ، ٥ أ - ١ ، ٦ أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوي ....

[١ أ) ٢ أ) ٣ أ) ٥]

⑤ في أي متتابعة حسابية يكون الوسط الخامس هو الحد ....

[الرابع أ) الخامس أ) السادس أ) السابع]

⑥ عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير = ...

[ل أ) ل + د أ) ل - د أ) ل - ٢د]





(٧) إذا كانت أ ، ب وسطين حسابين بين س ، ص فإن $\frac{ص - س}{ب - أ}$ تساوى ....

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦]

ثانياً مسائل المستوى الثانى

٤ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨ [١٣، ٢٠، ٢٧، ٣٤، ٤١]

٥ أدخل خمسة أوساط حسابية بين ٤ ، ٢٢ ثم أوجد الوسط الرابع [١٦]

٦ أدخل ١٢ وسطاً حسابيًا بين ٦٤ ، ٢٥ ثم أوجد كل من الوسط الأول والوسط الأخير [٦١، ٢٨]

٧ أدخل ١٦ وسطاً حسابيًا بين العددين ٢٧، −٢٤ [(٢٤، ٢١، ١٨، ....، −٢١)]

٨ عددان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ووسطها الحسابى = ١٣ أوجد العددين. [٦، ٢٠]

٩ أوجد عددين يزيد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٣ ووسطهما الحسابى = $١٠ \frac{١}{٢}$ [١٥، ٦]

١٠ إذا كان الوسط الخامس بين العددين ٣ ، ٤٧ من متتابعة حسابية هو ٢٣

فأوجد عدد الأوساط ثم قيمة الوسط التاسع. [١٠، ٣٩]

١١ متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ والوسط الحسابى بين حديها الثالث

والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة. [(١، ٤، ٧، ....)]

١٢ إذا كانت ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية

فأوجد قيمة كل من أ ، ب [٣٠، ١٨]

١٣ إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ والوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠

فأوجد قيمة كل من أ ، ب [٤، ١٢]

١٤ إذا أدخلت أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال

الوسط الثانى أوجد عدد هذه الأوساط. [٧]

١٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو

١٩ وحدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢ [(٧، ١٠، ١٣، ....)]





١٦ متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والرابع = ١٦ والوسط الحسابى لحديها الثانى والرابع = ٦ أوجد المتتابعة ثم أوجد الوسط الخامس [(١٤ ، ١٠ ، ٦ ، ٢ ، ...)]

---

١٧ إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ٣ : ١٦ فما عدد تلك الأوساط ؟ [١٥]

---

١٨ إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فأثبت أن س − ص = ٣ (أ − ب)

---

١٩ إذا أدخلنا بين ٢ ، ٢٨ عدة أوساط حسابية عددها ن وكانت النسبة بين الوسط الثالث والوسط الذى ترتيبه (ن −١) هى ١ : ٣ فما قيمة ن ؟ [١٢]

---

٢٠ إذا كانت ص هى الوسط الحسابى بين س ، ع فأثبت أن :

① (س + ٢ ص + ع) (٢ ص − س − ع) = صفر

② $\frac{ص + ٢ س}{ص - ع} + \frac{ص + ٢ ع}{ص - س} = ٤$

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢١ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كانت ($س^٢$ ، $ص^٢$ ، $ع^٢$) فى تتابع حسابى فإن $ص^٢$ = ...

[$س^٢ + ع^٢$ أ، $\frac{س^٢ + ع^٢}{٢}$ أ، $\sqrt{س^٢ + ع^٢}$ أ، ٢ ($س^٢ + ع^٢$)]

② عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط قبل الأخير = ...

[ل − ٢ء أ، ل أ، ل + ء أ، ل − ء]

③ إذا كانت ($ع_ن$) متتابعة حسابية حيث $ع_ن$ = ٣ ن − ٢ فإن الوسط الحسابى بين $ع_٥$ ، $ع_{١١}$ يساوى ....

[٨ أ، ١٦ أ، ٢٢ أ، ٢٦]

④ إذا كان الوسط الحسابى للعددين ٣ س − ٧ ، ٥ س + ٣ يساوى ٦ فإن س = ...

[٨ أ، ٤ أ، −٢ أ، ٢]

⑤ إذا كان (س ، ٣١ ، ص ، ٢٩ ، ع) فى تتابع حسابى فإن ع = ...

[٢٨ أ، ٣٢ أ، ٣٠ أ، ٢٦]

⑥ إذا كان (٥ أ − ١) الوسط الحسابى للعددين (٢ أ + ١) ، (٦ أ + ٣) فإن أ = ...

[٥ أ، ٣ أ، ٢ أ، ١]





⑦ متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ وحدها الأخير = −٢٦

فإن قيمة الحد الأوسط = ... [−١٤ أ، ١٤ أ، −٧ أ، ٧]

⑧ إذا كان ($أ^{٢}$ − ٢ ، ٨ ، ٧ أ) فى تتابع حسابى فإن أ = ...

[−٩ ، ٢ أ، ٩ ، −٢ أ، −٣ ، ٦ أ، ٣ ، −٦]

⑨ إذا كانت (١ ، ل ، م) فى تتابع حسابى ، $م^{٢}$ = ل ، ل ≠ م ≠ ١

فإن ل + م = ... [$\frac{١}{٢}$ أ، −$\frac{١}{٢}$ أ، −$\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{١}{٤}$]

⑩ إذا كان الوسط الحسابى للعددين أ ، ب يساوى ٥ والوسط الحسابى بين $أ^{٢}$ ، $ب^{٢}$

هو ٢٦ حيث أ > ب فإن أ : ب = ... [٣ : ٢ أ، ٥ : ٣ أ، ٥ : ٦ أ، ٩ : ٥]

⑪ إذا كان ب وسط حسابى بين أ ، جـ فإن $ب^{٢}$ − $(جـ − ب)^{٢}$ = ...

[$\frac{أ}{جـ}$ أ، أ جـ أ، أ + جـ أ، ب − جـ]

⑫ إذا كانت ص وسط حسابى بين س ، ع فإن $\frac{ص + ٢ ع}{ص − س}$ − $\frac{ص + ٢ س}{ع − ص}$ = ...

[١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤]

⑬ إذا كان أ ، ب ، ٢ جـ فى تتابع حسابى ، ٢ ب ، ٣ جـ ، ء فى تتابع حسابى أيضًا

فإن ٣ أ + ء = ... [٢ ب أ، ٣ جـ أ، ٤ ب أ، ٦ جـ]

⑭ إذا كونت أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ متتابعة حسابية فإن $\frac{جـ − ب}{هـ − أ}$ = ...

[$\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{١}{٣}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، ١]

⑮ الوسط الحسابى للحدين الثالث عشر والخامس والعشرين من متتابعة حسابية

يساوى ٢٨,٥ ، $ح_{١٩}$ + $ح_{٢٠}$ + $ح_{٢١}$ = ٨٤ فإن حدها الأول يساوى ....

[٣٦ أ، ٣٦,٥ أ، ٣٧ أ، ٣٧,٥]

⑯ إذا كونت ١٥ ، ٣ س + ٢ ، ٤ س − ٥ متتابعة حسابية فإن رتبة أول حد قيمته

تقل عن (−٥٠) هو .... [١٦ أ، ١٧ أ، ١٨ أ، ١٩]

٢٢ أوجد قياس كل زوايا المثلث الذى فيه قياس إحدى زواياه هو الوسط الحسابى بين قياسى الزاويتين الأخرين والفرق بين قياسى الزاويتين الكبرى والصغرى يساوى ٨٠° [٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°]

٢٣ أدخل ٦ أوساط حسابية بين لو ٢ ، لو ٢٥٦ [٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ..... ، ٧ لو ٢]



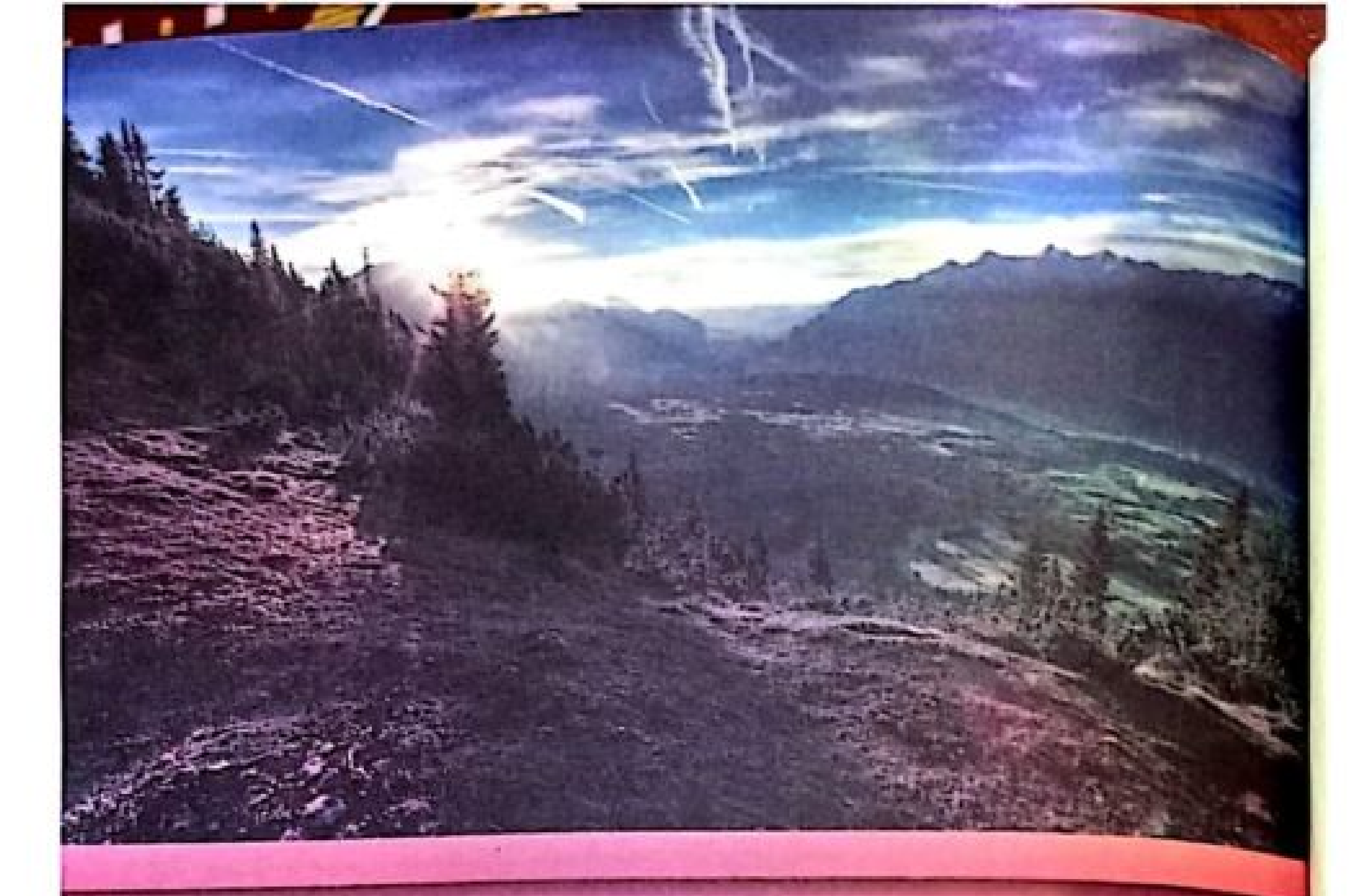
٢٤ إذا أدخل بين العددين أ ، ب ثلاثة أوساط حسابية مجموعها ٤٢ وإذا أدخل بين نفس العددين خمسة أوساط حسابية أخرى كان أول الأوساط الثلاثة الأولى يزيد عن أول الأوساط الخمسة الأخرى بمقدار ٢ أوجد العددين أ ، ب [٢ ، ٢٦]

---

٢٥ أوجد النسبة بين أطوال أضلاع △ أ ب جـ القائم الزاوية في ب والذى أطوال أضلاعه في تتابع حسابي حيث أَ هو الوسط الحسابي بين بَ ، جَ [٣ : ٤ : ٥]

---

٢٦ إذا كان س ، ص ، ع في تتابع حسابي فأثبت أن : س + ص ، س + ع ، ص + ع في تتابع حسابي أيضًا.



الدرس ٤ المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية

هى عملية جمع حدود المتتابعة الحسابية.

فمثلاً المتتابعة الحسابية (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠) يمكن جمع حدودها الخمسة وتكتب فى صورة متسلسلة حسابية بالشكل $حـ_٥ = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠$ حيث «$حـ_٥$» يرمز لمجموع خمسة حدود متتالية من المتتابعة.

مع ملاحظة أن المتتابعة عندما كانت مكتوبة فى صورة دالة مثل $(ع_ن) = (٢ ن)$ فإن مجموع المتسلسلة المتكونة من الخمسة حدود الأولى يكتب على الصورة $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ن)$



مجموع ن حداً من متتابعة حسابية

أولاً مجموع ن حداً من متتابعة حسابية بمعلومية حديها الأول أ والأخير ل

إذا كان الحد الأول من المتتابعة الحسابية هو أ وحدها الأخير هو ل وأساسها ء وعدد حدودها ن فإن مجموع هذه الحدود (مجموع ن حداً) من المتتابعة الحسابية يرمز له



بالرمز «$ح_ن$» ويعطى بالمتسلسلة التالية :

$$ح_ن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل - ء) + ل \leftarrow (١)$$

كما يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة :

$$ح_ن = ل + (ل - ء) + (ل - ٢ء) + ... + (أ + ء) + أ \leftarrow (٢)$$

ونجمع المعادلتين (١) ، (٢) وينتج أن :

$٢ ح_ن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... (أ + ل)$ إلى ن من المرات

أى أن $٢ ح_ن = ن (أ + ل)$ وبقسمة الطرفين على ٢ $ح_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

حيث ن هو عدد الحدود ، أ هو الحد الذى نبدأ به ، ل هو الحد الأخير وتستخدم هذه القاعدة إذا علم فى المتتابعة حدها الأول والأخير .

مثال (١)

أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول = ٤ وحدها العشرين = ٦١

الحل

أ = ٤ ، ن = ٢٠ ، ل = ٦١

$\therefore ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٤ + ٦١] = ٦٥٠$

مثال (٢)

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية ٦ + ٩ + ١٢ + ... + ٣٣

الحل

ء = ٩ - ٦ = ٣ ، يلزم إيجاد عدد الحدود بإستخدام الحد النونى للمتتابعة

$\because ل = أ + (ن - ١) ء$

$\therefore ٣٣ = ٦ + (ن - ١) \times ٣$

$\therefore ٣٣ = ٦ + ٣ن - ٣$

$\therefore ٣ن = ٣٠$

$\therefore ن = ١٠$

ثم نوجد مجموع ١٠ حدود بإستخدام الحد الأول والأخير

$\because ح_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

$\therefore ح_ن = \frac{١٠}{٢} [٦ + ٣٣] = ١٩٥$



مجموع ن حدًا من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول أ والأساس ء

علمنا فيما سبق أن : ل = أ + (ن − ١) ء وعلمنا أن $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

وبالتعويض بالعلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن :

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١) ء] ∴ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء]

وتستخدم هذه القاعدة إذا علم فى المتتابعة حدها الأول والأساس .

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلى :

مجموع حدود متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ن :

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ويستخدم إذا علم الحد الأخير (ل)

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء] ويستخدم إذا علم الأساس (ء)

مثال (٣)

أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى من المتتابعة الحسابية : (٢١ ، ١٩ ، ١٧ ، ....)

الحل

ء = ١٩ − ٢١ = −٢

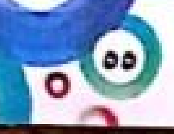
∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء]

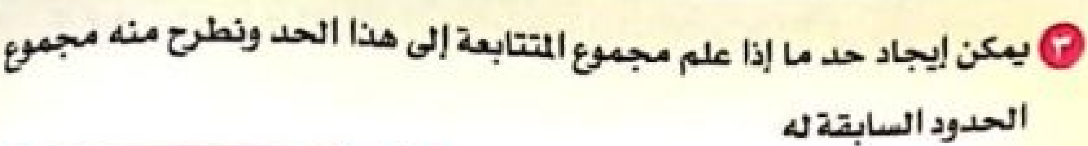
∴ $جـ_ن = \frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٢١ + ١٩ (−٢)] = ٤٠

ملاحظات هامة

١) لإيجاد المجموع $جـ_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود ن وإذا كانت غير معلومة نوجدها من القاعدة ل = أ + (ن − ١) ء

٢) لإيجاد المجموع ابتداء من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلًا من أ فى القاعدة التى نستخدمها **فمثلًا** ، إذا كان مطلوب المجموع بدءًا من الحد الثالث فإننا نعوض بـ $ح_٣$ بدلًا من أ





(٣) يمكن إيجاد حد ما إذا علم مجموع المتتابعة إلى هذا الحد ونطرح منه مجموع الحدود السابقة له

فمثلاً: $ح_{8} = جـ_{8} - جـ_{7}$ ، $ح_{10} = جـ_{10} - جـ_{9}$ أى أن: $ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-1}$

أى أن: الترتيب له أهمية كبرى بينما المجموعة لا يهم ترتيب عناصرها.

(٤) إذا كانت المتتابعة الحسابية تناقصية وحدها الأول موجب فإن أكبر عدد من الحدود يمكن جمعه ليكون المجموع موجبًا هو أكبر عدد صحيح موجب ن يحقق المتباينة $جـ_{ن} > 0$

(٥) إذا كانت المتتابعة الحسابية تزايدية وحدها الأول سالب فإن أقل مجموع لحدود المتتابعة هو مجموع جميع الحدود السالبة ويلزم لإيجاد المجموع معرفة عدد الحدود السالبة.

(٦) لإيجاد عدد حدود متتابعة حسابية بحيث مجموع حدود المتتابعة أكبر من قيمة معينة س نوجد أصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يحقق المتباينة $جـ_{ن} > س$

(٧) عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود الموجبة.

مثال (٤)

فى المتسلسلة الحسابية ٥ + ٨ + ١١ + ... أوجد:

(١) مجموع ٢٠ حدًا الأولى منها.

(٢) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداء من الحد السابع.

(٣) مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{10}$ إلى $ح_{20}$

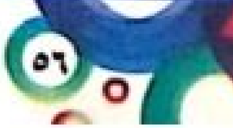
الحل

أ = ٥ ، د = ٨ − ٥ = ٣

(١) $جـ_{ن} = \frac{ن}{2}[2أ + (ن-1)د]$ وبالتعويض عن أ = ٥ ، د = ٣

∴ $جـ_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 5 + (20-1) \times 3]$

∴ $جـ_{20} = 10\,(10 + 19 \times 3) = 10 \times 67 = 670$





② $ح_ن = أ + (ن - ١) ء$ ∴ $ح_٧ = أ + ٦ء = ٥ + ٦ × ٣ = ٢٣$

لإيجاد مجموع ١٠ حدود ابتداء من الحد السابع نضع $ح_٧$ بدلاً من أ في قانون

المجموع $جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٢ ح_٧ + (١٠ - ١) × ٣]$ بالتعويض في صيغة المجموع

$جـ_{١٠} = ٥ × [٢ × ٢٣ + ٢٧] = ٥ × ٧٣ = ٣٦٥$

③ مجموع حدود المتتابعة ابتداء من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$

∵ $ح_ن = أ + (ن - ١) ء$ ∴ $ح_{١٠} = أ + ٩ء = ٥ + ٩ × ٣ = ٣٢$

$ح_{٢٠} = أ + ١٩ء = ٥ + ١٩ × ٣ = ٦٢$

لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدءاً من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$ نضع $ح_{١٠}$ بدلاً من أ في القانون

ونضع $ح_{٢٠}$ بدلاً من ل

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

∴ $جـ_{١١} = \frac{١١}{٢} (ح_{١٠} + ح_{٢٠}) = \frac{١١}{٢} (٣٢ + ٦٢) = ٥١٧$

ملاحظة

يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة بدءاً من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$ عن طريق إيجاد $جـ_{٢٠}$ ونطرح منها $جـ_٩$ فيكون الناتج هو مجموع الحدود من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$

مثال

أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها $ح_١ = ١١$ ، $ح_ن = ٨٧$ ، $جـ_ن = ٩٨٠$

الحل

لاحظ أن: $ح_١$ هو أ ، $ح_ن$ هو ل — أي أن: أ = ١١ ، ل = ٨٧

أولاً: نوجد قيمة ن:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ ∴ $٩٨٠ = \frac{ن}{٢} (١١ + ٨٧)$

$٩٨ × \frac{ن}{٢} = ٩٨٠$ فيكون ن = ٢٠ حداً



ثانيًا : نوجد قيمة د :

$\because$ ل = أ + (ن − ١) د $\qquad$ $\therefore$ ٨٧ = ١١ + ١٩ د

$\therefore$ ١٩ د = ٨٧ − ١١ = ٧٦ $\qquad$ $\therefore$ د = ٤

تكوين المتتابعة $ح_٢$ = ١١ + ٤ = ١٥ ، $ح_٣$ = ١٥ + ٤ = ١٩

المتتابعة الحسابية هى (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ..... ، ٨٧)

مثال ٦

أوجد : $\sum_{ر=٥}^{٢٤}$ (٢ ر − ١)

الحل

عدد حدود المتتابعة = قيمة ر الأخيرة − قيمة ر الأولى + ١ = ٢٤ − ٥ + ١ = ٢٠ حدًا

ونوجد الحد الأول $ح_٥$ ونعوض بها عن أ والحد الأخير $ح_{٢٤}$ ونعوض بها عن ل فى $جـ_ن$

$\because$ $ح_٥$ = ٢ × ٥ − ١ = ٩ ، $ح_{٢٤}$ = ٢ × ٢٤ − ١ = ٤٧

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

$\therefore$ $جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}$ (٩ + ٤٧) = ٥٦٠

مثال ٧

أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية :

(٣ ، ٦ ، ٩ ، .....) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٦٥

الحل

د = ٦ − ٣ = ٣

$\because$ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

$\therefore$ ١٦٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣ + (ن − ١) × ٣] = $\frac{ن}{٢}$ [٦ + ٣ ن − ٣] (بالضرب × ٢)

$\therefore$ ٣٣٠ = ن [٣ ن + ٣] $\qquad$ $\therefore$ ٣ $ن^٢$ + ٣ ن − ٣٣٠ = ٠

$\therefore$ $ن^٢$ + ن − ١١٠ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ (ن + ١١) (ن − ١٠) = ٠

$\therefore$ ن = −١١ مرفوض أ، ن = ١٠

$\therefore$ عدد الحدود التى يجب أخذها ليكون المجموع ١٦٥ هى ١٠ حدود





مثال ٨

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتابعة الحسابية (٧١ ، ٦٨ ، ٦٥ ، ....) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا ثم **أوجد** أكبر مجموع لهذه المتتابعة

الحل

لإيجاد أصغر عدد من الحدود ليكون المجموع سالبًا نفرض أن $حـ_ن < ٠$

$\because ء = ٦٨ - ٧١ = -٣$ ، $\because حـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١) ء]$

$\therefore \frac{ن}{٢}[٢ \times ٧١ + (ن - ١) \times -٣] < ٠$ ، $\because \frac{ن}{٢}$ موجبة دائمًا

$\therefore ١٤٢ - ٣ن + ٣ < ٠$ ، $\therefore ١٤٥ < ٣ن$

$\therefore ن > ٤٨\frac{١}{٣}$ ، $\therefore ن = ٤٩$

$\therefore$ أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها ليكون مجموع المتتابعة سالبًا هو ٤٩ حدًا ، أكبر مجموع لهذه المتتابعة هو مجموع الحدود الموجبة ولإيجاد مجموع الحدود الموجبة يلزم معرفة آخر حد موجب فى هذه المتتابعة.

$\therefore$ نفرض أن $ع_ن > ٠$ ، $\therefore أ + (ن - ١) ء > ٠$

$٧١ + (ن - ١) \times -٣ > ٠$ ، $٧١ - ٣ن + ٣ > ٠$

$\therefore ٧٤ > ٣ن$ ، $\therefore ن < \frac{٧٤}{٣}$ ، $\therefore ن < ٢٤\frac{٢}{٣}$ ، $\therefore ن = ٢٤$

$\therefore$ عدد الحدود الموجبة = ٢٤ حدًا

$$حـ_{٢٤} = \frac{٢٤}{٢}[٢ \times ٧١ + ٢٣ \times -٣] = ٨٧٦$$

مثال ٩

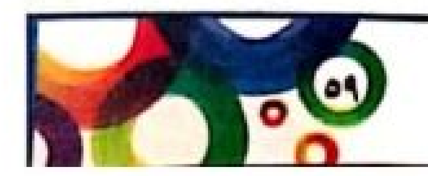
أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوى ٧٧ ومجموع السبعة حدود التالية لها يساوى ٢٢٤

الحل

$\because حـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١) ء]$ ، $\therefore ٧٧ = \frac{٧}{٢}[٢أ + ٦ء]$

$\therefore ١١ = أ + ٣ء \leftarrow (١)$

الحدود السبعة التالية تبدأ من $ع_٨$ ، $\therefore ٢٤٤ = \frac{٧}{٢}[٢ع_٨ + ٦ء]$



∴ ٢٢٤ = $\frac{٧}{٢}$ [٢(أ + ٧ء) + ٦ء]

∴ أ + ١٠ء = ٣٢ ← ②

∴ ء = ٣ ، أ = ٢

∴ ٢٢٤ = ٧[أ + ٧ء + ٣ء]

بطرح ① من ② :

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....)

حل آخر :

يمكن إعتبار مجموع السبعة حدود الأولى ٧٧ ومجموع الأربعة عشر حدًا الأولى ٣٠١ لكى يكون الحد الأول واحدًا فى الحالتين ونوجد $ج_{٧}$ ، $ج_{١٤}$ ونحل المعادلتين بنفس الطريقة السابقة.

مثال ١٠

إذا كان مجموع ن حدًا من حدود متتابعة حسابية يعطى بالقانون $ج_{ن}$ = ن (ن + ١)
فأوجد المتتابعة وحدها الثانى عشر.

الحل

عندما ن = ١ ∴ $ج_{١}$ = ١ (١ + ١) = ٢ ∴ $ح_{١}$ = ٢

عندما ن = ٢ ∴ $ج_{٢}$ = ٢ (٢ + ١) = ٦ ∴ $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ = ٦ ∴ $ح_{٢}$ = ٤

عندما ن = ٣ ∴ $ج_{٣}$ = ٣ (٣ + ١) = ١٢ ∴ $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ + $ح_{٣}$ = ١٢ ∴ $ح_{٣}$ = ٦

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٤ ، ٦ ، ....) ∴ $ح_{١٢}$ = أ + ١١ء = ٢ + ١١ × ٢ = ٢٤

مثال ١١

متتابعة حسابية فيها حدها الرابع ينقص عن العدد ٤٢ بمقدار حدها الثانى وحاصل ضرب حديها الثالث والخامس يساوى ٣١٥ أوجد :

① المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى.

② عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر.

الحل

① ٤٢ - $ح_{٤}$ = $ح_{٢}$ ∴ $ح_{٢}$ + $ح_{٤}$ = ٤٢

∴ أ + ء + أ + ٣ء = ٤٢ ∴ ٢أ + ٤ء = ٤٢

∴ أ + ٢ء = ٢١ ← ①



$ح_3 \times ح_5 = ٣١٥$ $\therefore (أ + ٢ء)(أ + ٤ء) = ٣١٥ \leftarrow$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢):

$\therefore (٢١)(٢١ + ٢ء) = ٣١٥$ $\therefore ٢١ + ٢ء = ١٥$

$\therefore ٢ء = -٦$ $\therefore ء = -٣$ $\therefore أ = ٢٧$

$\therefore$ المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١، ....)

$$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢ \times ٢٧ + ١٩ \times (-٣)] = -٣٠$$

(٢) نفرض أن $ح_ن$ = صفر $\therefore \frac{ن}{٢}[٢ \times ٢٧ + (ن - ١) \times -٣] = ٠$

$\therefore ٥٤ - ٣ن + ٣ = ٠$ $\therefore ٥٧ = ٣ن$ $\therefore ن = ١٩$

مثال (١٢)

متتابعة حسابية مكونة من ١٥ حد ، وحدها الأوسط = ١٨ ، والنسبة بين مجموع الحدود السابقة لهذا الحد إلى مجموع الحدود التالية له هى ٥ : ١٣ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

ن = ١٥

$ح_1$ .... $ح_7$ | $ح_8$ (الحد الأوسط) | $ح_9$ .... $ح_{15}$ (٥ ، ١٣)

ترتيب الحد الأوسط = $\frac{١٥ + ١}{٢} = ٨$ $\therefore$ الحد الأوسط هو $ح_8$

$\therefore أ + ٧ء = ١٨ \leftarrow$ (١)

لاحظ أن
الحدود التالية للحد الثامن تبدأ بـ $ح_9$

$$\frac{\text{مجموع الحدود السابقة لـ } ح_8}{\text{مجموع الحدود التالية لـ } ح_8} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\therefore \frac{\frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]}{\frac{ن}{٢}(٢ح_9 + (ن - ١)ء)} = \frac{٥}{١٣}$$ $$\therefore \frac{٢أ + ٦ء}{٢[أ + ٨ء] + ٦ء} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\therefore \frac{أ + ٣ء}{أ + ٨ء + ٣ء} = \frac{٥}{١٣}$$ $$\therefore \frac{أ + ٣ء}{أ + ١١ء} = \frac{٥}{١٣}$$

$\therefore ٥أ + ٥٥ء = ١٣أ + ٣٩ء$ $\therefore ١٦ء = ٨أ$

$\therefore أ = ٢ء \leftarrow$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢): $\therefore ء = ٢ ، أ = ٤$

$ح_{15} = أ + ١٤ء = ٤ + ١٤ \times ٢ = ٣٢$ $\therefore$ المتتابعة هى (٤، ٦، ٨، .....، ٣٢)

مثال (١٢)

بدأ موظف حياته العملية براتب سنوى قدره ٣٠٠٠ جنيهًا وأخذ يتقاضى علاوة ثابتة قدرها ١٠٠ جنيهًا ، بعد كم سنة يصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيه سنويًا ثم أوجد مجموع المبالغ التى تقاضاها خلال تلك الفترة.

الحل

أ = ٣٠٠٠ ، ء = ١٠٠

∴ $ح_ن$ = (٣٠٠٠ ، ٣١٠٠ ، ٣٢٠٠ ، ....) وهى متتابعة حسابية

∵ $ح_ن$ = أ + (ن − ١) × ء

∴ ٤٤٠٠ = ٣٠٠٠ + (ن − ١) × ١٠٠ ⇐ ٤٤٠٠ − ٣٠٠٠ = ١٠٠ ن − ١٠٠

∴ ١٠٠ ن = ١٥٠٠ ∴ ن = $\frac{١٥٠٠}{١٠٠}$

∴ ن = ١٥

∴ بعد ١٥ سنة يصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيه

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ $جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ [٢ × ٣٠٠٠ + ١٤ × ١٠٠] = ٥٥٥٠٠

∴ مجموع المبالغ التى يتقاضاها خلال تلك الفترة = ٥٥٥٠٠ جنيهًا





على المتسلسلات الحسابية





اختبار تراكمى ٣



الدرجة النهائية $\frac{......}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان الوسط الحسابى للعددين س ، ١٦ هو ٣ فإن س = ...

[−١٠ أو ٣ أو ١٦ أو ٦]

② إذا كان $ح_ن$ = ١٥ − ٣ ن فإن أول حد سالب فى المتتابعة هو ....

[$ح_٣$ أو $ح_٥$ أو $ح_٦$ أو $ح_{١٠}$]

③ إذا كانت أ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية للمقدار (أ + ب) يساوى ....

[٢٤ أو ٦ أو ١٢ أو ٤٨]

④ الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ....

[٥ أو ١٠ أو ٢٠ أو ٢٥]

---

⑤ إذا كان ٢ س + ٢ ، ٦ س − ٢ ، ٧ س ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمة س

....

....

---

⑥ إذا كان مجموع الحدين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ٢ وكان مجموع الحدود السادس والسابع والثامن يساوى −٤٥ فأوجد المتتابعة

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل هو ....

[$\frac{ن}{٢}$ (أ − ل) ، ٦ن (أ + ل) ، $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ، ٢ن (أ + ل)]

② مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء هو ....

[$\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء] ، ن [٢أ + (ن − ١) ء] ،
٢ن [٢أ + (ن − ١) ء] ، $\frac{ن}{٢}$ [أ + (ن − ١) ء]]

③ مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى ....

[٤٥ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ١٠٠]

④ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التى تبدأ بالعدد ١ وتنتهى بالعدد ٢٠ يساوى ....

[٥٠ ، ١١٠ ، ٢١٠ ، ٢٠٠]

⑤ مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ هو ....

[٤٥ ، ٨٠ ، ٧٠ ، ٩٠]

⑥ $\sum_{ك=١}^{٥}$ (٢ك + ١) = ...

[٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٠]

⑦ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوى ....

[٥٠ ، ١١٠ ، ٢١٠ ، ٢٠٠]

⑧ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ تساوى ....

[٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٧٢٩]

---

٣ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ر − ١) يساوى ....

[٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠]

② قيمة المتسلسلة ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن − ١ بإستخدام رمز التجميع هى ....

[$\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر − ١) ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر + ١) ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر − ١) ، $\sum_{ر=١}^{٥ن-١}$ (٣ر + ١)]





③ قيمة المتسلسة ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ بإستخدام رمز التجميع هى ....

[$\sum_{ر=١}^{٤} (٥ر+٢)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ر+٣)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ر+١)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر+٤)$]

④ تكتب المتسلسلة الحسابية ٣ + ٧ + ١١ + ... + ٣٥ بإستخدام رمز المجموع كالآتى :

[$\sum_{ر=١}^{٩} (٤ر-١)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٩} (٢ر-١)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر-٤)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٨} (٣ر-٤)$]

⑤ مجموع حدود المتتابعة الحسابية (-١٢ ، -٨ ، -٤ ، .... ، ١٢) يعطى عددًا ....

[صحيحًا موجبًا أ، صحيحًا سالبًا أ، صفر أ، غير حقيقى]

⑥ مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، .... ، -٢٤) يساوى ....

[صفر أ، ٢٤ أ، ١٦ أ، ٤٨]

---

٤ ① أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) [١٢٠]

② أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، .... ، ٨٠) [١١٠٧]

③ أوجد مجموع المتسلسلة ٩ + ١٢ + ١٥ + ... + ١٠٢ [١٧٧٦]

---

٥ أوجد مجموع ثلاثون حدًا الأولى من المتتابعة $ح_ن$ حيث $ح_ن = ٢ن + ٣$ [١٠٢٠]

---

٦ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٩ = ١٦$ ، $ح_{٢٠} = -٢٦$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها. [(٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ....) ، ٥٠]

---

٧ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٢ + ح_٣ = ١٢$ ، $ح_{١٠} = ٢١$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها [(٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) ، $جـ_{٢٠} = ٤٤٠$]

---

٨ أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ....) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٤٠٠ [٢٠ حدًا]

ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٩ فى المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....) أوجد :

① مجموع ١٥ حدًا الأولى منها.

② مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلي الحد الخامس عشر.

③ عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول. [٤٥٠ ، ٣٩٦ ، ٢٠ حدًا]





١٠ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، .....) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع.

[ن = ١٩ حدًا]

١١ أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، .....) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.

[ن = ٢٤ حدًا]

١٢ أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، .....) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا.

[ن = ١٣ حدًا]

١٣ أوجد مجموع جميع الحدود الموجبة من المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٣٫٥ ، ٣٢ ، .....) [٤٢٦]

١٤ أوجد $ع_{١٥}$ من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، .....) ثم أوجد كم حدًا يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من $ع_{١٥}$ ليكون المجموع -١٩٥

[$ع_{١٥}$ = -٣١ ، ن = ٥]

١٥ في المتتابعة $ع_ن$ = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، .....) أوجد :

(١) رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

(٢) عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر من الصفر.

[$ع_{١٠}$ = -٤ ، ن = ١٦ حدًا]

١٦ في المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، .....) أوجد :

(١) أكبر مجموع للمتتابعة.

(٢) عدد الحدود التي مجموعها = ١٢٠ ابتداء من الحد الأول « فسر وجود جوابين »

[$ح_{١٣}$ = ١٦٩ ، ن = ٦ أو ٢٠]

١٧ ($ع_ن$) متتابعة حسابية حدها الثاني = ١٣ ومجموع العشرة حدود الأولى منها ٢٣٥ أوجد المتتابعة

[(١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، .....)]

١٨ متتابعة حسابية مجموع ن حدًا الأولى منها = ٩٦٠٠ وحدها الأول = ١٠٠ وأساسها = ٤٠ أوجد عدد حدودها.

[٢٠]

١٩ متتابعة حسابية حدها الأول يساوي ١٢ وحدها الأخير يساوي -٢٦ ومجموع حدودها يساوي -١٤٠ أوجد المتتابعة.

[(١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ..... ، -٢٦)]

٢٠ أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها :

(١) $ع_١$ = ٢٣ ، $ع_ن$ = ٨٦ ، $ح_ن$ = ٥٤٥ [(٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ..... ، ٨٦)]

(٢) $ع_١$ = ١٧ ، $ع_ن$ = -٩٥ ، $ح_ن$ = -٥٨٥ [(١٧ ، ٩ ، ١ ، ..... ، -٩٥)]





٢١ متتابعة حسابية حدها الثانى يساوى ١٢ وحدها قبل الأخير يساوى ٤٨ ومجموع حدودها يساوى ٤٥٠ أوجد عدد حدودها. [١٥]

٢٢ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٣ - ح_١ = ٤$ ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها يساوى صفرًا أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من هذه المتتابعة بدءًا من حدها الأول ليكون مجموعها ٣٢٠ [(-٣، -١، ١، .....)، ٢٠]

٢٣ مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد عن حدها السادس بمقدار ٥ أوجد المتتابعة. [(٥، ٩، ١٣، .....)]

٢٤ متتابعة حسابية متناقصة مجموع حديها الرابع والخامس = ١٣ وحاصل ضربهما = ٤٠ أوجد المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها. [(١٧، ١٤، ١١، .....)، $ح_{١٢}$ = ٦]

٢٥ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتابعة حسابية تزايدية يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها. [(٣، ٦، ٩، .....)، ٦٣٠]

٢٦ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٢ = ٩١$ ، $ح_٥ = ٦٤$ أوجد المتتابعة ثم أوجد كم حدًا يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول يكون مجموعها أكبر ما يمكن وأوجد هذا المجموع. [(١٠٠، ٩١، ٨٢، .....)، $جـ_{١٢}$ = ٦٠٦]

٢٧ متتابعة حسابية أساسها ٤ ومجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوى صفر أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد تزيد قيمته عن ١٢٢ فى هذه المتتابعة. [(-٨، -٤، ٠، .....)، ن = ٣٤]

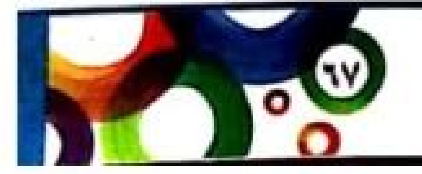
٢٨ فى المتتابعة الحسابية (١٨، ١٥، ١٢، .....) أوجد الحد الذى نبدأ به ليكون مجموع عشرة حدود منها مساويًا (-٧٥) [$ح_٥$]

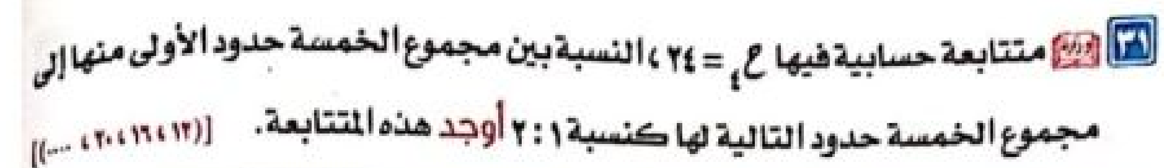
٢٩ متتابعة حسابية تتكون من ٢١ حدًا مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوى ٩١ ومجموع السبعة حدود الأخيرة منها يساوى ٣٨٥ أوجد المتتابعة [(٤، ٧، ١٠، .....، ٦٤)]

٣٠ إذا كان مجموع ن حدًا من متتابعة حسابية يتعين بالقانون $جـ_ن = ٢ن (٧ - ن)$ فأوجد :

① $ح_٧$ [-١٢]

② عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا -٢٤٠ [١٥ حدًا]





٣١ متتابعة حسابية فيها $ح_٤ = ٢٤$ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ أوجد هذه المتتابعة. [(١٢، ١٦، ٢٠، ...)]

٣٢ متتابعة حسابية فيها $ح_{٣٦} = ٠$. إذا كان مجموع ن حدًا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها أوجد قيمة ن [٦٠ أو ١١]

٣٣ إذا كان $جـ_ن$ هو مجموع ن حدًا الأول من المتتابعة الحسابية ($ح_ن$)

وكان $جـ_٩ - جـ_٦ = ٦٩$ فأوجد $ح_٨$ ، $جـ_{١٥}$ [٢٣، ٣٤٥]

٣٤ متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ أوجد حدها الأول وأساسها ثم أوجد كم حدًا يمكن أخذها من المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليتلاشى المجموع [٣٠، -١٩٤٤]

٣٥ إذا أُدخل ن وسطًا حسابيًا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$ فما عدد الأوساط وما مجموع المتتابعة. [١٤ وسط، ٢٥٦]

٣٦ متتابعة حسابية مجموع الحدود الثانى والرابع والخامس منها يساوى ١٨ ومجموع الثلاثة عشر حدًا الأولى منها يساوى ١٣ ، أوجد أول حد سالب فى هذه المتتابعة ثم أوجد أول حد من حدود هذه المتتابعة يجعل مجموعها ابتداء من الحد الأول سالبًا. [$ح_٨$، $ح_{١٠}$]

٣٧ ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢٤ وإذا طرح من الحد الأوسط ٢ كونت مقلوباتها عندئذ متتابعة حسابية فما هى هذه الأعداد ؟ [٤، ٨، ١٢]

٣٨ أسندت أحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها وحددت موعدًا لاستلام المبنى وكان من بين شروط التعاقد أنه فى حالة التأخير عن الموعد أن يدفع المسئول ١٠٠٠ جنيه غرامة عن اليوم الأول وتزداد ١٠٠ جنيه عن كل يوم تال له فإذا تأخر المقاول عن تسليم هذه الأعمال خمسة أيام فكم يكون إجمالى المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير ؟ [٦٠٠٠]





رابعا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢٩ ، س ، ..... ، ٣ س ، ٩٥) يساوى ....

[٢٠١٦ أو ٢١٠٨ أو ٢٠٧٩ أو ٩٧٠٢]

② إذا كان مجموع ن حدًا من حدود المتتابعة (٣ − ٢ ن) يساوى −٣٦٠

فإن ن = ... [٤٠ أو ٩ أو ١٨ أو ٢٠]

③ متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = ن^{٢} − ٢ ن

فإن حدها الخامس = ... [١٥ أو ٣٥ أو ١٠ أو ٧]

④ إذا كان مجموع ن حدًا من متتابعة حسابية يتعين من القانون جـ$_{ن}$ = ن (٢ ن + ١)

فإن حدها العام ح$_{ن}$ = ...

[١ − ٤ ن أو ٤ ن − ١ أو ن − ٤ أو ٤ − ن]

⑤ متتابعة حسابية حدودها موجبة فيها ح$_{٣}$ = (ح$_{١}$)^{٣} ، وإذا أضيف الواحد صحيح إلى كل حد من حدود هذه المتتابعة أصبح الحد الثالث فى المتتابعة الجديدة

ح$'_{٣}$ = (ح$'_{١}$)^{٢} فإن حدها الأول = ... [٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥]

⑥ متتابعة حسابية حدها النونى ح$_{ن}$ = ن ، ح$_{٢ن}$ = −٢ ن ، جـ$_{٢ن}$ الأولى = −٦٠

فإن ن = ... [٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦]

⑦ إذا كان جـ$_{١}$ هو مجموع م من الأوساط الحسابية أدخلت بين العددين أ ، ب ، جـ$_{٢}$ هو مجموع ن من الأوساط الحسابية أدخلت بين أ ، ب

فإن جـ$_{١}$: جـ$_{٢}$ = ... [٢ م : ن أو ن : ٢ م أو ٣ ن : م أو م : ن]

⑧ متتابعة حسابية (٢ ك + ١ ، ٢ ك + ٣ ، ٢ ك + ٥ ، ...) وكان جـ$_{ن}$ الأولى = ن^{٣}

فإن ك = ...

[$\frac{١}{٢}$(ن^{٢} − ن) أو ن^{٢} − ن أو $\frac{١}{٢}$(ن − ن^{٢}) أو (ن − ن^{٢})]

⑨ إذا كانت النسبة بين مجموع حدود عددها ن من متتابعتين حسابيتين كنسبة

(٣ ن + ١) : (٢ ن + ٤) فإن $\frac{\text{ح}_{١٢}\ \text{من الأولى}}{\text{ح}_{١٢}\ \text{من الثانية}}$

[$\frac{٧}{٥}$ أو $\frac{٥}{٧}$ أو $\frac{٣٦}{٢٥}$ أو $\frac{٣٥}{٢٤}$]



(١٠) متتابعة حسابية عدد حدودها ٣ ن حدًا ومجموع حدودها = جـ فإذا كان مجموع ن حدا الأولى = س ، مجموع ن حدًا التالية = ص ، ومجموع ن حد الأخيرة = ع

فإن جـ = ... [س + ع أ ٣ ص أ ٣ ع أ ٢ س]

(١١) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتناسب مع $ن^{٢}$ فإن حدها العام $ع_{ن}$ يتناسب مع .... [٣ ن أ $\frac{١}{٢}$ ن أ ن − ١ أ ٢ ن − ١]

(١٢) متتابعة حسابية فيها $جـ_{ن}$ ابتداء من حدها الأولى = ٢ ن ، $جـ_{٢ن}$ ابتداء من حدها الأول = ن فإن $جـ_{٤ن}$ ابتداء من حدها الأول = ...

[− ١٠ ن أ ١٠ ن أ ٥ ن أ −٥ ن]

(١٣) متتابعة حسابية فيها $ع_{٨}$ = ن (عدد الحدود للمتتابعة) ، $جـ_{ن}$ = $ن^{٢}$ فإن ن = ...

[١١ أ ١٢ أ ١٤ أ ١٥]

(١٤) متتابعة حسابية مجموع حدودها ٩٣٠ ، وحداها الأوسطان ٢٢,٥ ، ٢٤ حيث عدد حدودها زوجى فإن حدها الأخير = ... [٥٢ أ ٥٢,٥ أ ٥٣ أ ٥٣,٥]

٤٠ كم حدًا يلزم أخذه إبتداء من الحد الأول من المتتابعة ($ع_{ن}$) حيث $ع_{ن}$ = ٢ ن + ٣ حتى تكون النسبة بين مجموع الثلث الأول من هذه الحدود إلى مجموع باقى الحدود كنسبة ٧ : ٥١

[ن = ٣٠]

٤١ كم حدًا يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول للمتتابعة ($ع_{ن}$) = (٤ ن + ٢) حتى يكون مجموع الثلث الأخير منها يساوى أربعة أمثال مجموع الثلث الأول ؟

[١٨]

٤٢ اثبت أن (لو س $ص^{ن - ١}$) متتابعة حسابية حيث ص عدد صحيح موجب وإذا كانت س = ١٦٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$ فأوجد مجموع الحدود التسعة الأولى من هذه المتتابعة بدون إستخدام الآلة الحاسبة.

[٩]

٤٣ يودع رجل مبلغ ثابت فى بداية كل شهر فى بنك يعطى فائدة بسيطة قدرها ١٠٪ فى السنة وفى نهاية العام حسب له البنك الفوائد فكانت ١١٧ جنيهًا فكم المبلغ الذى كان يودعه الرجل شهريًا.

[١٨٠]





٤٤ أوجد مجموع الـ ٢٥ حدًا الأولى من المتتابعة (ح ن) حيث :

ح ن = { ٢ ن + ٣ عندما تكون ن عددًا فرديًا
 { ٣ ن + ٢ عندما تكون ن عددًا زوجيًا

[٨٦٩]

---

٤٥ إذا كان الحد النونى لمتتابعة يعطى بالقانون :

ح ن = { ٢ ن + ٣ عندما تكون ن عددًا فرديًا
 { ٣ ن - ٢ عندما تكون ن عددًا زوجيًا

أوجد عدد الحدود التى يمكن أخذها من هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول بحيث يكون مجموعها مساويًا ٢٧٣ ثم عين مجموع كل من الحدود الفردية الرتبة والحدود الزوجية الرتبة علمًا بأن عدد الحدود زوجي.

[١٤، ١١٩، ١٥٤]

---

٤٦ إذا كونت (أ + ب ، ٥ ب - أ ، ٣ أ + ب ، ....) متتابعة حسابية وكونت (أ٢ ، ب٢ ، ٢ ب - أ ، ....) متتابعة حسابية أيضًا فأوجد كلاً من المتتابعتين ثم أوجد قيمة ن التى تجعل النسبة بين مجموع ن من حدود المتتابعة الأولى إلى مجموع ن من حدود المتتابعة الثانية كنسبة -٥٠ : ٣١

[(٧، ١١، ١٥، ....)، (١٦، ٩، ٢، ....)، ١٠]

---

٤٧ الحد الثامن فى متتابعة حسابية يساوى عدد حدودها فإذا علم أن مجموع حدود هذه المتتابعة يساوى مربع عدد حدودها أوجد عدد حدود هذه المتتابعة وحدها الأوسط. [١٥، ١٥]

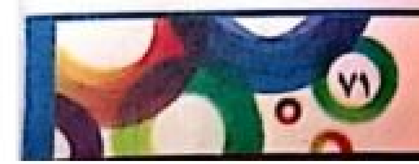
---

٤٨ متتابعة حسابية عدد حدودها زوجى فإذا كان مجموع حدودها الفردية الرتبة يساوى ٢٤ ومجموع حدودها الزوجية الرتبة يساوى ٣٠ وحدها الأخير يزيد عن حدها الأول بمقدار ١٠,٥ أوجد عدد حدود هذه المتتابعة.

[٨]

---

٤٩ متتابعة حسابية حدها السادس والثلاثون يساوى صفرًا ، إذا كان مجموع ن حدًا الأولى منها يساوى ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها فأوجد ن ومن ثم أستنتج مجموع ٤٩ حدًا من هذه المتتابعة الحسابية ابتداء من حدها الثانى عشر. [١١، ٦٠، صفر]



الدرس ٥
المتتابعة الهندسية

لاحظنا فى المتتابعة الحسابية أن كل حد يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثابت مثل المتتابعة (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) وإذا طرحنا أى حد - الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت هو أساس المتتابعة ، والآن سوف ندرس نوع آخر من المتتابعات مثل المتتابعة (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) ونلاحظ فيها أن كل حد ينتج من حاصل ضرب الحد السابق له فى ٢ (أى فى مقدار ثابت) وأنه عند قسمة أى حد على الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت فنلاحظ فى هذه المتتابعة أن:

$$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٢}{١} = ٢ \text{ ، } \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

وهكذا ....

وفى هذه الحالة تسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية ويمكن تعريفها كما يلى :

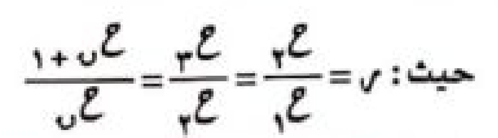
تعريف

تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان :

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = مقدار ثابت لكل $ن \in ص^+$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز ر





حيث : $ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$

أى أن : $ر$ (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فى المتتابعة}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال (١)

أكتب الأربعة حدود الأولى للمتتابعة ($ح_ن$) فيما يأتى ثم بين أيهما يكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها :

① $(ح_ن) = (٣ \times ٢^ن)$ ② $(ح_ن) = (٥ ن^٢)$

③ $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ١٢$ ، $ح_ن = \frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$)

الحل

① لإيجاد الحد الأول نضع $ن = ١$ ∴ $ح_١ = ٣ \times ٢^١ = ٦$

لإيجاد الحد الثانى نضع $ن = ٢$ ∴ $ح_٢ = ٣ \times ٢^٢ = ١٢$

لإيجاد الحد الثالث نضع $ن = ٣$ ∴ $ح_٣ = ٣ \times ٢^٣ = ٢٤$

لإيجاد الحد الرابع نضع $ن = ٤$ ∴ $ح_٤ = ٣ \times ٢^٤ = ٤٨$

∴ الحدورد الأربعة الأولى هى ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨

ولمعرفة ما إذا كانت المتتابعة هندسية أم لا نوجد النسبة $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ فإذا كانت = مقدار ثابت تكون المتتابعة هندسية وإذا كانت = مقدار متغير يعتمد على ن فإن المتتابعة ليست هندسية

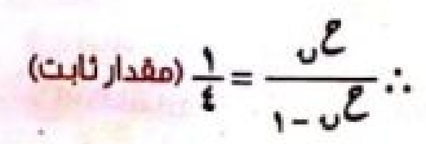
∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ \times ٢^{ن+١}}{٣ \times ٢^ن} = ٢$ = مقدار ثابت ∴ المتتابعة هندسية

② بنفس الطريقة السابقة نجد الحدود الأربعة الأولى هى ٥ ، ٢٠ ، ٤٥ ، ٨٠

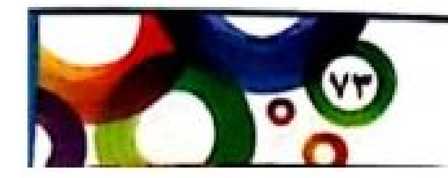
∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥(ن+١)^٢}{٥ ن^٢} = \frac{(ن+١)^٢}{ن^٢}$ = مقدار متغير يعتمد على ن

∴ المتتابعة ليست هندسية

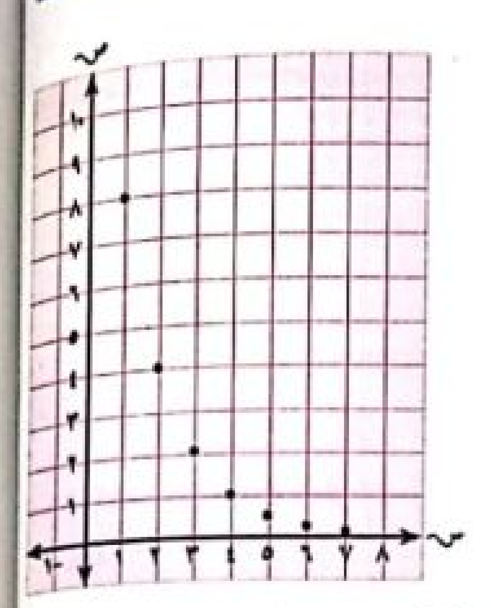
③ ∵ $ح_ن = \frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}$ (حيث $ن > ١$) ∴ $\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ (مقدار ثابت)



∴ المتتابعة هندسية وأساسها $ر = \frac{١}{٤}$



التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية



لتمثيل متتابعة هندسية مثل (٨، ٤، ٢، .....)

فإننا نلاحظ أن :

مجال المتتابعة هو {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ...}

ومدى المتتابعة هو $\{٨، ٤، ٢، ١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، ...\}$

وتكون الأزواج المرتبة الممثلة للمتتابعة هى :

{(١، ٨)، (٢، ٤)، (٣، ٢)، ...}

ونلاحظ من الشكل البيانى أن :

حدود المتتابعة متناقصة حيث أ > ٠، ٠ < ر < ١

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية وليس دالة من الدرجة الأولى كما فى المتتابعة الحسابية.

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الهندسية يمكن أن تكون تزايدية أو تناقصية أو متناوبة الإشارة تبعًا للحالات الآتية :

١) إذا كان أ موجب ، ر > ١ فإن المتتابعة تزايدية

فمثلاً المتتابعة (١، ٢، ٤، ٨، .....)

حدها الأول أ = ١ (عدد موجب) وأساسها ر = ٢ (عدد موجب) لذلك فإن المتتابعة تزايدية

٢) إذا كان أ موجب ، ٠ < ر < ١ فإن المتتابعة تناقصية

فمثلاً المتتابعة $(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}، .....)$

حدها الأول أ = ١ (عدد موجب) وأساسها ر = $\frac{١}{٢}$ (كسر موجب) لذلك فإن المتتابعة تناقصية

٣) إذا كان أ موجب ، ر عدد سالب فإن المتتابعة متناوبة الإشارة

٤) إذا كان أ سالبة ، ر > ١ فإن المتتابعة تناقصية

٥) إذا كان أ سالبة ، ٠ < ر < ١ فإن المتتابعة تزايدية

٦) إذا كان أ سالبة ، ر عدد سالب فإن المتتابعة متناوبة الإشارة

ملاحظات هامة

١) أساس المتتابعة الهندسية لا يساوى صفر

٢) إذا كان الأساس مساويًا للواحد الصحيح فإن المتتابعة تكون ثابتة مثل المتتابعة (٧، ٧، ٧، ٧، .....)





الحد النونى (العام) للمتتابعة الهندسية

إذا كان الحد الأول فى متتابعة هندسية هو ا والأساس = ر فإن :

$ح_١ = ا$ ، $ح_٢ = ا ر$ ، $ح_٣ = ا ر^٢$ ، $ح_٤ = ا ر^٣$

نلاحظ أن : أس ر يقل بمقدار الوحدة عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

أى أن : $ح_{٢٠} = ا ر^{١٩}$ ، $ح_{٤٥} = ا ر^{٤٤}$ وهكذا وبالإستمرار على هذا النمط نجد أن

الحد النونى لهذه المتتابعة هو $ح_ن = ا ر^{ن - ١}$

ملاحظة

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعدد حدودها = ن فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث $ل = ا ر^{ن - ١}$ وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية فى هذه الحالة على الصورة ا ، ا ر ، ا $ر^٢$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل

ونلاحظ أن : أى حد فى هذه المتتابعة = قيمة الحد السابق له مباشرة × الأساس

أى أن الحد النونى (العام) للمتتابعة الهندسية هو :

$ح_ن = ا ر^{ن - ١}$ أو $ل = ا ر^{ن - ١}$ لكل ن ∈ $ص^+$

حيث $ح_ن$ الحد النونى (الحد العام) ، ل الحد الأخير ، ا الحد الأول ، ن عدد حدود المتتابعة (رتبة الحد) ، ر أساس المتتابعة.

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متتابعة هندسية

لكتابة المتتابعة الهندسية التى فيها ا = ٥ ، ر = ٢ مثلاً نتبع الآتى :

نكتب قيمة ا (العدد ٥) ثم نضغط علامة [=] ثم نضغط على المفتاح [×] ونضع قيمة ر (العدد ٢) ثم نضغط علامة [=] فتعطى الحد الثانى للمتتابعة وبتكرار الضغط على علامة [=] تعطى الحدود التالية وهكذا ....



مثال (٢)

بين أن المتتابعة $(١٢ ، -٦ ، ٣ ، \frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، ....)$ متتابعة هندسية ثم أوجد ، $ح_٧$ ، $ح_{١٠}$

الحل

$\because \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{-٦}{١٢} = \frac{-١}{٢} ، \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٣}{-٦} = \frac{-١}{٢}$ $\therefore$ المتتابعة هندسية

$$ح_٧ = أ ر^٦ = ١٢ \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^٦ = \frac{١٢}{٦٤} = \frac{٣}{١٦}$$

$$ح_{١٠} = أ ر^٩ = ١٢ \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^٩ = \frac{-١٢}{٥١٢} = \frac{-٣}{١٢٨}$$

مثال (٣)

أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثانى ١٠ وحدها الرابع ٤٠

الحل



$ح_٢ = ١٠$ $\therefore أ ر = ١٠$ (١)

$ح_٤ = ٤٠$ $\therefore أ ر^٣ = ٤٠$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : $\therefore \frac{أ ر^٣}{أ ر} = \frac{٤٠}{١٠}$

$\therefore ر^٢ = ٤$ $\therefore ر = \pm ٢$

> إذا كان أس (ر) فرديًا فإننا نحصل على قيمة واحدة للأساس (ر) وإذا كان أس (ر) زوجيًا فإننا نحصل على قيمتين للأساس (ر)

$\therefore$ عندما ر = ٢ يكون أ = ٥ وتكون المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ....)

وعندما ر = -٢ يكون أ = -٥ وتكون المتتابعة هى (-٥ ، ١٠ ، -٢٠ ، ٤٠ ، ....)



متتابعة هندسية حدها الثانى يزيد عن حدها الأول بمقدار ٣ وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد المتتابعة وأوجد رتبة الحد التى قيمته ١٩٢

الحل

$ح_٢ - ح_١ = ٣$ ∴ $أ ر - أ = ٣$ ∴ $أ(ر - ١) = ٣$ ①

$ح_٣ - ح_١ = ٩$ ∴ $أ ر^٢ - أ = ٩$ ∴ $أ(ر^٢ - ١) = ٩$ ②

بقسمة ② على ①: ∴ $\frac{أ(ر^٢ - ١)}{أ(ر - ١)} = \frac{٩}{٣}$

∴ $\frac{أ(ر - ١)(ر + ١)}{أ(ر - ١)} = \frac{٩}{٣}$ ∴ $ر + ١ = ٣$ ∴ $ر = ٢$

وبالتعويض فى المعادلة ①: ∴ $أ(٢ - ١) = ٣$ ∴ $أ = ٣$

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

لإيجاد رتبة الحد الذى قيمته ١٩٢ نعوض فى الحد العام

∵ $ح_ن = أ ر^{ن - ١}$ ∴ $١٩٢ = ٣ \times ٢^{ن - ١}$ ∴ $٢^{ن - ١} = ٦٤$

∴ $٢^{ن - ١} = ٢^٦$ ∴ $ن - ١ = ٦$ ∴ $ن = ٧$

مثال ٥

متتابعة هندسية حدودها موجبة فإذا كان حدها الثالث يزيد عن حدها الخامس بمقدار ٢٠ ومجموع الحدود الثالث والرابع والخامس ٧٦ أوجد المتتابعة

الحل

$ح_٣ - ح_٥ = ٢٠$ ∴ $أ ر^٢ - أ ر^٤ = ٢٠$

∴ $أ ر^٢ (١ - ر^٢) = ٢٠$ ①

$ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ = ٧٦$ ∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ + أ ر^٤ = ٧٦$

∴ $أ ر^٢ (١ + ر + ر^٢) = ٧٦$ ②

بقسمة ② على ① :

$\therefore \frac{\text{ا}\,\text{ر}^{٢}\,(١+\text{ر}+\text{ر}^{٢})}{\text{ا}\,\text{ر}^{٢}\,(١-\text{ر}^{٢})}=\frac{٧٦}{٢٠}$ $\therefore \frac{١+\text{ر}+\text{ر}^{٢}}{١-\text{ر}^{٢}}=\frac{١٩}{٥}$

$\therefore ٥+٥\text{ر}+٥\text{ر}^{٢}=١٩-١٩\text{ر}^{٢}$ $\therefore ٢٤\text{ر}^{٢}+٥\text{ر}-١٤=٠$

$\therefore (٣\text{ر}-٢)\,(٨\text{ر}+٧)=٠$

$\because$ الحدود موجبة $\therefore \text{ر}=\frac{٢}{٣}$

بالتعويض في المعادلة ① :

$\therefore \text{ا}\times\frac{٤}{٩}\times\left(١-\frac{٤}{٩}\right)=٢٠$ $\therefore \text{ا}=٨١$

$\therefore$ المتتابعة هي (٨١ ، ٥٤ ، ٣٦ ، ....)

مثال ٦

إذا كانت (٢٤ ، س ، ص ، ٣ ، ....) متتابعة هندسية

فأوجد قيمة كل من س ، ص وأوجد $\text{ح}_{٧}$

الحل

نفرض أن الأساس = ر

$\therefore$ س = ٢٤ ر ، ص = ٢٤ $\text{ر}^{٢}$ ، ٣ = ٢٤ $\text{ر}^{٣}$

$\therefore \text{ر}^{٣}=\frac{٣}{٢٤}$ $\therefore \text{ر}^{٣}=\frac{١}{٨}$

$\therefore \text{ر}=\frac{١}{٢}$

$\because$ س = ٢٤ ر $\therefore$ س $=٢٤\times\frac{١}{٢}=١٢$

$\because$ ص = ٢٤ $\text{ر}^{٢}$ $\therefore$ ص $=٢٤\times\frac{١}{٤}=٦$

$\text{ح}_{٧}=\text{ا}\,\text{ر}^{٦}=٢٤\times\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}=\frac{٣}{٨}$



مثال ٧

إذا كان الحد الأخير من متتابعة هندسية موجبة = ٢٥٦ ومجموع الثلاث حدود الأخيرة منها = ٤٤٨ فأوجد أساسها ، وإذا كان مجموع الثلاث حدود الأولى منها = ١٤ فأوجد المتتابعة

الحل

∵ الحد الأخير = ٢٥٦

∴ مجموع الثلاث حدود الأخيرة = ٢٥٦ + $\frac{٢٥٦}{ر}$ + $\frac{٢٥٦}{ر^٢}$ = ٤٤٨

∴ $\frac{٢٥٦}{ر^٢}$ (ر^٢ + ر + ١) = ٤٤٨ (بالقسمة على ٦٤)

∴ $\frac{٤}{ر^٢}$ (ر^٢ + ر + ١) = ٧

∴ ٤ ر^٢ + ٤ ر + ٤ = ٧ ر^٢ ∴ ٣ ر^٢ − ٤ ر − ٤ = ٠

∴ (٣ ر + ٢) (ر − ٢) = ٠ ∴ **ر = ٢** أو ر = $\frac{-٢}{٣}$ (مرفوضة)

∵ أ + أ ر + أ ر^٢ = ١٤ ∴ أ (١ + ر + ر^٢) = ١٤

∴ أ (١ + ٢ + ٤) = ١٤ ∴ ٧ أ = ١٤ **∴ أ = ٢**

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٤ ، ٨ ، .... ، ٢٥٦)

تمرين على المتتابعة الهندسية

الأسئلة التي عليها علامة ويع لها نفس فكرة كتاب المدرسة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

إختبار تراكمي ٤

$\frac{١}{٢}$ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية ١٠

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① تسمى المتتابعة التى قاعدتها $ح_ن = ٤ ن + ١$ بأنها متتابعة ....

[تزايدية أ، تناقصية أ، تذبذبية أ، ثابتة]

② تكتب المتسلسلة الحسابية ٣ + ٧ + ١١ + ... + ٣٥ باستخدام رمز المجموع على الصورة ....

[$\sum_{ر=١}^{٨} (٤ ر - ١)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٩} (٤ ر - ١)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ ر - ٤)$ أ، $\sum_{ر=١}^{٨} (٣ ر - ٤)$]

③ إذا كان ٢ أ + ٢ ، ٦ أ - ٢ ، ٧ أ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية

فإن أ = ... [١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤]

④ مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=٣}^{٨} (٢ ر + ١) =$ ....

[٦٤ أ، ٧٢ أ، ٧٦ أ، ٨٠]

---

⑤ فى المتسلسلة الحسابية (٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ...) أوجد :

(أ) مجموع ١٥ حدًا الأولى منها

(ب) مجموع حدود المتسلسلة ابتداء من الحد الخامس إلى الخامس عشر

....

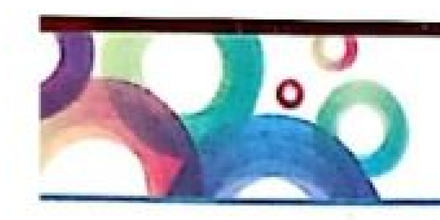
....

---

⑥ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول يساوى ٣ وحدها الأخير يساوى ٣٩ ومجموع ن حدًا الأولى منها يساوى ٢١٠

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ ① فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....) أوجد كل من : ح$_{٦}$ ، ح$_{٩}$ [٩٦ ، ٧٦٨]

② بين أن المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....) متتابعة هندسية وأوجد ح$_{١٠}$ [١٠٢٤]

③ متتابعة هندسية حدها الأول = ٤ وأساسها = ٢

أكتب الخمسة حدود الأولى منها. [(٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤)]

④ متتابعة هندسية أساسها = ٢ وحدها التاسع = ٢٥٦

أوجد المتتابعة وأوجد ح$_{٥}$ ، ح$_{٧}$ [(١ ، ٢ ، ٤ ، ....) ، ١٦ ، ٦٤]

⑤ فى المتتابعة (١٤٤ ، ٧٢ ، ٣٦ ، ....) أوجد : ح$_{٧}$ ، ح$_{٩}$ ، الحد النونى [$\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، ١٤٤ × $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$]

⑥ أوجد عدد حدود المتتابعة (٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ..... ، $\frac{١}{٨}$) [١٣]

⑦ متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ أوجد هذه المتتابعة.

[(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ....)]

⑧ فى المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ....) أوجد : ح$_{٥}$ ، ح$_{١٠}$ [٨١ ، ١٩٦٨٣]

---

٣ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① الحد الخامس من المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٢ × $(٣)^{ن-١}$ يساوى ....

[٦١٢ أ ٢١٦ أ ١٦٢ أ ٨١]

② الحد السابع من المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....) هو ....

[١ أ ٢- أ $\frac{١}{٢}$ أ ١-]

③ الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ....) هو ....

[٣$(-٢)^{ن}$ أ ٣$(-٢)^{ن-١}$ أ ٣$(٢)^{ن}$ أ ٢$(٣)^{ن-١}$]

④ الحد السادس من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) هو ....

[٢٤ أ ٤٨ أ ٦٩ أ ٩٦]

⑤ الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ....) هو ....

[١ أ ٣ أ $\frac{١}{٣}$ أ ٩]



٤ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① الحد التالى فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ....) هو ....

[$\frac{١١}{٨}$ أ $\frac{٢٧}{١٦}$ أ $\frac{٩}{٤}$ أ $\frac{٨١}{٣٢}$]

② جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

[(٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ....) أ (لو أ ، لو $أ^٢$ ، لو $أ^٣$ ، لو $أ^٤$ ، ....) أ

($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$) أ ($\frac{٣ب}{١٢}$ ، ٣ ، $\frac{١٦أ}{ب}$ ، $\frac{١٢أ^٢}{ب^٢}$)]

③ تمثل حدود المتتابعة الهندسية مجموعة من النقط المنفصلة التى تقع على ....

[استقامة واحدة أ منحنى دالة تربيعية أ

منحنى دالة أسية أ منحنى دالة تكعيبية]

④ تسمى المتتابعة ($ح_ن$) هندسية إذا كان .... يساوى مقدار ثابت (لكل ن ∈ $ص^+$)

[$\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}}$ أ $ح_ن - ح_{ن+١}$ أ $ح_{ن+١} - ح_ن$ أ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$]

⑤ المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى ....

[($ح_ن$) = (٤ $ن^٢$) لكل ن ≥ ١ أ ($ح_ن$) = $\frac{١}{٤}$ × $ح_{ن-١}$ لكل ن ≥ ٢ أ

($ح_ن$) = (٢ $ن^٢$ - ١) لكل ن ≥ ١ أ ($ح_ن$) = (لو (٣ × $٢^ن$)) لكل ن ≥ ١]

⑥ تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها ر .... وحدها الأول موجباً.

[∈]-١ ، ٠[أ > ١ أ > صفر أ ∈]٠ ، ١[ ]

ثالثاً مسائل المستوى الثانى

٥ ① بين نوع المتتابعة ($ح_ن$) = ٥ × $٢^ن$ ثم أوجد حدودها الثلاثة الأولى [١٠ ، ٢٠ ، ٤٠]

② أثبت أن المتتابعة ($ح_ن$) = $٢^{ن+١}$ هى متتابعة هندسية وأكتب الأربعة حدود الأولى منها.

[٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢]

③ أثبت أن المتتابعة التى حدها النونى يساوى ٢ × $٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية ثم أوجد حدها السابع [١٨]



٦ (١) أوجد عدد حدود المتتابعة (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...... ، ١٤٥٨) [٧]

(٢) فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ....) أوجد :

(أ) حدها العاشر. (ب) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤ [٦٤ ، $ح_{١١}$]

---

٧ أوجد رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح فى المتتابعة (٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ٨١ ، ....) [ن = ٨]

---

٨ متتابعة هندسية حدها الرابع = ٨ وحدها السابع = ٦٤ أوجد هذه المتتابعة. [(١ ، ٢ ، ٤ ، ....)]

---

٩ متتابعة هندسية فيها $ح_٣$ = ١٢ ، $ح_٨$ = ٣٨٤ أوجد المتتابعة. [(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)]

---

١٠ متتابعة هندسية حدها الثانى $\frac{١}{٤}$ وحدها الخامس $\frac{١}{٣٢}$ أوجد هذه المتتابعة. [($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ....)]

---

١١ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ أوجد هذه المتتابعة. [(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....)]

---

١٢ متتابعة هندسية حدها الأول $\frac{١}{٢}$ وحدها الأخير ٦٤ وعدد حدودها ٨

أوجد المتتابعة. [($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، .... ، ٦٤)]

---

١٣ متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ١٢ ومجموع حديها الثالث والخامس ٣٠

أوجد المتتابعة. [(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ....) ، ($\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ٦ ، ....)]

---

١٤ متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ٦٥ بين أن هناك متتابعتين وأوجدهما. [(٤٥ ، -٦٠ ، ٨٠ ، ....) ، (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ....)]

---

١٥ إذا كان مجموع الحدين الأول والثانى من متتابعة هندسية = ٩ ومجموع الحدين السادس والسابع منها يساوى ٢٨٨ فأوجد المتتابعة. [(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)]

---

١٦ متتابعة هندسية حدها الثالث يزيد عن حدها الثانى بمقدار ١٦ وحدها الثانى يزيد عن حدها الأول بمقدار ٤٨ أوجد المتتابعة. [(-٧٢ ، -٢٤ ، -٨ ، ....)]

---

١٧ متتابعة هندسية أساسها عدد صحيح موجب فيها $ح_١ \times ح_٩ = ١$ ، $ح_{١٠} - ح_٥ = ٣١$

أوجد المتتابعة. [($\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ....) ، ($\frac{-١}{١٦}$ ، $\frac{-١}{٨}$ ، $\frac{-١}{٤}$ ، ....)]



١٨ متتابعة هندسية فيها $ح_٢ = ٥$ ، $\frac{ح_٧}{ح_٤} = \frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة. [(١٥، ٥، $\frac{٥}{٣}$، ....)]

١٩ ($ح_ن$) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٨٠ [(٥، ١٠، ٢٠، ....)، $ح_٥$]

٢٠ ($ح_ن$) متتابعة هندسية فيها $ح_٥ = ٨ ح_٢$ ، $ح_٤ + ح_٦ = ٢٤٠$ أوجد المتتابعة
ثم أوجد : $ح_٩$ ، $ح_{١٥}$ [(٦، ١٢، ٢٤، ....)، ١٥٣٦، ٩٨٣٠٤]

٢١ متتابعة هندسية حدودها موجبة فإذا كان الفرق بين الحدين الثالث والخامس منها ٢٠
ومجموع الحدود الثالث والرابع والخامس ٧٦ فأوجد هذه المتتابعة. [(٨١، ٥٤، ٣٦، ....)]

٢٢ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٤$ يزيد عن $ح_١$ بمقدار ٢١ ، $ح_١$ ينقص
عن $ح_٢$ بمقدار ٣ أوجد المتتابعة. [(٣، ٦، ١٢، ....)]

٢٣ مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية ٢١ ومجموع الثلاثة حدود التالية
لها ١٦٨ أوجد المتتابعة. [(٣، ٦، ١٢، ....)]

٢٤ متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٢ وحاصل ضرب حديها
الأول والرابع يساوى ٢٧ أوجد هذه المتتابعة. [(١، ٣، ٩، ٢٧، ....) أو (٢٧، ٩، ٣، ١، ....)]

٢٥ إذا كونت (ك ، ٢ ك ، ٣ ك + ١) متتابعة هندسية أوجد قيمة ك [١]

٢٦ إذا كانت الكميات س − ٢ ، س + ١ ، س + ٧ هى الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة
هندسية حدودها موجبة فأوجد س ثم أوجد الحد السابع منها. [س = ٥، ١٩٢]

٢٧ موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦٪ زيادة
عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه فى السنة السادسة. [١٦٠٥٫٨٧]

٢٨ ثلاث أعداد تكون متتابعة هندسية بحيث يكون مجموعها = ٢١ وحاصل ضربها يساوى ٦٤
أوجد هذه الأعداد. [١٦، ٤، ١]

٢٩ (٩٦ ، س ، ص ، ع ، ٦ ، ....) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة
أوجد قيم س ، ص ، ع [٤٨، ٢٤، ١٢]





٣٠ متتابعة هندسية النسبة بين مجموع حديها الأول والثالث إلى مجموع حديها الثانى والرابع = ١ : ٢ وحدها السادس = ٣٢ أوجد المتتابعة وحدها التاسع. [(١، ٢، ٤، ....)، ٢٥٦]

---

٣١ الوسط الحسابى بين الحدين الثانى والرابع من متتابعة هندسية يساوى ١٥ وحاصل ضرب حدها الأول فى حدها الخامس يساوى تسعة أمثال حدها الثالث أوجد المتتابعتين.

[(١، ٣، ٩، ....)، (٨١، ٢٧، ٩، ....)]

---

٣٢ ثلاث أعداد تكون متتابعة هندسية بحيث يكون حاصل ضربهم = $\frac{٣٤٣}{٦٤}$

ومجموع مقلوباتها = ٢ فما هى هذه الأعداد ؟ [$\frac{٧}{٢}$، $\frac{٧}{٤}$، $\frac{٧}{٨}$]

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٣٣ متتابعة هندسية متزايدة فيها مجموع الحدين الثانى والثالث يساوى ١٨ ومجموع المعكوس الضربى لكل من الحدين الأول والثانى = $\frac{١}{٢}$ أوجد المتتابعة. [(٣، ٦، ١٢، ....)]

---

٣٤ إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ء ، ....) متتابعة هندسية وكان أ + ب = ٦ ، أ + ء = $٤\frac{١}{٢}$

أوجد المتتابعة وأوجد $ع_{١٠}$ [(٤، ٢، ١، ....)، $ع_{١٠} = \frac{١}{١٢٨}$]

---

٣٥ ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٨ ومجموع مربعاتها ٣٣٦

فما هى هذه الأعداد. [٤، ٨، ١٦]

---

٣٦ أوجد المتتابعة الهندسية التى أساسها $\frac{١}{٣}$ وفيها $ع_{ن} = ٣$ ، $ع_{٢ن-١} = \frac{١}{٩}$ [(٨١، ٢٧، ٩، ....)]

---

٣٧ المتتابعة ($ع_{ن}$) معرفة بحيث $ع_{ن+١} = \frac{١}{٢} ع_{ن}$ فبين نوعها ، وإذا كانت النسبة بين مربع حدها الثانى ومجموع الحدين الثالث والخامس هى ٨ : ٥ فأوجد المتتابعة. [(٢، ١، $\frac{١}{٢}$، ....)]

---

٣٨ متتابعتان هندسيتان الحد الأول فى كل منهما ١٦ ومجموع الثلاثة حدود الأولى منها ٢٨ أوجد هاتين المتتابعتين. [(١٦، ٨، ٤، ....)، (١٦، -٢٤، ٣٦، ....)]

---

٣٩ إذا كونت أ ، ب ، حـ ، ء متتابعة هندسية فأثبت أن أ + ب ، ب + حـ ، حـ + ء تكون أيضًا متتابعة هندسية.





٤٠ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كانت س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، ...)

يساوى ....

[١ أ، ١٥ أ، ٣ أ، ٢٤]

② فى المتتابعة الهندسية (٢٥٦ ، ١٢٨ ، ٦٤ ، ....) فإن رتبة أول حد أصغر من الواحد

الصحيح هو ....

[٨ أ، ٩ أ، ١٠ أ، ١١]

③ فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) قيمة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ يساوى ....

[٣٤٨ أ، ٨٤٣ أ، ٤٣٨ أ، ٣٨٤]

④ متتابعة هندسية أساسها ٢ ، $ع_{ن} = ٢$ ، $ع_{٢ن+١} = ١٢٨$

فإن حدها الأول = ...

[$\frac{١}{٨}$ أ، $\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، ١١]

⑤ متتابعة هندسية فيها $ع_{ر+٥} = م$ ، $ع_{ر-٥} = ن$ فإن $ع_{٥}$ = ...

[$م\left(\frac{م}{ن}\right)^{ر}$ أ، $م\left(\frac{ن}{م}\right)^{\frac{ر}{١٠}}$ أ، $م\left(\frac{ن}{م}\right)^{\frac{ر}{٢}}$ أ، $م\left(\frac{م}{ن}\right)^{\frac{ر}{١٠}}$]

⑥ إذا كان $١ + أ + أ^{٢} + ... + أ^{س} = (أ + ١)(١ + أ^{٢})(١ + أ^{٤})(١ + أ^{٨})$

فإن س = ...

[١٦ أ، ١٥ أ، ١٤ أ، ١٢]

الدرس ٦

الأوسـاط الهندسيـة

علمنـا أن الأوساط الحسابية هـى الحـدود الواقعـة بـين حديـن متتاليـن فى المتتابعـة الحسابية وأيضًا الأوساط الهندسية هـى الحـدود الواقعـة بـين حديـن متتاليـن فى المتتابعـة الهندسية ويمكن إيجاد الوسط الهندسى كما بالتعريف التالى :

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث حدود متتالية من متتابعة هندسية فإنه يقال أن ب هى الوسط الهندسى بين الكميتين أ ، جـ حيث $\text{ب}^{2} = \text{أ جـ}$ أى $\text{ب} = \pm\sqrt{\text{أ جـ}}$ أى $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

ملاحظات هامة

- لإيجاد الوسط الهندسى لكميتين لابد وأن تكون الكميتين لهما نفس الإشارة ، أما إذا كانت إحدى الكميتين موجبة والأخرى سالبة فإنه لا يوجد لهما وسط هندسى حقيقى.
- عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة − ٢ = ن − ٢
- عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢
- الوسط الذى ترتيبه (هـ) من البداية هو $\text{أ}\,\text{ر}^{\text{هـ}}$ فمثلاً الوسط السادس هو $\text{أ}\,\text{ر}^{6}$ وهكذا ...





تعريف

الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها ن هو الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعًا أى أن الوسط الهندسى لهذه الكميات = $\sqrt[ن]{\text{حاصل ضرب هذه الكميات}}$

مثال (١)

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٣ ، ٤٨

الحل

عدد الأوساط = ٣ ∴ عدد حدود المتتابعة ن = ٣ + ٢ = ٥

$ح_١$ = ٣ ∴ أ = ٣ ، $ح_٥$ = ٤٨ ∴ أ $ر^٤$ = ٤٨

∴ ٣ $ر^٤$ = ٤٨ ∴ $ر^٤$ = ١٦ ∴ ر = ±٢

عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى ٦ ، ١٢ ، ٢٤

عندما ر = -٢ ∴ الأوساط هى -٦ ، ١٢ ، -٢٤

ملاحظة

إذا كان عدد الأوساط المطلوبة زوجيًا فإن هناك مجموعة واحدة من الأوساط (حل وحيد) أما إذا كان عدد الأوساط المطلوبة فرديًا فإن هناك مجموعتين من الأوساط (حلين)

مثال (٢)

عددان وسطهما الحسابى ١٧ ووسطهما الهندسى ١٥ أوجد العددان.

الحل

نفرض أن العددين أ ، هـ

∴ الوسط الحسابى = $\frac{أ + هـ}{٢}$ = ١٧ ∴ أ + هـ = ٣٤ ← (١)

الوسط الهندسى = ± $\sqrt{أ هـ}$ = ± ١٥ ∴ أ هـ = ٢٢٥ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ أ (٣٤ - أ) = ٢٢٥ ∴ ٣٤ أ - $أ^٢$ = ٢٢٥

∴ $أ^٢$ - ٣٤ أ + ٢٢٥ = ٠ ∴ (أ - ٩) (أ - ٢٥) = ٠

∴ أ = ٩ أو أ = ٢٥ ∴ هـ = ٢٥ أو هـ = ٩

∴ العددان هما ٩ ، ٢٥



مثال (٣)

إذا أدخلت ٥ أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والثالث = ١٠
ومجموع الوسطين الثانى والرابع = ٣٠ فما هى هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن الحد الأول أ والأساس ر

∴ الوسط الأول = أ ر ، الثانى = أ $ر^٢$ ، الثالث = أ $ر^٣$ ، الرابع = أ $ر^٤$

∴ أ ر + أ $ر^٣$ = ١٠ ← (١) ، أ $ر^٢$ + أ $ر^٤$ = ٣٠ ← (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ ر^٢ + أ ر^٤}{أ ر + أ ر^٣} = \frac{٣٠}{١٠}$ ∴ $\frac{أ ر^٢ (١ + ر^٢)}{أ ر (١ + ر^٢)} = ٣$ ∴ ر = ٣

بالتعويض فى (١) :

∴ ٣أ + ٢٧أ = ١٠ ∴ ٣٠أ = ١٠ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$

∴ الأوساط هى ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١

مثال (٤)

إذا كانت : أ + ١ ، أ + ٧ ، ١٢أ + ٣ ثلاث حدود متتالية فى متتابعة هندسية
فأوجد قيمة أ

الحل

∵ المتتابعة هندسية ، أ + ٧ وسط هندسى بين أ + ١ ، ١٢أ + ٣

∴ $(أ + ٧)^٢$ = (أ + ١) (١٢أ + ٣) ∴ $أ^٢$ + ١٤أ + ٤٩ = ١٢$أ^٢$ + ١٥أ + ٣

∴ ١٢$أ^٢$ + ١٥أ + ٣ − $أ^٢$ − ١٤أ − ٤٩ = ٠ ∴ ١١$أ^٢$ + أ − ٤٦ = ٠

(أ − ٢) (١١أ + ٢٣) = ٠ ∴ أ = ٢ أو أ = $\frac{-٢٣}{١١}$



مثال ٥

ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ٣٩ وإذا طرح من العدد الأوسط ٨ كانت الأعداد الناتجة فى تتابع هندسى أوجد هذه الأعداد.

الحل

نفرض أن الأعداد هى أ - د ، أ ، أ + د

$\therefore$ (أ - د) + أ + (أ + د) = ٣٩ $\quad\therefore$ ٣ أ = ٣٩ $\quad\therefore$ أ = ١٣

$\therefore$ الأعداد هى ١٣ - د ، ١٣ ، ١٣ + د

وعند طرح ٨ من العدد الأوسط تصبح الأعداد ١٣ - د ، ٥ ، ١٣ + د فى تتابع هندسى

$\therefore$ ٥^2 = (١٣ - د) (١٣ + د) $\quad\therefore$ ٢٥ = ١٦٩ - د^2

$\therefore$ د^2 = ١٤٤ $\quad\therefore$ د = ± ١٢ $\quad\therefore$ الأعداد هى ١ ، ١٣ ، ٢٥

مثال ٦

ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٦ وإذا طرح من الأول الواحد الصحيح وطرح من الثانى ٢ وطرح من الثالث ١١ كانت الأعداد الناتجة فى تتابع حسابى أوجد الأعداد.

الحل

نفرض أن الأعداد هى أ ، أ ر ، أ ر^2

$\therefore$ أ + أ ر + أ ر^2 = ٢٦ $\quad\therefore$ أ (١ + ر + ر^2) = ٢٦ ← ①

$\because$ أ - ١ ، أ ر - ٢ ، أ ر^2 - ١١ تكون متتابعة حسابية

$\therefore$ ٢ (أ ر - ٢) = أ - ١ + أ ر^2 - ١١ $\quad\therefore$ ٢ أ ر - ٤ = أ + أ ر^2 - ١٢

$\therefore$ أ ر^2 - ٢ أ ر + أ = ٨ $\quad\therefore$ أ (ر^2 - ٢ ر + ١) = ٨ ← ②

بقسمة ① على ② :

$\therefore \frac{\text{أ (١ + ر + ر}^2\text{)}}{\text{أ (ر}^2\text{ - ٢ ر + ١)}} = \frac{٢٦}{٨} \quad \therefore \frac{\text{١ + ر + ر}^2}{\text{ر}^2\text{ - ٢ ر + ١}} = \frac{١٣}{٤}$

$\therefore$ ١٣ ر^2 - ٢٦ ر + ١٣ = ٤ + ٤ ر + ٤ ر^2

∴ ١٣ ر^{٢} − ٤ ر^{٢} − ٢٦ ر − ٤ ر + ١٣ − ٤ = ٠   ∴ ٩ ر^{٢} − ٣٠ ر + ٩ = ٠

∴ (٩ ر − ٣) (ر − ٣) = ٠   ∴ ر = $\frac{١}{٣}$ أو ر = ٣

∴ أ = ١٨ أو أ = ٢   ∴ الأعداد هي ٢ ، ٦ ، ١٨

مثال (٧)

إذا كان (س ، ٤ ، ص) في تتابع هندسي ، (س − ٢ ، ٤ ، ص) في تتابع حسابي

أوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ س ، ٤ ، ص في تتابع هندسي   ∴ (٤)^{٢} = س ص

∴ س ص = ١٦ ← (١)

∵ س − ٢ ، ٤ ، ص في تتابع حسابي   ∴ س − ٢ + ص = ٨

∴ س + ص = ١٠ ← (٢)

بالتعويض من (٢) في (١) :   ∴ س (١٠ − س) = ١٢

∴ ١٠ س − س^{٢} = ١٦   ∴ س^{٢} − ١٠ س + ١٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٨) = ٠   ∴ س = ٢ أو س = ٨

∴ ص = ٨ أو ص = ٢   ∴ قيمة س ، ص هي ٢ ، ٨ أو ٨ ، ٢

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي لعددين

إذا كان س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، س ≠ ص فإن :

الوسط الحسابي (ع) = $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ ، الوسط الهندسي الموجب (هـ) = $\sqrt{\text{س ص}}$

∴ ع − هـ = $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} - \sqrt{\text{س ص}} = \frac{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س ص}} + \text{ص}}{٢}$

= $\frac{(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}})^{٢}}{٢}$ > ٠   (بوضع المقدار على صورة مربع كامل)

∴ ع > هـ وحيث أن الوسط الهندسي الموجب أكبر من الوسط الهندسي السالب.





فيكون الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى

أى أن

إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن $\frac{أ + جـ}{2} > ب$

إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث حدود متتالية فى متتابعة حسابية فإن $ب > \sqrt{أ جـ}$

إذا كانت $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ..... ، $ح_ن$ أعداد حقيقية موجبة فإن :

$$\frac{ح_1 + ح_2 + ح_3 + ... + ح_ن}{ن} \geq \sqrt[ن]{ح_1 ح_2 ح_3 ... ح_ن}$$

وتتحقق المساواة فقط عندما $ح_1 = ح_2 = ح_3 = ... = ح_ن$

مثال (8)

إذا كانت : 2أ ، 3ب ، 4جـ ، 5ء أعداد موجبة فى تتابع هندسى

فأثبت أن : (2أ + 4جـ) (3ب + 5ء) > 48 ب جـ

الحل

∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى

، ∵ 3ب وسط هندسى بين 2أ ، 4جـ ∴ 2أ + 4جـ > 6ب ← (1)

∵ 4جـ وسط هندسى بين 3ب ، 5ء ∴ 3ب + 5ء > 8جـ ← (2)

من (1) ، (2) بالضرب :

∴ (2أ + 4جـ) (3ب + 5ء) > 48 ب جـ



تمرين ٦ على الأوساط الهندسيـة

الأسئلة التي فوقها علامة لها نفس فكرة كتاب المدرسة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمى ٥

$\frac{1}{2}$ ساعة امتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{.....}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① متتابعة هندسية $ح_{ن-١} = \frac{٣}{٥} ح_ن$ فإن أساس المتتابعة = ...

[٣ أ ٥ أ $\frac{٥}{٣}$ أ $\frac{٣}{٥}$]

② الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ هو ....

[$\frac{-٤}{٥}$ أ $\frac{-١}{٥}$ أ $\frac{١}{٥}$ أ $\frac{٤}{٥}$]

③ الحد الخامس من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times (٣)^{ن-١}$ يساوى ....

[٦٥ أ ٤٨٦ أ ٨١ أ ١٦٢]

④ فى المتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٨} ، \frac{-١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، -١ ، ....)$ رتبة الحد الذى قيمته يساوى -١٠٢٤ هى ....

[١٢ أ ١٣ أ ١٤ أ ١٥]

⑤ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٦ = \frac{١}{٩} ح_٤ ، ح_٣ + ح_٦ = ٢٨$ أوجد المتتابعة

....

....

⑥ مسرح يتسع لـ ١٦ صفًا فإذا كان الصف الأول يحتوى على ١٦ مقعدًا وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذى يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد كم عدد المقاعد بهذا المسرح ؟

....

....

ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ ① أوجد الوسط الهندسى بين ٤ ، ٢٥ [±١٠]

② أوجد الوسط الهندسى بين ١٦ ، ٤٩ [±٢٨]

③ ادخل أربعة أوساط هندسية بين ١ ، ٢٤٣ [٨١، ٢٧، ٩، ٣]

④ ادخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين ٥ ، ٣٢٠ [(١٦٠، ٨٠، ٤٠، ٢٠، ١٠)]

⑤ ادخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢ [(١٦، ٨، ٤، ٢، ١، $\frac{١}{٢}$)]

⑥ ادخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨}{٢٧}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ [($\frac{٩}{٤}$، $\frac{٣}{٢}$، ١، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٩}$)]

٣ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

[٨ أ، ±٦٤ أ، ±٨ أ، ٣٢]

② إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص تساوى ....

[٣ أ، ٢٥ أ، ٥ أ، ١٥]

③ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب < ....

[$\frac{أ + جـ}{٢}$ أ، أ + جـ أ، أ جـ أ، $\frac{أ جـ}{٢}$]

④ إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٢ ، س ، هو ٨ فإن قيمة س = ...

[٨ أ، ٤ أ، ١٦ أ، ٣٢]

٤ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... من وسطهما الهندسى .

[= أ، > أ، < أ، ≤]

② الوسط الهندسى الموجب للكميتين $أ^٢$ ، $ب^٤$ هو ....

[$أ^٢ ب^٤$ أ، $أ ب^٢$ أ، أ ب أ، $أ^٢ ب^٢$]

③ إذا كان الحدين الأوسطين فى متتابعة هندسية هما ٢ ، ٤ على الترتيب فإن أساسها هو ....

[$\frac{١}{٢}$ أ، ٨ أ، ٦ أ، ٢]

④ الوسط الهندسى للأعداد ٢ ، ٩ ، ١٢ يساوى .... [٢ أ، ٦ أ، ٩ أ، ١٢]

⑤ إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ....

[$\frac{أ + جـ}{٢}$ > ب أ، $\frac{أ + جـ}{٢}$ < ب أ، $\frac{أ + جـ}{٢}$ = ب أ، $ب^٢$ = أ + جـ]



٥ ① عددان موجبان مجموعهما ٢٠ ووسطهما الهندسى ٨ فما هما العددان ؟ [١٦ ، ٤]

② عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسى ٣ فما هما العددان ؟ [١ ، ٩]

---

٦ أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣ [١ ، ٩]

---

٧ عددان موجبان الوسط الحسابى لهما ٢٥ ووسطهما الهندسى ٢٠ فما العددان ؟ [٤٠ ، ١٠]

ثالثا مسائل المستوى الثانى

٨ الوسط الحسابى لعددين = $\frac{٥}{٣}$ وسطهما الهندسى ، وأصغر العددين يساوى ٩

أوجد العدد الآخر [٨١]

---

٩ إذا أدخلت ٤ أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع = ٩٠

ومجموع الوسطين الثانى والثالث = ٦٠ أوجد العددين. [١٦٠ ، ٥]

---

١٠ إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين الى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ٢٧ أوجد عدد تلك الأوساط. [٥]

---

١١ إذا كان الوسط الهندسى بين س ، ص هو ٦ والوسط الحسابى بين (س + ٤) ، (ص + ٦) هو ١٥

فأوجد قيمتى كل من : س ، ص [١٨ ، ٢]

---

١٢ متتابعة هندسية متزايدة جميع حدودها موجبة ، إذا كان الوسط الحسابى لحديها الثانى والرابع يساوى ٦٨ والوسط الهندسى الموجب لهما يساوى ٣٢ أوجد المتتابعة.

[(٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ....)]

---

١٣ أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ [٩ ، ٤]

---

١٤ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد الصحيح والوسط الحسابى للحدين الثالث والخامس يساوى ٣٠ والوسط الهندسى الموجب لهما يساوى ٢٤

أوجد المتتابعة. [(١٩٢ ، ٩٦ ، ٤٨ ، ....)]



١٥ الوسط الحسابى بين الحدين الأول والرابع من متتابعة هندسية هو $\frac{١}{٢}$ ٤ والوسط الحسابى بين حديها الثانى والثالث هو ٣

أثبت أنه توجد متتابعتان هندسيتان وأوجدهما . [(٨، ٤، ٢، ....)، (١، ٢، ٤، ....)]

١٦ متتابعة حسابية حدها الأول = ٤ وحدودها الثانى والخامس والحادى عشر تكون متتابعة هندسية أوجد المتتابعة. [(٤، ٦، ٨، ....)]

١٧ ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ١٣ وإذا أضيف لحدها الأوسط ٢ كونت النواتج متتابعة حسابية أوجد الأعداد. [٩، ٣، ١]

١٨ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٩$ = ١٩ وحدودها $ح_١$ ، $ح_٤$ ، $ح_{١٣}$ فى تتابع هندسى أوجد المتتابعة الحسابية. [(٣، ٥، ٧، ....)]

١٩ متتابعة حسابية تزايدية حدها الثامن يساوى ١٥ وحدودها $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٥$ تكون متتابعة هندسية أوجد المتتابعة الحسابية. [(١، ٣، ٥، ....)]

٢٠ متتابعة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها ٥٠ وحدودها الأول والثانى والخامس فى تتابع هندسى أوجد المتتابعة الحسابية. [(٢، ٦، ١٠، ....)]

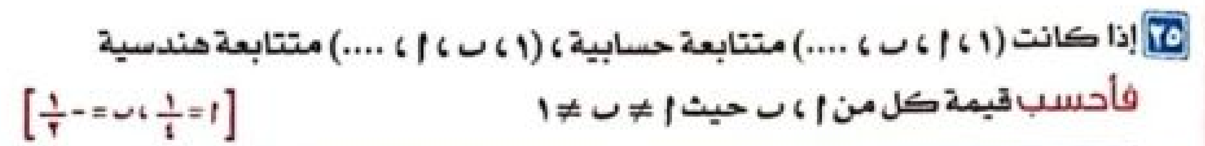
٢١ ثلاثة أعداد موجبة فى تتابع حسابى مجموعهم ١٥ وإذا ضرب أصغرها فى ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧ كونت الأعداد الناتجة متتابعة هندسية أوجد حدود المتتابعة الحسابية. [(٣، ٥، ٧)]

٢٢ ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ١٣ وإذا ضرب العدد الثانى فى ٢ وضرب العدد الثالث فى ٣ كانت الأعداد الثلاثة الجديدة فى تتابع حسابى أوجد هذه الأعداد. [($\frac{١٣}{٣}$، $\frac{١٣}{٣}$، $\frac{١٣}{٣}$)، (٩، ٣، ١)]

٢٣ ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٣٥ وإذا أضيف إلى العدد الثانى ٦ وإلى العدد الثالث ٧ صارت الأعداد الثلاثة فى تتابع حسابى أوجد هذه الأعداد. [٥، ١٠، ٢٠]

٢٤ إذا قسمت الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة هندسية على ٦ ، ٤ ، ٣ على الترتيب فإن النواتج تكون فى تتابع حسابى أثبت أن هناك متتابعتين.





٢٥ إذا كانت (١ ، أ ، ب ، ....) متتابعة حسابية ، (١ ، ب ، أ ، ....) متتابعة هندسية
فأحسب قيمة كل من أ ، ب حيث أ ≠ ب ≠ ١ [أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = $-\frac{١}{٢}$]

---

٢٦ إذا كانت ٤ أ ، ب ، ٣ جـ ، ٤ ء كميات موجبة فى تتابع هندسى
أثبت أن: (٤ أ + ٣ جـ) (ب + ٤ ء) > ١٢ ب جـ

---

٢٧ إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات موجبة فى تتابع هندسى
فأثبت أن: (أ + جـ) (ب + ء) > ٤ ب جـ

---

٢٨ إذا كانت ٦ أ ، ٣ ب ، ٢ جـ ، ٢ ء كميات موجبة فى تتابع حسابى فأثبت أن:
① ب جـ > ٢ أ ء ② ٣ $ب^٢$ + ٢ $جـ^٢$ > ٤ أ جـ + ٣ ب ء

رابعا: مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢٩ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

① إذا كانت (س ، ص ، ع ، ....) فى تتابع هندسى فإن ....
[٢ص > س + ع أ $ص^٢$ > س ع أ ص = س ع أ $\sqrt{ص}$ = س ع]

② الوسط الهندسى للأعداد: ١ ، ٣ ، ٩ هو ....
[±٣ $\sqrt{٣}$ أ ±٣ أ ٣ أ ±٩]

③ إذا كانت ($ع_ن$) متتابعة هندسية حيث $ع_ن$ = $(٣)^{ن - ١}$ فإن الوسط الهندسى بين $ع_٤$ ، $ع_٦$ يساوى ....
[٩ أ ٢٤٣ أ ٢٧ أ ٨١]

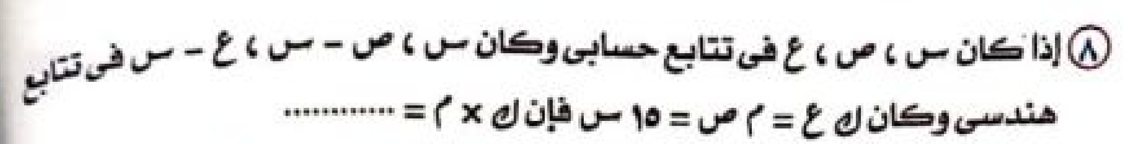
④ إذا كان (س - ١) وسط هندسى بين العددين (س - ٢) ، (٣ س - ٥)
فإن س = ... [-٣ ، $\frac{٣}{٢}$ أ ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ أ ٣ ، $\frac{-٣}{٢}$ أ -٣ ، $\frac{-٣}{٢}$]

⑤ الوسط الهندسى للأعداد ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ هو ....
[٢ أ ٤ أ ٨ أ ١٠]

⑥ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء أربع كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية
فإن أ + ء > .... [ب + جـ أ ٢ب + جـ أ ب جـ أ ب - جـ]

⑦ إذا كانت ع هى الوسط الحسابى بين أ ، ب وكانت هـ هى الوسط الهندسى بينهما
وكان $أ^٣$ + $ب^٣$ = ك $ع^٣$ - م $هـ^٢$ ع فإن ك + م = ...
[٢ أ ١٤ أ ٤٨ أ ٢٤]





(٨) إذا كان س ، ص ، ع في تتابع حسابي وكان س ، ص − س ، ع − س في تتابع هندسي وكان ك ع = م ص = ١٥ س فإن ك × م = ...

[٥ ، أ ٨ ، أ ١٠ ، أ ١٥]

(٩) إذا كان أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي وكانت ء هي الوسط الحسابي بين أ ، ب وكانت هـ هي الوسط الحسابي بين ب ، حـ فإن $\frac{أ}{ء} + \frac{حـ}{هـ}$ = ...

[٢ ، أ ٣ ، أ ٤ ، أ ١]

(١٠) إذا كان ٢أ ، ٣ب ، ٤حـ في تتابع حسابي وكان ٢أ ، ٣ب − ٢أ ، ٤حـ − ٢أ في تتابع هندسي فإن $\frac{حـ}{أ}$ = ...

[$\frac{٥}{٢}$ ، أ ٢ ، أ $\frac{٣}{٢}$ ، أ ٣]

٣٠ إذا أضفنا الأعداد ٤ ، ١٢ ، ٢٩ ، ١ على الترتيب إلى أربعة أعداد تكون متتابعة هندسية نحصل على أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية أوجد المتتابعة الهندسية.

[(١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ....)]

٣١ إذا كانت $ح_٢$ ، $ح_٨$ ، $ح_{١٨}$ من متتابعة حسابية تكون متتابعة هندسية أثبت أن أساس المتتابعة الهندسية = ٢ وإذا كانت $ح_٢$ في الحسابية = $ح_١$ في الهندسية = ٣
أوجد كلاً من المتتابعتين الهندسية والحسابية.

[(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ، (٢,٥ ، ٣ ، ٣,٥ ، ....)]

٣٢ إذا كانت (س ، ص ، ع) أعداد موجبة تكون متتابعة حسابية وكانت أ هي الوسط الهندسي بين س ، ص وكانت ب هي الوسط الهندسي بين ص ، ع
فأثبت أن : $ص^٢ > أ ب$

٣٣ إذا كانت (أ ، ب ، حـ) كميات موجبة في تتابع هندسي
أثبت أن : (لو أ ، لو ب ، لو حـ) في تتابع حسابي.

٣٤ (١) إذا كان أ + ب + حـ = ١ حيث أ ، ب ، حـ كميات موجبة ومختلفة
أثبت أن : (١ − أ) (١ − ب) (١ − حـ) > ٨ أ ب حـ

(٢) إذا كانت س ∈ $ح^+$ ، س ≠ ١ أثبت أن : س + $\frac{١}{س}$ > ٢





الدرس ٧ المتسلسلات الهندسية

سبق أن علمنا أن المتسلسلة هى مجموع حدود متتابعة وتعلمنا كيفية إيجاد المتسلسلة الحسابية والآن سوف نتعرف على كيفية إيجاد المتسلسلة الهندسية.

مجموع المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية ويرمز لمجموع ن حدًا منها بالرمز $ح_{ن}$

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

أولا إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت $أ + أ ر + أ ر^{٢} + ... + أ ر^{ن-١}$ متسلسلة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر فإنه يمكن إيجاد المجموع $ح_{ن}$ لهذه المتسلسلة كما يلى :

$$ح_{ن} = أ + أ ر + أ ر^{٢} + ... + أ ر^{ن-٢} + أ ر^{ن-١} \quad \leftarrow (١)$$

وبضرب الطرفين فى ر فإن :

$$ر\, ح_{ن} = أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + ... + أ ر^{ن-١} + أ ر^{ن} \quad \leftarrow (٢)$$



وبطرح المعادلتين يكون:

$ح_ن - ر ح_ن = أ - أ ر^ن$ أى أن $ح_ن (1 - ر) = أ(1 - ر^ن)$

$$\therefore ح_ن = \frac{أ(1 - ر^ن)}{1 - ر} ، ر \neq 1$$

مثال (1)

أوجد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (1، 2، 4، ....)

الحل

$\because أ = 1$ ، $\because ر = \frac{2}{1} = 2$

$\because ح_ن = \frac{أ(ر^ن - 1)}{ر - 1}$ $\therefore ح_7 = \frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 127$

ثانيا إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن $ح_ن = \frac{أ - أ ر^ن}{1 - ر}$ ← (1)

وأن $ل = أ ر^{ن - 1}$ ويضرب الطرفين فى ر

فتكون $ل ر = أ ر^ن$ ← (2)

وبالتعويض من (2) فى (1) فإن: $\therefore ح_ن = \frac{أ - ل ر}{1 - ر} ، ر \neq 1$

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلى:

مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية

- مجموع ن حدًا من حدود متتابعة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر هو:

$ح_ن = \frac{أ(1 - ر^ن)}{1 - ر}$ حيث $ر \neq 1$ (يستخدم إذا علم عدد الحدود)

- مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر وحدها الأخير ل هو:

$ح_ن = \frac{أ - ل ر}{1 - ر}$ حيث $ر \neq 1$ (يستخدم إذا علم الحد الأخير)



ملاحظات هامة

① يفضل إستخدام الصورة: $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $جـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ إذا كان $ر > ١$

وإذا كانت $ر < ١$ نستخدم الصورة السابقة

② إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ر = أ + أ + أ$ إلى ن حدًا = ن أ ∴ $جـ_ن = ن أ$

مثال ②

أوجد مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول = ٢ وأساسها = ٣ وحدها الأخير = ٤٨٦

الحل

أ = ٢ ، ر = ٣ ، ل = ٤٨٦

∵ $جـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ∴ $جـ_ن = \frac{٤٨٦ \times ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٧٢٨$

إستخدام رمز التجميع

يستخدم الرمز « $\sum$ » لجمع حدود المتسلسلة بعد إيجادها بالتعويض عن قيم ر لإيجاد الحد الأول والأساس وعدد الحدود أو الحد الأخير.

فمثلاً

الرمز $\sum_{ر=٢}^{٦} ٢^{ر-١}$ تعنى مجموع حدود المتسلسلة من الحد الثانى إلى الحد السادس لذلك نعوض عن ر = ٢ لإيجاد قيمة أ ونوجد ر وعدد الحدود ثم نوجد المجموع وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة .

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تعريف

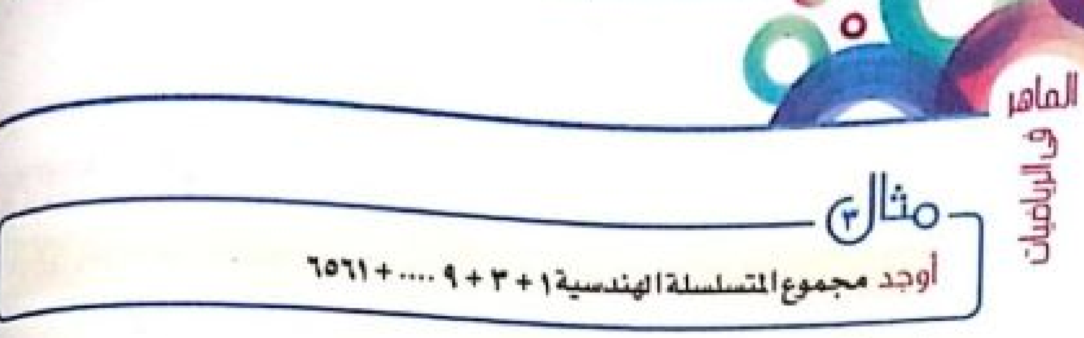
المتسلسلة الهندسية غير المنتهية (اللانهائية) هى المتسلسلة التى لها عدد لا نهائى من الحدود

فمثلاً

المتسلسلة ٢ + ٤ + ٨ + ... + ٢٠٤٨ متسلسلة منتهية لأن لها حد أخير

إما المتتابعة ٢ + ٤ + ٨ + ... فهى متتابعة غير منتهية لأن ليس لها حد أخير





مثال (٣)

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١

الحل

$ح_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ (بالتعويض عن أ = ١ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١)

$ح = \frac{١ - ٦٥٦١ \times ٣}{١ - ٣}$ $\therefore ح = \frac{-١٩٦٢}{-٢} = ٩٨٤١$

مثال (٤)

متتابعة هندسية أساسها −٢ ومجموع حدودها الستة الأولى = −٤٢ أوجد المتتابعة

الحل

$ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ $\therefore -٤٢ = \frac{أ[(-٢)^٦ - ١]}{-٢ - ١}$

$\therefore -٤٢ \times -٣ = أ \times ٦٣$ $\therefore أ = \frac{١٢٦}{٦٣} = ٢$

$\therefore$ المتتابعة هي (٢ ، −٤ ، ٨ ، ....)

مثال (٥)

أوجد : $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ (٢)^{ر-١}$

الحل

$ع_٥ = أ = ٣ (٢)^{٥-١} = ٤٨$ ، الأساس $ر = ٢$ ، $ن = ١٢ - ٥ + ١ = ٨$

$ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ (بالتعويض عن أ = ٤٨ ، ر = ٢ ، ن = ٨)

$ح_٨ = \frac{٤٨(١ - ٢^٨)}{١ - ٢}$ $\therefore ح_٨ = ٤٨ \times ٢٥٥ = ١٢٢٤٠$



مثال ٦

متتابعة هندسية موجبة مجموع الأربعة حدود الأولى منها = $٢٢\frac{١}{٢}$ ومجموع الأربعة حدود التالية لها = ٣٦٠ فما هى المتتابعة

الحل

∵ $ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

∴ $٢٢\frac{١}{٢} = \frac{أ(ر^٤ - ١)}{ر - ١}$ ← (١)

∵ مجموع الثمانية حدود الأولى منها = $٢٢\frac{١}{٢} + ٣٦٠ = ٣٨٢\frac{١}{٢}$

∴ $٣٨٢,٥ = \frac{أ(ر^٨ - ١)}{ر - ١}$ ← (٢)

بقسمة (٢) على (١):

∴ $\frac{أ(ر^٨ - ١)}{ر - ١} \times \frac{ر - ١}{أ(ر^٤ - ١)} = \frac{٣٨٢,٥}{٢٢,٥}$

∴ $\frac{(ر^٤ + ١)(ر^٤ - ١)}{ر^٤ - ١} = ١٧$

$ر^٤ + ١ = ١٧$

∴ $ر^٤ = ١٦$

∴ $ر = ٢±$

∴ $ر = ٢$ لأن المتتابعة موجبة

بالتعويض فى (١):

∴ $٢٢\frac{١}{٢} = أ \times ١٥$

∴ $أ = ١\frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هى $(١\frac{١}{٢}، ٣، ٦، ....)$

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الثانى = ٦ وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها .

الحل

∵ $ح_٢ = ٦$

∴ $أر = ٦$ ← (١)

∵ $ح_٣ - ح_١ = ٩$

∴ $أر^٢ - أ = ٩$

∴ $أ(ر^٢ - ١) = ٩$ ← (٢)



بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore \frac{أ(ر^٢ - ١)}{أ ر} = \frac{٩}{٦}$ $\quad$ $\therefore \frac{ر^٢ - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ٢ر^٢ - ٢ = ٣ر$ $\quad$ $\therefore ٢ر^٢ - ٣ر - ٢ = ٠$

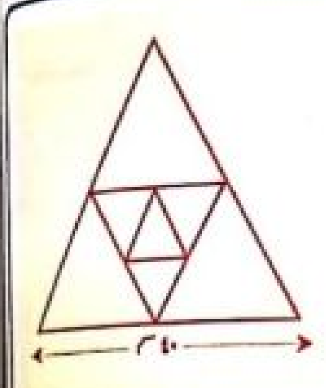
$\therefore (٢ر + ١)(ر - ٢) = ٠$

$\therefore ر = \frac{-١}{٢}$ مرفوض أ، ر = ٢ $\quad$ $\therefore أ = ٣$

$\because ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ $\quad$ $\therefore ح_٧ = \frac{٣(٢^٧ - ١)}{٢ - ١} = ٣٨١$

مثال (٨)

يبين الشكل المقابل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، رسم مثلث آخر فى الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



الحل

محيط المثلث الأكبر = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

محيط المثلث الأصغر التالى = ٣ × ٢٠ = ٦٠

محيط المثلث التالى للمثلث الأصغر = ٣ × ١٠ = ٣٠

أى أن النمط هو ١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، .... إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ...

وهى مجموع متسلسلة هندسية

ملاحظة
محيط المثلث المتساوى الأضلاع = ٣ × طول الضلع

$\because ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ $\quad$ بالتعويض عن أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

$\therefore ح_{١٠} = \frac{١٢٠\left(١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠}\right)}{١ - \frac{١}{٢}} \approx ٢٤٠$





المتسلسلات المتقاربة وغير المتقاربة

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية نوعان :

النوع الأول يكون فيها $|ر| \geq ١$ وهى متسلسلة لا يمكن إيجاد مجموعها

مثل : المتسلسلة ٢ + ٤ + ٨ + ... وفى هذه الحالة تسمى متسلسلة غير متقاربة

النوع الثانى يكون فيها $|ر| < ١$ وهى متسلسلة يمكن إيجاد مجموعها

مثل : المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ....) وفى هذه الحالة تسمى متسلسلة متقاربة

أى أن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًا فإنها تكون متقاربة لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى إما أن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.

مجموع المتتابعات الهندسية غير المنتهية

علمنا أن مجموع ن حدًا من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن $ر^ن$ يقترب من صفر عندما تكون $-١ < ر < ١$

ويصبح المجموع $جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

ملاحظة

إذا كانت $|ر| \geq ١$ فإنه لا يمكن إيجاد مجموع المتتابعة إلى ما لا نهاية.

مثال ٩

فى المتتابعة الهندسية (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ....) أوجد مجموع حدودها إلى ما لانهاية إبتداء من الحد الأول

الحل

$ر = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$ ، $أ = ١٦$ $\because |ر| < ١$ $\therefore جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٢$

مثال (١٠)

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع حدودها ١٦ وأساسها = $\frac{١}{٤}$ أوجد المتتابعة ثم أثبت أن حدها الثالث يساوى ٣ أمثال مجموع الحدود التالية له.

الحل

$\because$ $ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ $\therefore ١٦ = \frac{أ}{١ - \frac{١}{٤}}$ $\therefore أ = ١٢$

$\therefore$ المتتابعة هى $(١٢ ، ٣ ، \frac{٣}{٤} ، .....)$

$\because ع_{٣} = أ ر^{٢} = ١٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = ١٢ \times \frac{١}{١٦} = \boxed{\frac{٣}{٤}}$ (١)

$\because$ مجموع الحدود التالية له $= أ ر^{٣} + أ ر^{٤} + أ ر^{٥} + ...$ إلى ∞

$\therefore \frac{أ ر^{٣}}{١ - ر} = \frac{١٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣}}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٤}{٣} \times ١٢ \times \frac{١}{٦٤} = \boxed{\frac{١}{٤}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن: $ع_{٣} = ٣$ أمثال مجموع الحدود التالية له.

مثال (١١)

متتابعة هندسية غير منتهية مجموع عدد غير محدود من حدودها ٩٦ وحدها الأول يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٢٤ أوجد المتتابعة.

الحل

$\because ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ $\therefore ٩٦ = \frac{أ}{١ - ر}$ (١)

$أ - أ ر = ٢٤$ $\therefore أ (١ - ر) = ٢٤$ (٢)

من (١) ، (٢) بالقسمة :

$\therefore أ (١ - ر) \times \frac{(١ - ر)}{أ} = \frac{٢٤}{٩٦}$ $\therefore ١ - ٢ ر + ر^{٢} = \frac{١}{٤}$

$٤ - ٨ر + ٤ر^{٢} = ١$ $\therefore ٤ر^{٢} - ٨ر + ٣ = ٠$

$(٢ر - ١)(٢ر - ٣) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = \frac{٣}{٢}$ (مرفوضة لأن المتتابعة غير منتهية)

$\therefore أ = ٤٨$ $\therefore$ المتتابعة هى (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ....)

مثال (١٢)

إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية = ٤ ومجموع حديها الأول والثانى يساوى ٣ برهن على أنه توجد متتابعتان تحققان هذين الشرطين وأوجدهما

الحل

$\because \frac{أ}{١ - ر} = ٤$ ① $\because أ + أر = ٣$

$\therefore أ(١ + ر) = ٣$ ②

بقسمة ② على ①: $\therefore أ(١ + ر) \times \frac{(١ - ر)}{أ} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore ١ - ر^{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore ر^{٢} = \frac{١}{٤}$ $\therefore ر = \pm \frac{١}{٢}$

$\because |ر| < ١$ $\therefore$ توجد متتابعتان تحققان هذين الشرطين

عندما $ر = \frac{١}{٢}$ $\therefore أ = ٢$ $\therefore$ المتتابعة هى $(٢ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، ....)$

عندما $ر = \frac{-١}{٢}$ $\therefore أ = ٦$ $\therefore$ المتتابعة هى $(٦ ، -٣ ، \frac{٣}{٢} ، ....)$

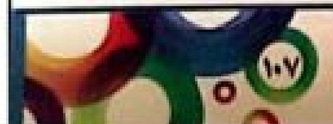
مثال (١٣)

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع عدد غير منتهى من حدودها = ١٦ والنسبة بين حدها الرابع إلى حدها الثالث هى ١ : ٢ أوجد المتتابعة.

الحل

$\because \frac{أ}{١ - ر} = ١٦$ ① ، $\frac{أر^{٣}}{أر^{٢}} = \frac{١}{٢}$ $\therefore ر = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{أ}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٦$ $\therefore أ = ٨$ $\therefore$ المتتابعة هى (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....)



تحويل الكسر العشري الدائر إلى كسر اعتيادي

عند تحويل بعض الكسور الإعتيادية لصورة عشرية نجد أن عمليات القسمة لا تنتهي ويوجد بعض الأرقام تتكرر بإستمرار مثل $\frac{1}{3} = 0.33333333333 \leftarrow \infty$

ولذلك اصطلح على أن يكتب هذا الكسر على الصورة $0.\overline{3}$ وتقرأ ٠,٣ دائر وقد اصطلح على وضع شرطة فوق الرقم الدائر وهذه الشرطة تعني تكرار العدد إلى ما لانهاية أو على رقمين أو ثلاثة لتعني أن الأرقام التي أسفل الشرطة تتكرر بصورة مستمرة.

مثال (١٤)

ضع كل من الأعداد الآتية في صورة عدد نسبي :

(١) $0.\overline{3}$ (٢) $0.1\overline{45}$ (٣) $\sqrt{5.\overline{4}}$

الحل

(١) $0.\overline{3} = \infty \leftarrow 0.33333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \text{ إلى } \infty$

$= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \text{ إلى } \infty\right)$

وما بداخل القوسين عبارة عن مجموع متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول ١ وأساسها $\frac{1}{10}$

$0.\overline{3} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$

(٢) $0.1\overline{45} = \infty \leftarrow 0.145454545 = 0.1 + \frac{45}{1000} + \frac{45}{100000} + \dots \text{ إلى } \infty$

$= \frac{1}{10} + \frac{45}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \text{ إلى } \infty\right) = \frac{1}{10} + \frac{45}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$

$= \frac{1}{10} + \frac{45}{1000} \times \frac{100}{99} = \frac{1}{10} + \frac{45}{990} = \frac{144}{990} = \frac{8}{55}$

(٣) $5.\overline{4} = \infty \leftarrow 5.444444 = 5 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots \text{ إلى } \infty$

$= 5 + \frac{4}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \text{ إلى } \infty\right)$

$= 5 + \frac{4}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 5 + \frac{4}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{49}{9}$

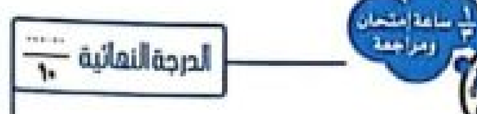
$\therefore \sqrt{5.\overline{4}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$





أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ٦



١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان الوسط الحسابى للعددين أ ، ٢١ هو ١٥ فإن أ = ...

[١٥ أ ٩± أ ٩ أ ٣٥]

② الوسط الهندسى للعددين ٨ ، ١٨ هو ....

[١٢ أ ١٢± أ ١٤٤ أ ٧٢]

③ مجموع المتسلسلة $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}$ (٢ ر − ٣) يساوى ....

[٤٠ أ ٧٢ أ ٦٠ أ ٨٠]

④ عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ٩٩ وكل منها يقبل على ٥ هو ....

[١٩ أ ٣٨ أ ٢٠ أ ٢١]

---

⑤ أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{1}{4}$ ، ٣٢

....

....

....

---

⑥ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ....) ابتداء من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع.

....

....

....





ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة (١ ، ٢ ، ٤ ، ....) هو ....

[٣٢ أ ٣١ أ ٦٤ أ ٩٣]

② مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ....) هو ....

[٤١ أ ٢٠,٥ أ ٤٠,٥ أ ٨١]

③ متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٩٣ فإذا كان أساسها = ٢ فإن حدها الأول = ...

[٣ أ ٦ أ ٢ أ ١٢]

④ متتابعة هندسية حدها الأول = ٤ ومجموع الثلاث حدود الأولى منها = ٢٨ فإن أساس المتتابعة هو ....

[-٣ ، ٢ أ ٢ ، -٣ أ ٤ أ -٣ ، -٢]

⑤ مجموع حدود المتتابعة الهندسية (٤ ، ٢ ، ١ ، ....) إلى ما لا نهاية إبتداء من حدها الأول هو ....

[٤ أ ٦ أ ٨ أ ١٠]

⑥ مجموع المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ....) إلى ما لا نهاية إبتداء من حدها الأول هو ....

[١٦٢ أ ٢١ أ ٤٠,٥ أ ٨١]

⑦ مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٦ ، ٤ ، ١ ، ....) إلى ما لا نهاية إبتداء من حدها الأول هو ....

[$\frac{٦٤}{٣}$ أ $\frac{٦٣}{٢}$ أ ٦٤ أ ٣٢]

⑧ مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ١٦ وحدها الأول = ٤ فإن:

أولاً أساس المتتابعة = ... [$\frac{٤}{٣}$ أ $\frac{٣}{٤}$ أ ٤ أ $\frac{-٣}{٤}$]

ثانيًا مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ...

[$\frac{٦٤}{٧٨١}$ أ $\frac{٧٨١}{٦٤}$ أ $\frac{٧٨٢}{٦٣}$ أ ٧٨١]

٣ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ؟ **فسر إجابتك.**

① ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

② ٢٤ + ٣٦ + ٥٤ + ...

③ ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...

④ $\frac{٢٧}{٤}$ + $\frac{٩}{٢}$ + ٣ + ٢ + ...

⑤ $\frac{٨١}{٨}$ + $\frac{٢٧}{٤}$ + $\frac{٩}{٢}$ + ...

⑥ $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٥}{٦}$ + $\frac{٢٥}{٢٤}$ + ...



٤ أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع ان أمكن :

① (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ....)　　② (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ....)

③ $\left(\frac{١}{٣٢} ، \frac{١}{١٦} ، \frac{١}{٨} ، .....\right)$　　④ $(٢ \times ٥^{١ - ن})$

---

٥ أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التى فيها :

① أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ [١٤٥٦]　　② أ = ١٠٢٤ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠ [٢٠٤٦]

③ أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ [٩٨٣٧]　　④ أ = ٢٠٤٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ل = ١٢٨ [٣٩٦٨]

---

٦ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

① (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، .... إلى ٦ حدود) [٣٧٨]

② (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، .... إلى ٦ حدود) [١٥٦٫٢٤]

③ (٣ ، -٦ ، ١٢ ، .... ، ٧٦٨) [٥١٣]

---

٧ أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين :

① $\sum_{ر=٧}^{١٦} (٢)^{ر-١}$ [٦٥٤٧٢]　　② $\sum_{ر=٣}^{١١} ١٦\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ $\left[\frac{٥١١}{٦٤}\right]$

---

٨ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ١ ، ر = ٢

يساوى .... [٣٢ أ ٣١ أ ٣٠ أ ٢٩]

② مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....) هو ....

[٣٠ أ ٢٤ أ ١٦ أ ٢٠]

③ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٤}$ هو ٤

فإن حدها الأول يساوى .... [١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

④ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢

هو ٩٦ فإن أساسها يساوى .... [$\frac{١}{٣}$ أ $\frac{١}{٢}$ أ $\frac{٧}{٨}$ أ $\frac{٣}{٤}$]

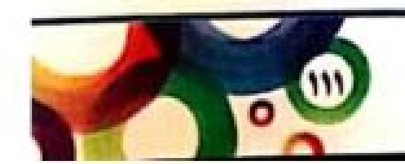
⑤ متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية

فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

[٠٫٥ أ ٠٫٣٣٣ أ ٠٫٢٥ أ ٠٫٦٦٦]

⑥ متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة $ح_ن = ٣^{ن+١} - ٣$

فإن الحد الثالث منها يساوى .... [١٨ أ ٢٣ أ ٥٤ أ ٧٧]





ثالثًا مسائل المستوى الثاني

أسئلة على مجموع عدد محدود من متتابعة هندسية

٩ أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ..... ، ٦٤)
ثم أوجد عدد حدودها
[١٢٧٫٥ ، ٨]

١٠ متتابعة هندسية حدها الثالث يساوي ٩ وحدها السادس يساوي ٢٤٣
أوجد المتتابعة ومجموع الستة حدود الأولى منها .
[(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ، ٣٦٤]

١١ كم حدًا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١
[٧]

١٢ أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ومجموع حدودها = ٣٦٤
[(٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ...)]

١٣ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموعها = ١٠٩٣ وحدها الأخير = ٧٢٩ وأساسها = ٣
[(١ ، ٣ ، ٩ ، ...)]

١٤ متتابعة هندسية حدها الرابع = ٢٤ وحدها السابع = ١٩٢ ، أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها
[(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ٩٨٣٠١]

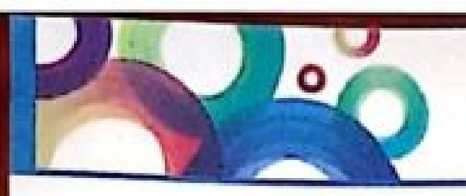
١٥ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٢$ = ٦ ، $ح_٣ - ح_١$ = ٩
أوجد هذه المتتابعة ومجموع الأثنى عشر حداً الأولى منها
[(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ١٢٢٨٥]

١٦ متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الرابع يساوي أربعة أمثال حدها السادس ومجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوي ٩٣ أوجد المتتابعة
[(٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...)]

١٧ متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها يساوي ٤٥ وحدها السادس يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٩٠ أوجد هذه المتتابعة
[(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)]

١٨ متتابعة هندسية فيها $ح_١$ = ٣ ، $ح_{ن+١}$ = ٢ $ح_ن$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها [١٨٩]

١٩ أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) = ($٣^{ن - ١}$) إبتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر
[٢٩٥١١]



٢٠ أثبت أن المتابعة (ع~ن~) = (١٠ × ٢ ^ن − ٢^) هى متتابعة هندسية **وأوجد** عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التى مجموعها ٢٥٥٥

[ن = ٩]

---

٢١ إذا كان مجموع ن حداً الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون :

جـ~ن~ = ١٢٨ − ٢ ^٧ − ن^ **فأوجد** المتتابعة ثم **أوجد** حدها السابع

[(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) ، ١]

---

٢٢ متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨ **أوجد** هذه المتتابعة

[($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، .....)]

---

٢٣ من المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ...) **أوجد** الحد الذى تبدأ به ليكون مجموع خمسة حدود متتالية ابتداء من هذا الحد مساوياً ٦٢

[ع~٤~]

---

٢٤ **أوجد** أقل عدد من الحدود التى يجب أخذها ابتداء من الحد الأول من المتتابعة الهندسية التى حدها النونى ٢ × ٣ ^ن − ١^ ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠

[٦]

---

٢٥ **أوجد** عدد حدود المتتابعة الهندسية التى مجموع حدودها ١٢١ $\frac{٤}{٩}$ وحدها الأول يساوى ٨١ وحدها الأخير يساوى $\frac{١}{٩}$

[ن = ٧]

---

٢٦ متتابعة هندسية تتكون من ستة حدود فإذا كان مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٢٤٢ ومجموع الخمسة حدود الأخيرة منها = ٧٢٦ **أوجد** المتتابعة

[(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ..... ، ٤٨٦)]

---

٢٧ عددان موجبان أ ، ب (أ > ب) وسطهما الحسابى ٣٤ ووسطهما الهندسى الموجب ١٦ **أوجد** العددين ثم **أوجد** مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية

(أ ، ب − ٥٦ ، $\frac{ب}{أ}$ ، .....)

[٦٤ ، ٤ ، ٢٥٢]

أسئلة على عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية

٢٨ أثبت أن : (ع~ن~) = (٢ × ٣ ^−ن^) متتابعة هندسية **وبين** أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها **وأوجد** هذا المجموع ابتداء من حدها الأول

[١]

---

٢٩ متتابعة هندسية أساسها $\frac{٢}{٣}$ ومجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول = ٦ **أوجد** المتتابعة

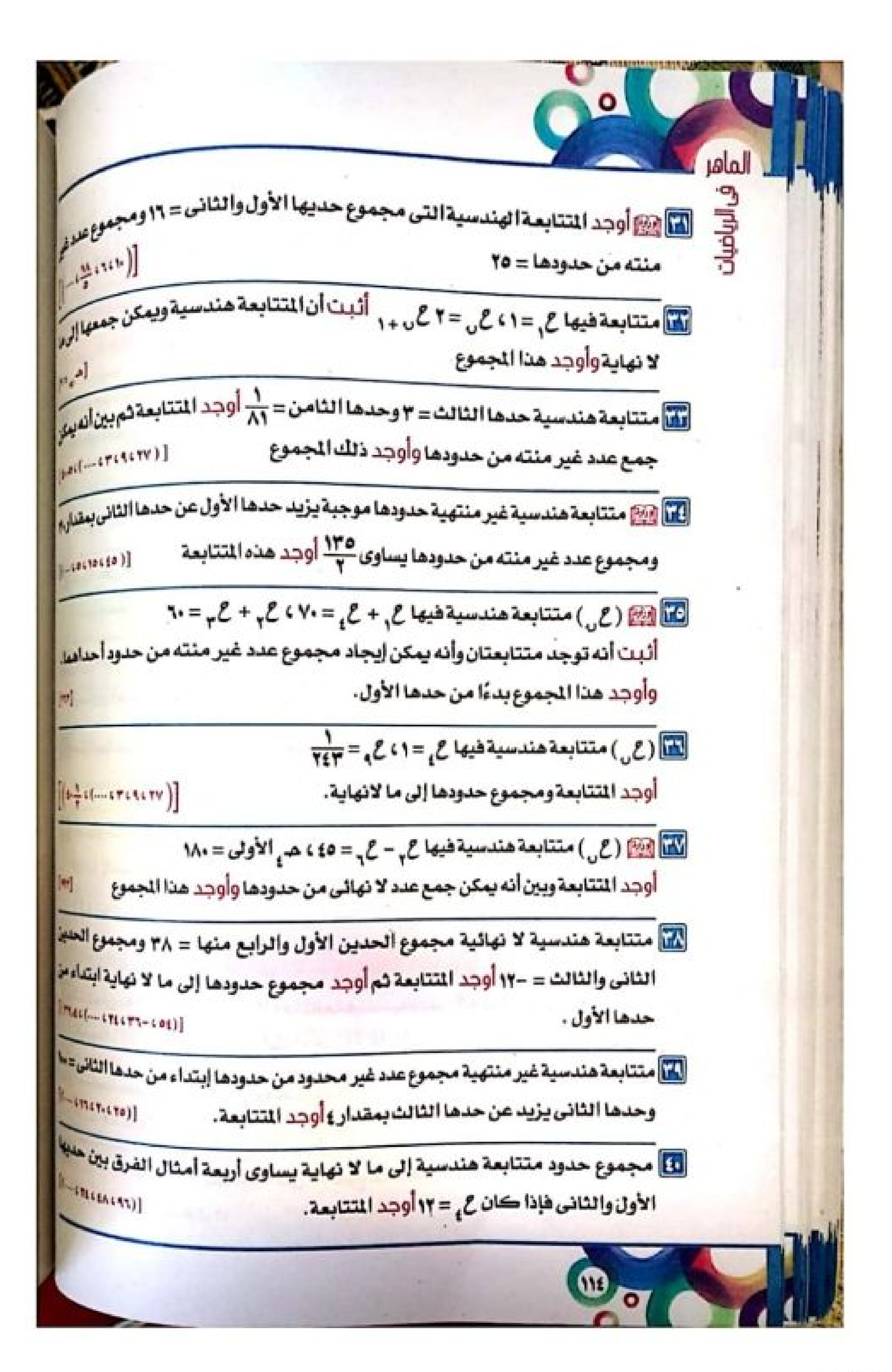
[(٢ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٨}{٩}$ ، .....)]

---

٣٠ **أوجد** المتتابعة الهندسية التى مجموع عدد غير منته من حدودها يساوى ٤٨ وحدها الثانى يساوى ١٢

[(٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...)]





٣١ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥

٣٢ متتابعة فيها $ح_١ = ١$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن+١}$ أثبت أن المتتابعة هندسية ويمكن جمعها إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع

٣٣ متتابعة هندسية حدها الثالث = ٣ وحدها الثامن = $\frac{١}{٨١}$ أوجد المتتابعة ثم بين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع

٣٤ متتابعة هندسية غير منتهية حدودها موجبة يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$ أوجد هذه المتتابعة

٣٥ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$
أثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود أحداهما وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول.

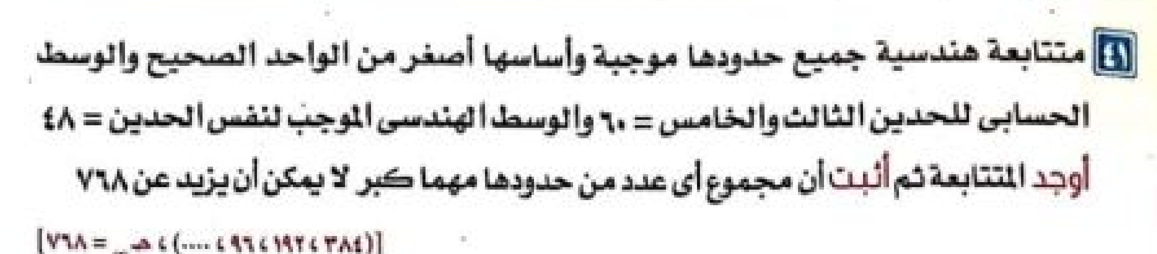
٣٦ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_٤ = ١$ ، $ح_٩ = \frac{١}{٢٤٣}$
أوجد المتتابعة ومجموع حدودها إلى ما لانهاية.

٣٧ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_٢ - ح_٦ = ٤٥$ ، $جـ_٤$ الأولى = ١٨٠
أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع

٣٨ متتابعة هندسية لا نهائية مجموع الحدين الأول والرابع منها = ٣٨ ومجموع الحدين الثانى والثالث = -١٢ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول.

٣٩ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع عدد غير محدود من حدودها إبتداء من حدها الثانى = ١٠٠ وحدها الثانى يزيد عن حدها الثالث بمقدار ٤ أوجد المتتابعة.

٤٠ مجموع حدود متتابعة هندسية إلى ما لا نهاية يساوى أربعة أمثال الفرق بين حديها الأول والثانى فإذا كان $ح_٤ = ١٢$ أوجد المتتابعة.



٤١ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد الصحيح والوسط الحسابى للحدين الثالث والخامس = ٦٠ والوسط الهندسى الموجب لنفس الحدين = ٤٨

أوجد المتتابعة ثم أثبت أن مجموع أى عدد من حدودها مهما كبر لا يمكن أن يزيد عن ٧٦٨

[(٣٨٤ ، ١٩٢ ، ٩٦ ، ....) ، $ج_\infty$ = ٧٦٨]

---

٤٢ إذا كانت (١ ، س ، ص ، ....) متتابعة حسابية ، (١ ، ص ، س ، ....) متتابعة هندسية فأحسب قيمة كل من س ، ص حيث س ≠ ص ≠ ١ ثم بين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية وأوجد هذا المجموع إبتداء من حدها الأول .

$\left[\frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٢} ، ج_\infty = \frac{٢}{٣}\right]$

---

٤٣ متتابعة هندسية غير منتهية وأى حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لانهاية إذا كان حدها الرابع = ٣ فأوجد هذه المتتابعة .

[(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ....)]

---

٤٤ متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ومجموع حديها الأول والثانى = ٩ أوجد هذه المتتابعة.

$\left[\left(٦ ، ٣ ، \frac{٣}{٢} ، ....\right)\right]$

---

٤٥ متتابعة هندسية لا نهائية حدودها موجبة فيها $ح_١$ = ١٦ ، $ح_٢ \times ح_٤$ = ١٦

أوجد المتتابعة ومجموع عدد لا نهائى من حدودها.

[(١٦ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ....) ، ٣٢]

---

٤٦ متتابعة هندسية لا نهائية مجموع عدد غير منته من حدودها = ١٦ ، $\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{١}{٢}$

أوجد المتتابعة.

[(٨ ، ٤ ، ٢ ، ....)]

---

٤٧ متتابعة هندسية فيها $ح_٢$ = ٥ ، $\frac{ح_٧}{ح_٤} = \frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها إبتداء من حدها الأول ثم أوجد هذا المجموع.

$\left[\left(١٥ ، ٥ ، \frac{٥}{٣} ، ....\right) ، ٢٢,٥\right]$

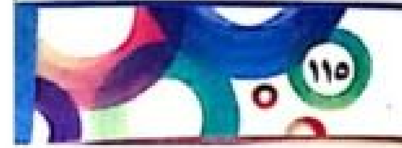
---

٤٨ إذا كانت ٤ ، ب ، جـ فى تتابع حسابى ، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة كل من ب ، جـ ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية (٥ جـ ، ب + ٣ ، ٢ ، ....)

[٧ ، ١٠ ، ٦٢,٥]

---

٤٩ ضع كلا من الكسور العشرية التالية على صورة كسر إعتيادى بإستخدام المتتابعة الهندسية : $٠,\overline{٧}$ ، $٠,\overline{٢٤}$ ، $٠,\overline{٨٦٣}$ ، $٠,\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٣}$ ، $٠,٤\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٦٥٤}$



٥٠ بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٦٪ من مرتب السنة السابقة أحسب مرتبه فى السنة السابعة ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى.

٥١ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) ٢ + ٤ + ٨ + ... + ١٢٨ = ... [١٢٧ أ ٢٥٤ أ ١٤٠٨ أ $\frac{٢٥٤}{٣}$]

(٢) $\frac{١}{٨١} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٩} +$ .... إلى ٦ حدود = ...

[$\frac{٢٣}{١٦}$ أ $\frac{٣٦٤}{٨١}$ أ $\frac{١٢١}{٨١}$ أ $\frac{٨١}{١٢١}$]

(٣) $\sum_{ر=١}^{٨} ٣(٢)^{ر-١}$ = ... [$\frac{٧٦٥}{٢}$ أ ٣٨١ أ ٥٦٧ أ ٧٦٥]

(٤) $\sum_{ر=٢}^{١٠} ٣\left(\frac{١}{٢}\right)^{١-ر}$ = ... [٦٣٥١ أ ٦٠٣٠ أ ٣٠٦٠ أ ١٥٣٦]

(٥) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٠ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ = ... [٤٠ أ ٨٠ أ ١٠٠ أ ٤٠٠]

(٦) مجموع المتتابعة اللانهائية (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ......) يساوى ....

[٧٢ أ ٦٤ أ ٤٨ أ ٢٤]

(٧) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو ١٣$\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى .... [٦ أ ٨ أ ٩ أ ١٢]

(٨) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى .... [$\frac{١}{٣}$ أ $\frac{١}{٢}$ أ $\frac{٧}{٨}$ أ $\frac{٣}{٤}$]

(٩) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ∞ فإن أساس هذه المتتابعة = ... [$\frac{١}{٢}$ أ $\frac{١}{٣}$ أ $\frac{١}{٤}$ أ $\frac{١}{٦}$]

(١٠) مجموع متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١ ، $ع_ن = ٣ ع_{ن+١}$ يساوى .... [$\frac{٢}{٣}$ أ $\frac{٣}{٢}$ أ ٢ أ ٣]

(١١) $(ع_ن)$ متتابعة هندسية فيها $\frac{ع_٧}{ع_٤} = \frac{١}{٢٧}$ ، $ع_٢ = ٥$ فإن مجموع عدد غير منته يساوى .... [١٥ أ $\frac{١٥}{٢}$ أ ٤٥ أ $\frac{٤٥}{٢}$]



رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٥٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ٢^{ن+١} - ٣$

فإن حدها الرابع = ... [٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤]

(٢) $٠,\overline{٧}$ = ... [$\frac{٧}{٩}$ ، $\frac{٩}{٧}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، $\frac{٣}{٧}$]

(٣) $٠,\overline{٢٤}$ = ... [$\frac{١٤}{٣٣}$ ، $\frac{١٤}{٩٩}$ ، $\frac{٨}{١١}$ ، $\frac{٨}{٣٣}$]

(٤) $٠,١\overline{٦}$ = ... [$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٣}$]

(٥) متتابعة هندسية مجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوي ....

[$\frac{أ^{٣}}{١-ر^{٣}}$ ، $\frac{أ^{٣}}{١-ر}$ ، $\frac{أ}{١-ر}$ ، $\frac{١-ر^{٣}}{أ^{٣}}$]

(٦) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول يساوي ١ فإن مجموع مربعات حدودها إلى

ما لانهاية يساوي .... [$\frac{١}{١-ر}$ ، $\frac{١}{١-ر^{٢}}$ ، $\frac{١}{١-ر^{٣}}$ ، $\frac{١}{ر^{٢}-١}$]

(٧) متسلسلة هندسية ، $جـ_{٨}$ الأولى = ٢٥٥ وأساسها = ٢ فإن حدها الأول = ...

[٨ ، ٤ ، ٢ ، ١]

(٨) متتابعة هندسية (٢م + ١ ، م − ١ ، م − ٣ ، ....) فإن مجموعها إلى ما لانهاية

= .... (حيث م > ١) [٩ ، ١٨ ، ٢٧ ، $\frac{٢٧}{٢}$]

(٩) إذا كانت س مجموع ن حدًا متتالية من متتابعة هندسية ، ص حاصل ضرب هذه

الحدود ، ع مجموع مقلوبات هذه الحدود فإن $\left(\frac{س}{ع}\right)^{ن}$ = ...

[ص ، $ص^{٢}$ ، $ص^{٣}$ ، $ص^{٤}$]

(١٠) س ، ص عددان موجبان ، أُدخل بينهما وسطان هندسيان موجبان ، أدخل بين س ، ص

أيضًا وسطان حسابيان آخريان وكان مجموع الوسطين الهندسيين = ١٨ ومجموع

الوسطين الحسابيين = ٢٧ فإن س + ص = ...

[٢١ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٣٠]





٥٣ إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة هندسية بين أن المتتابعة ($ح'_ن$) حيث $ح'_ن$ = $لو_ه ح_ن$ تكون متتابعة حسابية وإذا كان $ح_ن = ٢ \times ٥^ن$ فأوجد مجموع حدود كل من المتتابعتين ($ح_ن$) ، ($ح'_ن$) إلى ٢٥ حدًا .

[$٧٫٤٥ \times ١٠^{١٧}$ ، ٣٢٥٫٨]

٥٤ متتابعة هندسية أساسها ر ومجموع ١٨ حدًا الأولى منها يزيد بمقدار ٢١ عن مجموع ١٢ حدًا الأولى منها أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها بدلالة ر

[$٢١ ر^{-٣٠}$]

٥٥ متتابعة هندسية فيها $ح_١ = ٢$ ، $ح_ن = ٢٥٦$ ، $جـ_ن = ٥١٠$ أوجد قيمة ن

[ن = ٨]

٥٦ أوجد مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية :

[$\left(\frac{٣}{١١}\right)$ ، $\left(\frac{٣}{١١}\right)^٣$ ، $\left(\frac{٣}{١١}\right)^٥$ ، ......] ابتداء من حدها الأول .

[$\frac{٣٣}{١١٢}$]

٥٧ متتابعة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر وعدد حدودها ن ، إذا كان مجموع حدود هذه المتتابعة جـ فأثبت أن مجموع مقلوبات هذه الحدود = $\frac{جـ}{أ^٢ ر^{ن - ١}}$

٥٨ إذا كان $جـ_ن$ هو مجموع ن حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ......) ، $جـ'_ن$ مجموع ن حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية (١ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ......) حيث ن عدد زوجى أثبت أن $جـ'_ن = \frac{١}{٣} جـ_ن$ ثم أوجد النسبة بين $ح_ن$ ، $ح'_ن$

[-١]

الوحدة الثانية

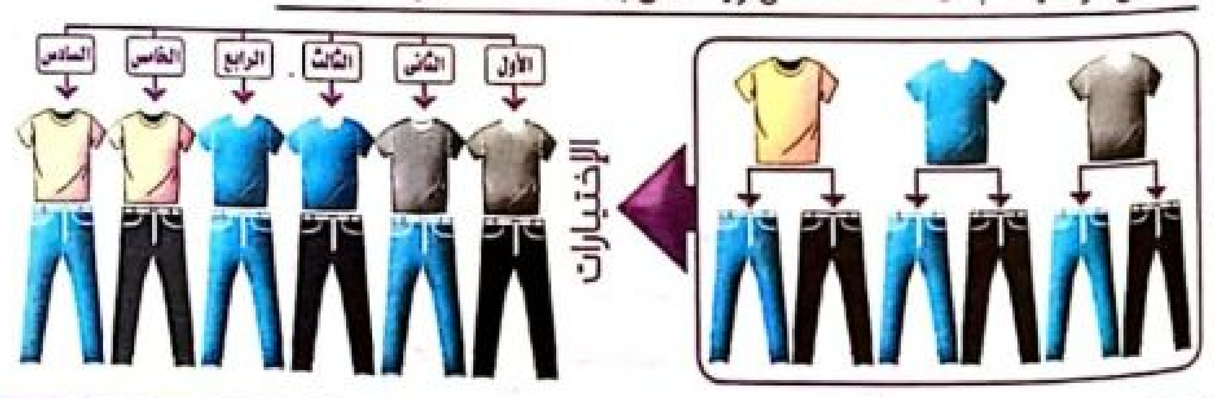
الدرس ١ مبـدأ العـد

مبدأ العد الأساسى

تمهيد كثيرًا ما نحتاج إلى معرفة عدد الطرق المختلفة التى يمكن أن نرتب بها مجموعة من الثياب المختلفة لإرتدائها لذلك فدراسة مبدأ العد يفيدينا فى معرفة عدد الطرق.

فمثلاً إذا كان لدى شخص ٣ تى شيرت ألوانهم هى [رمادى ، أزرق ، أصفر] ، ٢ بنطلون ألوانهم هى [أسود ، أزرق] فبكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص فى زى مكون من تى شيرت وبنطلون.

بالتفكير قليلاً نجد أن كل تى شيرت يمكن أرتدائه مع بنطلون من البنطلونين ويمكن توضيحه بالمخطط التالى ويسمى بمخطط الشجرة البيانية.





أى أن عدد طرق الإختيار ٦ طرق مختلفة ويمكن معرفة ذلك أيضًا بصورة سهلة ومبسطة كما يلى :

عدد طرق إختيار تى شيرت = ٣ طرق ، عدد طرق إختيار بنطلون = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الإختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

ومن ذلك يمكن إستنتاج القاعدة التالية :

مبدأ العد الأساسى

إذا أمكن إجراء عملية بطرق مختلفة عددها م وكان لدينا فى نفس الوقت عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق مختلفة عددها ن فإن عدد طرق إجراء العمليتين معًا = م × ن

ويمكن تعميم القاعدة كما يلى :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثان $م_2$ طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث $م_3$ طريقة وهكذا إلى عدد طرق عمل ن هو $م_ن$ طريقة فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times .... \times م_ن$

مبدأ العد المشروط

مبدأ العد المشروط هو نفس مبدأ العد ولكننا نبدأ أولا بالخانة المشروطة لنعرف عدد الطرق التى تحقق هذا الشرط ثم الخانة التالية التى بها شرط ونعرف عدد الطرق التى تحققها هى أيضًا وهكذا .

فمثلاً

إذا كان لدينا الأرقام { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ونريد تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة فبكم طريقة يمكن ذلك ؟

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٤

وللرد على هذا السؤال فإننا نبدأ بالخانة المشروطة أولاً وهى الخانة اليسرى خانة المئات لأنه لا يمكن إستخدام الصفر جهة اليسار وإلا أصبح العدد مكون من رقمين فقط لذلك فإنه يمكن وضع ٤ أرقام فقط فى هذه الخانة

∴ عدد طرق إختيار الرقم فى خانة المئات = ٤

وبعد إختيار قيمة فى خانة المئات يتبقى ٤ أرقام فقط نختار من بينهم لخانة العشرات

∴ عدد طرق إختيار الرقم فى خانة العشرات = ٤ وبعد إختيار رقم فى خانة المئات ورقم فى خانة العشرات يتبقى ٣ أعداد فقط نختار من بينهم لخانة الآحاد



∴ عدد طرق إختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٣

∴ عدد الطرق الكلية = ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة

مثال (١)

مول تجارى له ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من المول بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أى باب دخل منه ؟

الحل

عدد طرق الدخول إلى المول = ٣ طرق ،

عدد طرق الخروج من المول = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الإختيار = ٣ × ٢ = ٦ طرق

الدخول	الخروج	الإختيار
أ	ب	أ ، ب
	هـ	أ ، هـ
ب	أ	ب ، أ
	هـ	ب ، هـ
هـ	أ	هـ ، أ
	ب	هـ ، ب



مثال (٢)

كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر { ٢ ، ٦ } ورقم العشرات من العناصر { ٣ ، ٥ } ورقم المئات من العناصر { ١ ، ٤ ، ٧ }

الحل

خانة الآحاد	خانة العشرات	خانة المئات	العدد
٢	٣	١	١٣٢
		٤	٤٣٢
		٧	٧٣٢
	٥	١	١٥٢
		٤	٤٥٢
		٧	٧٥٢
٦	٣	١	١٣٦
		٤	٤٣٦
		٧	٧٣٦
	٥	١	١٥٦
		٤	٤٥٦
		٧	٧٥٦



من الشجرة البيانية :

عدد طرق الإختيار = عدد طرق رقم الآحاد × عدد طرق رقم العشرات × عدد طرق رقم المئات

= ٢ × ٢ × ٣ = ١٢ طريقة

مثال ٣

ثلاثة أشخاص وصلوا إلى محافظة الأقصر فيها أربعة فنادق فما عدد الطرق التي بها يمكن نزول كل شخص في أحد هذه الفنادق وحده.

الحل

الشخص الأول يستطيع أن يختار أحد أربعة فنادق

∴ عدد طرق إختيار الشخص الأول = ٤ طرق

وعندما يختار فندقًا معينًا فإن الشخص الثاني لا يجد أمامه سوى أن يختار فندقًا من بين الثلاثة الباقية

∴ عدد طرق إختيار الشخص الثاني = ٣ طرق

وبالتالي عدد طرق اختيار الشخص الثالث = ٢ طريقة

∴ عدد الطرق المختلفة = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ طريقة

مثال ٤

دخل يوسف مطعم لتقديم الوجبات الجاهزة فكان المطعم يقدم ٥ أنواع من الوجبات الساخنة و ٣ أنواع من السلطات و ٤ أنواع من المشروبات كم عدد الوجبات التي يمكن أن يقدمها يوميًا هذا المطعم على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من الوجبات الساخنة والسلطات والمشروبات ؟

الحل

عدد طرق الإختيار = ٥ × ٣ × ٤ = ٦٠ طريقة





مثال

نسيت رحاب الرقم الخاص بها لدخول الأنترنت وكان لديها المعلومات التالية :

① يتكون العدد من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

② العدد مكون من خمسة أرقام . ③ العدد زوجى.

فما هى عدد الخيارات الممكنة أمام رحاب لإستعادة رقمها ؟ إذا علم أن الأرقام لا تتكرر

الحل

(لاحظ أن الأرقام محدودة ولا تتكرر) عدد خانات العدد خمسة :

الخانة الأولى	الخانة الثانية	الخانة الثالثة	الخانة الرابعة	الخانة الخامسة
٣	٤	٣	٢	١
الأعداد الزوجية (٢،٤،٦)	سبق أن تم إختيار رقم من ٥ أرقام	وهكذا		

نبدأ بخانة الأحاد المشروطة (العدد زوجى ٢ ، ٤ ، ٦)

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الأولى = ٣ طرق

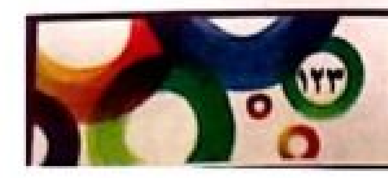
عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الثانية = ٤ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الثالثة = ٣ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الرابعة = ٢ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الخامسة = ١ طرق

عدد الطرق (الإختيارات) = ٣ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢ طريقة



مثال ٦

كم عددًا من خمس خانات تبدأ بعدد فردى يمكن تكونيها من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ دون تكرار

الحل

تبدأ بخانة الأحاد المشروطة (١، ٣، ٥ لأن العدد فردى)

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة الأحاد (الأولى) = ٣ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة العشرات (الثانية) = ٥ طرق

وهى باقى الأرقام بعد الإختيار الأول (٥ أرقام)

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الثالثة = ٤ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الرابعة = ٣ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى الخانة الخامسة = ٢ طريقة

∴ عدد الطرق = ٣ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ٣٦٠ طريقة

مثال ٧

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا.

الحل

نبدأ بالخانة المشروطة وهى خانة العشرات

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة العشرات زوجيًا {٢، ٤} = ٢ طريقة

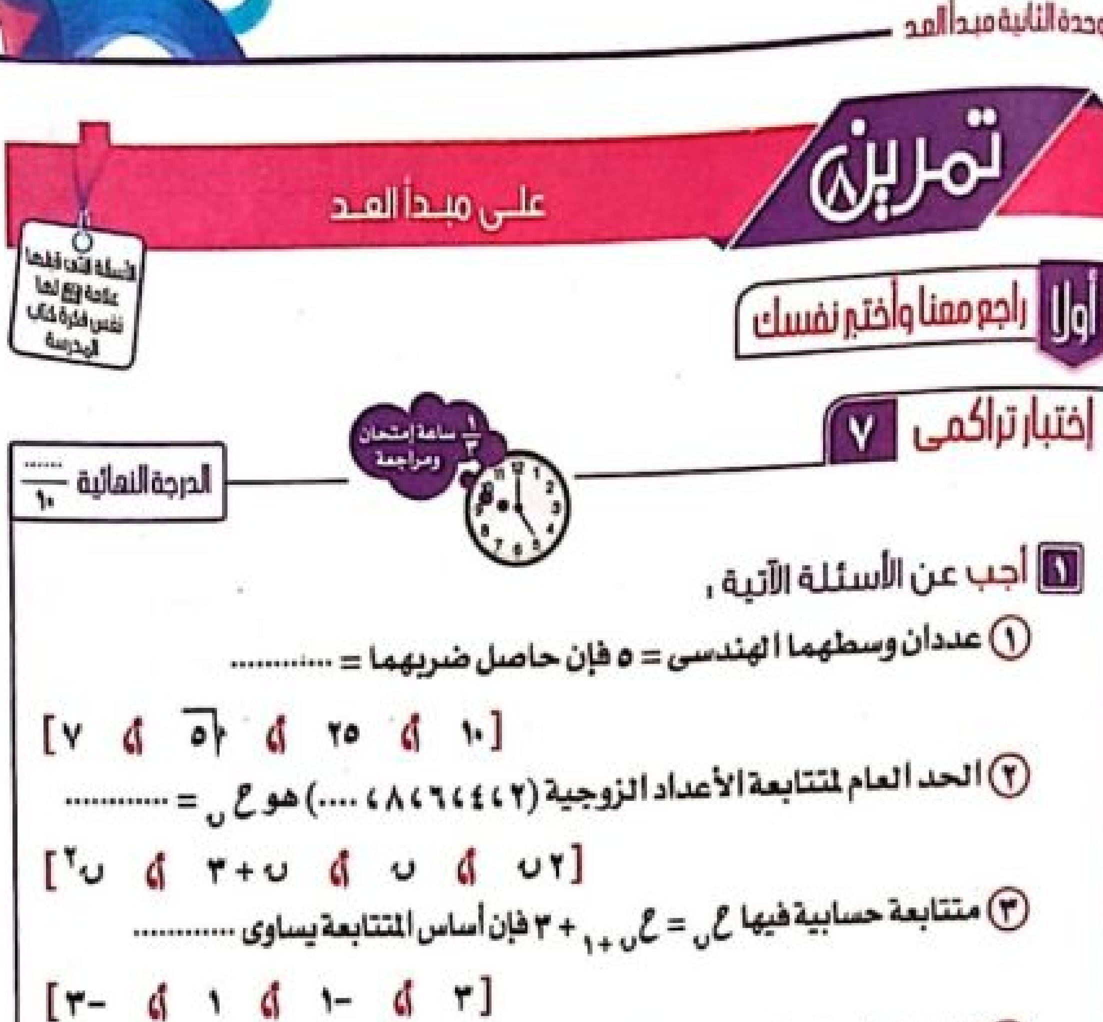
عدد طرق إختيار الرقم فى خانة الأحاد = ٣ طرق

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة المئات = ٢ طريقة

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة الألف = ١ طريقة

∴ عدد طرق الإختيار = ٢ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢ طريقة





تمرين ٨ على مبدأ العد

الأسئلة التي قبلها علامة لها نفس فكرة كتاب المدرسة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ٧

$\frac{1}{3}$ ساعة امتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{......}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① عددان وسطهما الهندسي = ٥ فإن حاصل ضربهما = ...

[١٠ ، ٢٥ ، $\sqrt{٥}$ ، ٧]

② الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....) هو $ح_ن$ = ...

[٢ن ، ن ، ن + ٢ ، $ن^٢$]

③ متتابعة حسابية فيها $ح_ن = ح_{ن+١} + ٣$ فإن أساس المتتابعة يساوي ....

[٣ ، -١ ، ١ ، -٣]

④ إذا كان الوسط الهندسي للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن ص = ...

[٦ ، ٢١ ، ٢٥ ، -٢٥]

---

⑤ **أوجد** مجموع حدود المتتابعة الهندسية $(ح_ن) = (٣^{ن-١})$

ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر.

....

....

....

---

⑥ **أوجد** المتتابعة الهندسية التي مجموع عدد غير منته من

حدودها يساوي ٤٨ ، حدها الثاني يساوي ١٢

....

....

....



ثانيا مسائل المستوى الاول

٢ جامعة لها ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة الدخول والخروج من الجامعة بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أى باب دخل منه ؟

[٦]

٣ كم عدد الإختيارات التى يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروبًا واحدًا من المشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو)

[٩]

٤ مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلاطات ، ٣ أنواع من المشروبات كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يوميًا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلطات والمشروبات.

[٧٢]

٥ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الأحاد من العناصر {١ ، ٢} ورقم العشرات من العناصر {٣ ، ٤} ورقم المئات من العناصر {٥ ، ٦ ، ٧}

[١٢]

ثالثا مسائل المستوى الثانى

٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

① عدد طرق جلوس ٣ أشخاص على ثلاثة مقاعد فى صف = ...

[١ أ ٣ أ ٦ أ ٩]

② عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إذا سمح بالتكرار يساوى ....

[٥ أ ٢٥ أ ١٥ أ ١٢٥]

③ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} بدون تكرار يساوى ....

[٥ أ ٢٥ أ ٦٠ أ ١٢٥]

٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

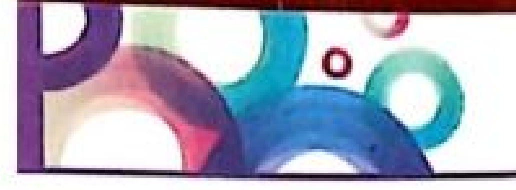
① عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

[١ أ ٤+٤ أ ٤×٤ أ ٤×٣×٢×١]

② عدد طرق نزول ٣ أشخاص فى أربعة فنادق حيث ينزل كل شخص فى أحد هذه الفنادق وحده يساوى ....

[٤×٣ أ ٤×٢ أ ٣×٢×١ أ ٤×٣×٢]





③ عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٥ ، ٣ ، ٠ ، ٢}

يساوى ....

[٣ × ٢ أ ٤ × ٢ أ ٣ × ٣ أ ٣ × ٤]

④ عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات مختلفة مأخوذة من الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

تساوى ....

[٤ × ٣ × ٢ × ١ أ ٥ × ٤ × ٣ × ٢ أ ٣ × ٤ × ٥ × ٦ أ ٧ × ٦ × ٥ × ٣]

⑤ عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات مختلفة تبدأ كل منها بالرقم ٦ مأخوذة من الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} تساوى ....

[١ × ٤ × ٣ × ٢ أ ٤ × ٣ × ٢ × ٦ أ ٦ × ٥ × ٤ × ٣ أ ١ × ٣ × ٢]

⑥ عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨} تساوى ....

[٨ × ٦ × ٣ أ ٤ × ٣ × ٣ أ ٤ × ٣ × ٢ أ ١ × ٣ × ٢]

---

٨ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٥} [٢٧]

٩ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} [٦٤]

١٠ كم عددًا من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ دون تكرار الرقم ؟ [١٢٠]

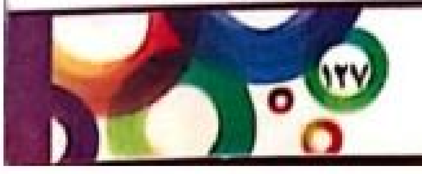
١١ كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨} بحيث يكون رقم الأحاد ٦ ؟ [٦]

١٢ كم عددًا من خمس خانات تبدأ بعدد فردى يمكن تكوينها من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ دون تكرار. [٣٦٠]

١٣ كم عددًا من خمس أرقام تبدأ بالرقم ١ وتنتهى بالرقم ٥ من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} دون تكرار . [٦]

١٤ بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من ثلاثة أحرف من كلمة شجرة ؟ [٢٤]

١٥ بكم طريقة يمكن أخذ صورة تذكارية لعائلة مكونة من أب وأم وثلاثة أطفال يقفون معًا فى صف واحد ؟ [١٢٠]



١٦ بكم طريقة لطفل لديه ٥ مجسمات هى كرة ، مخروط ، مكعب ، أسطوانة ، هرم ترتيب هذه المجسمات فى صف واحد.

[١٢٠]

١٧ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص.

[٩٩٠٦٦٢٤]

١٨ بطاقة الصرف الآلى (فيزا كارت) تحتوى على أربعة أرقام من الأرقام ٠ إلى ٩ كم بطاقة مختلفة يمكن إنتاجها ؟

[١٠٠٠٠]

١٩ بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررين دراسيين الأول فى الهندسة والثانى فى الجبر إذا كان مطروحًا له ٦ مقررات فى الهندسة ، ٣ مقررات فى الجبر ؟

[١٨]

٢٠ كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٩ } بحيث تكون أصغر من ٩٠٠ ؟

[١٨]

٢١ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات المحمول ؟

[١٠٠٠٠٠٠٠٠]

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢٢ كم عددًا يمكن تكوينه من أربعة أرقام مختلفة وتحتوى على الرقمين ٠ ، ٨ ؟ [٨٠]

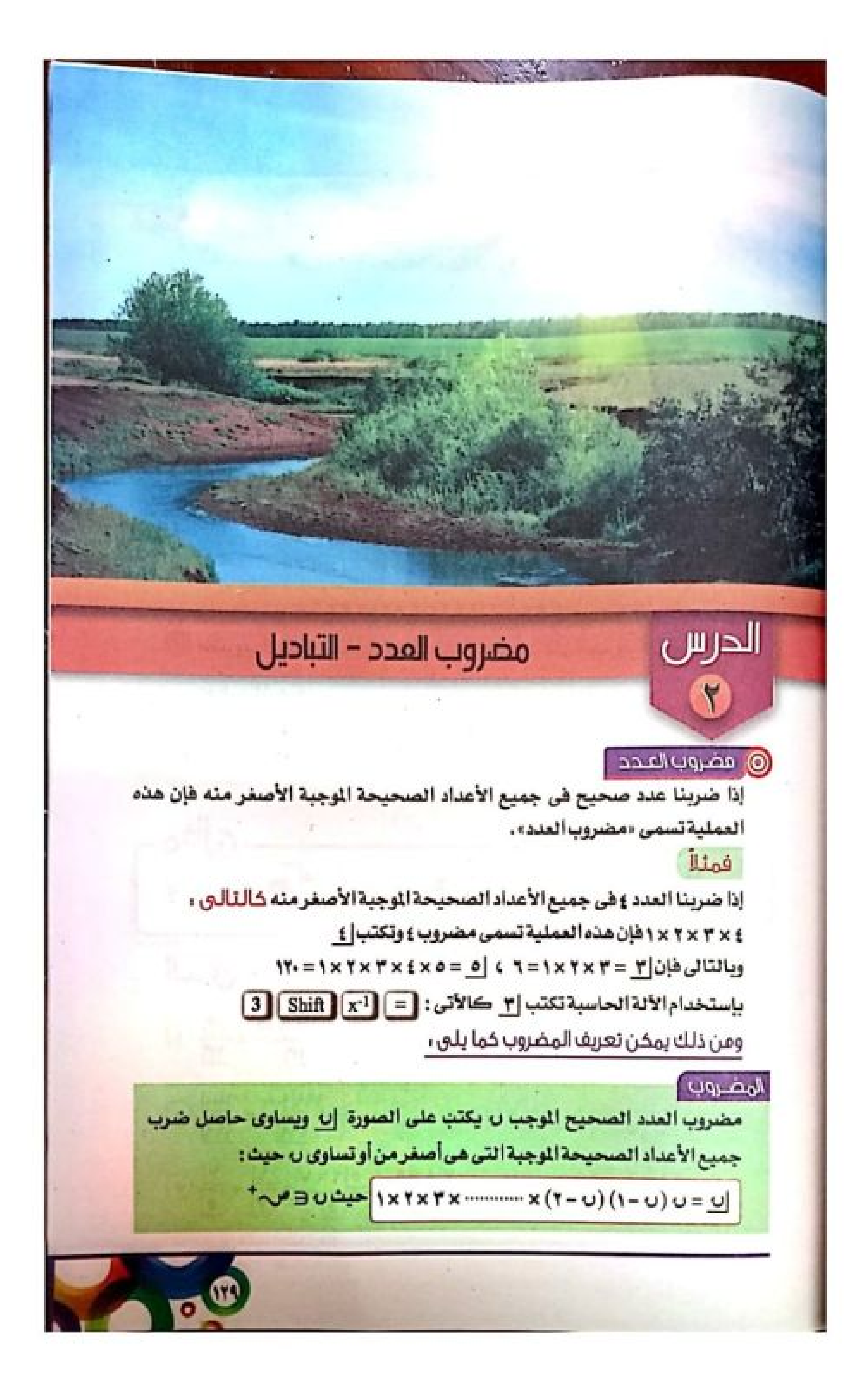
٢٣ بكم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مختلفة من الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } بحيث لا يتجاوز عددين زوجيين ولا عددين فرديين ؟

[٧٢]

٢٤ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ وتكون محصورة بين ١٠٠٠ و ٧٠٠٠ ولا يكون عددًا فرديًا ؟

[٢٩٩٩]





الدرس ٢

مضروب العدد - التباديل

مضروب العدد

إذا ضربنا عدد صحيح فى جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه فإن هذه العملية تسمى «مضروب العدد».

فمثلاً

إذا ضربنا العدد ٤ فى جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه كالتالى،

٤ × ٣ × ٢ × ١ فإن هذه العملية تسمى مضروب ٤ وتكتب |٤

وبالتالى فإن |٣ = ٣ × ٢ × ١ = ٦ ، |٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

بإستخدام الآلة الحاسبة تكتب |٣ كالآتى: [=] [x^{-1}] [Shift] [3]

ومن ذلك يمكن تعريف المضروب كما يلى،

المضروب

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة |ن ويساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أصغر من أو تساوى ن حيث:

|ن = ن (ن - ١) (ن - ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن ∈ ص$^+$

ملاحظات هامة

١) عندما ن = ٠ فإن $٠! = ١$ ، عندما ن = ١ فإن $١! = ١$ ومن ذلك فإنه إذا كان $\text{ن}! = ١$ فإن ن = ٠ أو ن = ١

٢) أكبر عوامل $\text{ن}!$ هو ن وأصغرهم هو الواحد.

٣) $\text{ن}! = \text{ن}\,(\text{ن} - ١)!$ حيث ن ∈ ص^{+}

$$\text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)! = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)!$$

أى أنه يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه.

فمثلاً $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$$= ٦ \times (٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) = ٦ \times ٥!$$

$$= ٦ \times ٥ \times (٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) = ٦ \times ٥ \times ٤!$$

٤) مضروب أي عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه.

فمثلاً $\frac{٤!}{٣!} = \frac{٤ \times ٣!}{٣!} = ٤$ ، $\frac{٦!}{٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٤!} = ٣٠$

مثال ١

أوجد قيمة : ١) $\frac{١٥!}{١٣!}$ ٢) $\frac{١٠٠٠!}{٩٩٩!}$ ٣) $\frac{٧!}{٥!} + \frac{٩!}{٧!}$

الحل

١) $\frac{١٥!}{١٣!} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣!}{١٣!} = ٢١٠$

٢) $\frac{١٠٠٠!}{٩٩٩!} = \frac{١٠٠٠ \times ٩٩٩!}{٩٩٩!} = ١٠٠٠$

٣) $\frac{٧!}{٥!} + \frac{٩!}{٧!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥!}{٥!} + \frac{٩ \times ٨ \times ٧!}{٧!} = ٤٢ + ٧٢ = ١١٤$



مثال ٢

إذا كان: $\underline{|\text{ن}} = ٢٤$ فما قيمة: ن ؟

الحل

$\underline{|\text{ن}} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\because \underline{|\text{ن}} = \underline{|٤}$ $\boxed{\therefore \text{ن} = ٤}$

٢٤	١
٢٤	٢
١٢	٣
٤	٤

لمعرفة العدد الذى مضروبه **٢٤** نقسم على **١** ثم على **٢** ثم على **٣** وهكذا إلى أن نصل إلى ناتج القسمة = **١**

مثال ٣

إذا كان: $\underline{|\text{ن}+٢} : \underline{|\text{ن}} = ٤٢$ أوجد قيمة: ن

الحل

$\frac{\underline{|\text{ن}+٢}}{\underline{|\text{ن}}} = ٤٢$ $\therefore \frac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = ٤٢$

$(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١) = ٤٢$ $\therefore \text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ٢ - ٤٢ = ٠$

$\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} - ٤٠ = ٠$ $\therefore (\text{ن}+٨)(\text{ن}-٥) = ٠$

$\text{ن} = -٨$ (مرفوض) ، $\boxed{\therefore \text{ن} = ٥}$

مثال ٤

إذا كان: $\frac{١}{\underline{|\text{ن}}} + \frac{١}{\underline{|\text{ن}-١}} + \frac{١}{\underline{|\text{ن}-٢}} = \frac{٣٦}{\underline{|\text{ن}}}$ فأوجد قيمة: ن

الحل

$$\frac{١}{\text{ن}(\text{ن}-١)\underline{|\text{ن}-٢}} + \frac{١}{(\text{ن}-١)\underline{|\text{ن}-٢}} + \frac{١}{\underline{|\text{ن}-٢}} = \frac{٣٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{١}{\underline{|\text{ن}-٢}}\left(\frac{١}{\text{ن}(\text{ن}-١)} + \frac{١}{\text{ن}-١} + ١\right) = \frac{٣٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{١}{\underline{|\text{ن}-٢}}\left(\frac{١ + \text{ن} + \text{ن}(\text{ن}-١)}{\text{ن}(\text{ن}-١)}\right) = \frac{٣٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{1}{\underline{|\text{ن}-2}}\left(\frac{1+\text{ن}+\text{ن}^{2}-\text{ن}}{\text{ن}(\text{ن}-1)}\right)=\frac{٢٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{1}{\underline{|\text{ن}-2}}\left(\frac{\text{ن}^{2}+1}{\text{ن}(\text{ن}-1)}\right)=\frac{٢٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{\text{ن}^{2}+1}{\text{ن}(\text{ن}-1)\underline{|\text{ن}-2}}=\frac{٢٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{\text{ن}^{2}+1}{\underline{|\text{ن}}}=\frac{٢٦}{\underline{|\text{ن}}}$$

$\text{ن}^{2}+1=٢٦$ $\therefore \text{ن}^{2}=٢٥$

$\therefore \text{ن}=٥$ (لأن $\text{ن}\in$ ص$^{+}$)

مثال

إذا كان: $\frac{\underline{|\text{ن}-٥}}{٦}=\frac{\underline{|٥}}{\underline{|\text{ن}-٤}}$ **أوجد قيمة ، ن**

الحل

$(\text{ن}-٤)\underline{|\text{ن}-٥}=٦\underline{|٥}$ $\therefore \underline{|\text{ن}-٤}=\underline{|٦}$

$\therefore \text{ن}-٤=٦$ $\therefore \text{ن}=١٠$

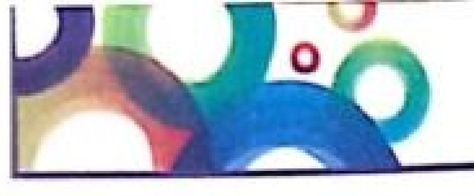
التباديل

إذا كان لدى أحد محلات الأزياء ٦ ألوان لموديل معين من القمصان وأراد ثلاثة أشخاص إختيار ثلاثة منها بألوان مختلفة.

فبكم طريقة يمكن إختيار هذه الألوان الثلاثة معًا ؟

بالطبع فإن الشخص الأول يمكنه إختيار أى لون من الستة ألوان أى أن له ٦ طرق للإختيار
أما الشخص الثانى فيختار بعده لون من الخمسة ألوان الباقية أى أن له ٥ طرق للإختيار
أما الشخص الثالث فيختار بعدهما لون من الأربعة ألوان الباقية أى أن له ٤ طرق للإختيار
فيكون عدد طرق إختيار الألوان الثلاثة معًا = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ طريقة
وكل ثلاثة ألوان تم إختيارهم معًا يسمى تبديلاً لستة ألوان مأخوذة ثلاثة ثلاثة فى كل مرة ويرمز لذلك بالرمز $^{٦}\text{ل}_{٣}$ وتقرأ «ستة لام ثلاثة».





أى أن $^{6}ل_{3} = 6 \times 5 \times 4$ تكتب بالآلة الحاسبة كالآتى :

6 Shift X 3 =

أى أن $^{6}ل_{3}$ تعنى حاصل ضرب عدة عوامل عددها ٣ تبدأ بالعدد ٦ وكل عامل ينقص واحد عن سابقه.

فمثلاً $^{5}ل_{2} = 5 \times 4$ عدد العوامل ٢ ويبدءان بالعدد ٥ والعدد الذى قبله ٤

$^{7}ل_{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4$ نضرب العدد ٧ × العدد الذى قبله وهكذا إلى ٤ عوامل

مما سبق نستنتج أن : كل طريقة من طرق الإختبار تسمى تبديلة وتعرف كما يلى :

التبديلة

التبديلة لعدد من الأشياء هى وضعها فى ترتيب معين.

ويمكن صياغتها رياضيًا بالتعريف التالى :

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتميزة مأخوذة ر من العناصر فى كل مرة بالرمز

$^{ن}ل_{ر}$ حيث : $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2)\ldots\ldots(ن-ر+1)$

حيث : $ر \leq ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

أى أن الرمز $^{ن}ل_{ر}$ ويقرأ « ن لام ر » يدل على عدد تباديل « ن » من الأشياء المختلفة مأخوذة منها « ر » من الأشياء فى كل مرة حيث $ر \leq ن$

أى أن $^{ن}ل_{ر}$ = عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من ن من الأشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على ر من هذه الأشياء

فمثلاً $^{5}ل_{3}$ = عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من ٥ أشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على ٣ من هذه الأشياء فى كل مرة

أى أن $^{5}ل_{3} = 5 \times 4 \times 3$ (لاحظ أن العدد الأخير $= (5 - 3 + 1) = 3$)

$^{5}ل_{4}$ = عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من ٥ أشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على ٤ من هذه الأشياء فى كل مرة.



أى أن $^{5}ل_{4} = 5 \times 4 \times 3 \times 2$ (لاحظ أن العدد الأخير = $(5 - 4 + 1) = 2$)

أى أن العامل الأخير فى حاصل الضرب هو $(ن - ر + 1)$

أى يزيد واحد عن الفرق بين ن ، ر

لاحظ أن $^{6}ل_{3} = 6 \times 5 \times 4$ وإذا ضربنا البسط والمقام فى $3 \times 2 \times 1$

فإن : $^{6}ل_{3} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$ وحيث أن : $\underline{|6} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

و $\underline{|3} = 3 \times 2 \times 1$ فإن : $^{6}ل_{3} = \frac{\underline{|6}}{\underline{|3}}$

أو بصورة أخرى $^{6}ل_{3} = \frac{\underline{|6}}{\underline{|6 - 3}}$

وبنفس الطريقة فإن : $^{7}ل_{5} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{\underline{|7}}{\underline{|2}} = \frac{\underline{|7}}{\underline{|7 - 5}}$

مما سبق نستنتج أن : $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ≤ ن

لاحظ أن $^{ن}ل_{ر}$ له صورتان فإذا كانت ر معلومة يفضل إستخدام الصورة :

$^{ن}ل_{ر} = ن (ن - 1) (ن - 2) .... (ن - ر + 1)$

فمثلاً $^{ن}ل_{2} = ن (ن - 1)$

أما إذا كانت ر مجهولة فيفضل استخدام الصورة : $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$

فمثلاً $^{4}ل_{ر} = \frac{\underline{|4}}{\underline{|4 - ر}}$ ومنها $^{ن}ل_{0} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - 0}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن}} = 1$

أى أن $^{ن}ل_{0} = 1$



ملاحظات ① $^{ن}ل_{1} = ن$ ② $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$

وبمكن تلخيص قوانين التباديل فيما يلى :

ملخص قوانين التبادل

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)\ldots\times(ن-ر+١)$ ويستخدم إذا كانت ر معلومة حيث $١ \leqslant ر \leqslant ن$ ، ر ، ن $\in$ ص$^+$

(٢) $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)\ldots\times ٣\times٢\times١$ ، ن عدد العوامل والحد الأخير = ١

(٣) $\underline{|ن} = ن\underline{|ن-١} = ن(ن-١)\underline{|ن-٢} = \ldots$ ويستخدم غالبًا لإختصار المضروبات.

(٤) $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ ويستخدم إذا كانت ر مجهولة غالبًا

(٥) $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$ ، $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$

ملاحظات هامة

يمكن أن نستدل فى المسائل اللفظية على التباديل من خلال الجمل التالية :

(١) إختيار لجنة للقيام بأعمال مختلفة *(تحديد وظيفة كرئيس ونائب)*

(٢) الإختيار على التتالى *(واحد وراء آخر)*

(٣) غير مسموح بالتكرار *(التباديل الترتيب فيما هام)*

(٤) السحب بدون إرجاع *(بدون إحلال)*

(٥) توزيع عناصر على أماكن بحيث يشغل كل عنصر مكان واحد فى نفس الوقت.

مثال (١)

أوجد قيمة : (١) $^{٩}ل_{٤}$ (٢) $^{٣}ل_{٣}$ (٣) $^{٤}ل_{٤} - \underline{|٤}$

الحل

(١) $^{٩}ل_{٤} = ٩\times٨\times٧\times٦ = ٣٠٢٤$

(٢) $^{٣}ل_{٣} = ٣\times٢\times١ = ٦$

(٣) $^{٤}ل_{٤} - \underline{|٤} = \underline{|٤} - \underline{|٤} =$ صفر



إستخدام الحاسبة :

يرمز للتباديل بالحاسبة العملية بالرمز $^{n}P_{r}$ ونستخدم فيها المفاتيح X Shift

لحساب قيمة $^{٩}ل_{٤}$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح الآتية :

9 Shift X 4 = 3024

مثال (٢)

إذا كان : $^{٦}ل_{ر} = ٧٢٠$ فأوجد : $\underline{|ر - ٤}$

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٧٢٠ على ٦ ثم نقسم العدد الناتج على ٥

ثم نقسم العدد الناتج على ٤ ثم نقسم العدد الناتج على ٣

ثم نقسم العدد الناتج على ٢ حتى نصل إلى العدد ١

٧٢٠	٦
١٢٠	٥
٢٤	٤
٦	٣
٢	٢
١	

$\therefore$ العدد $٧٢٠ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢$

$\therefore {}^{٦}ل_{ر} = {}^{٦}ل_{٥}$

$\therefore ر = ٥$

$\therefore \underline{|ر - ٤} = \underline{|٥ - ٤} = \underline{|١} = ١$

مثال (٣)

إذا كان : $^{م}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{م+ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ فأوجد : م ، ن

الحل

من المفترض وجود ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهم ٢١٠

حيث أن العدد رقم آحاده «صفر» فإننا نبدأ القسمة

بالرقم «٥» ثم نحاول العدد التالى له «٦» وهكذا ويمكن

تقسيمه بأى صورة لإيجاد ٣ أعداد متتالية حاصل

ضربهم يساوى ٢١٠

٢١٠	٥
٤٢	٦
٧	٧
١	

$\therefore {}^{م}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥$



$\therefore {}^{ر}ل_{٣} = {}^{٧}ل_{٣}$ $\qquad$ $\boxed{\therefore ر = ٧}$

$ {}^{ر+ن}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore {}^{ر+ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$ $\qquad$ $\therefore ر + ن = ١٠$

$٧ + ن = ١٠$ $\qquad$ $\boxed{\therefore ن = ٣}$

٧٢٠	١٠
٧٢	٩
٨	٨
١	

مثال ٤

إذا كان: ${}^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٢٦$ فأوجد قيمة: $\underline{|ن+١} : \underline{|ن-١}$

الحل

${}^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٢٦$ $\qquad$ $\therefore ١ + ن + ن(ن-١) = ٢٦$

$١ + ن + ن^{٢} - ن - ٢٦ = ٠$ $\qquad$ $\therefore ن^{٢} - ٢٥ = ٠$

$\therefore ن^{٢} = ٢٥$ $\qquad$ $\boxed{\therefore ن = ٥}$

$\therefore \underline{|ن+١} : \underline{|ن-١} = \underline{|٦} : \underline{|٤} = \frac{٦ \times ٥ \underline{|٤}}{\underline{|٤}} = ٣٠$

مثال ٥

إذا كان: ${}^{ن+١}ل_{٤} = ١٠ \, {}^{ن}ل_{٢}$ فأوجد قيمة: ن

الحل

${}^{ن+١}ل_{٤} = ١٠ \, {}^{ن}ل_{٢}$ $\qquad$ $\therefore (ن+١)(ن)(ن-١)(ن-٢) = ١٠ ن (ن-١)(ن-٢)$

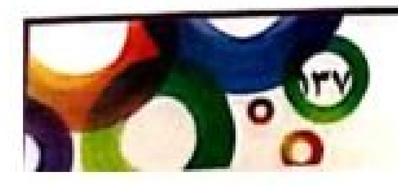
$ن + ١ = ١٠$ $\qquad$ $\boxed{\therefore ن = ٩}$

حل آخر:

${}^{ن+١}ل_{٤} = ١٠ \, {}^{ن}ل_{٢}$ $\qquad$ $\therefore \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+١-٤}} = ١٠ \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٣}}$

$\therefore \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-٣}} = ١٠ \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٣}}$ $\qquad$ $\therefore (ن+١)\underline{|ن} = ١٠ \underline{|ن}$

$\therefore ن + ١ = ١٠$ $\qquad$ $\boxed{\therefore ن = ٩}$



الترتيب فى صف والترتيب فى دائرة

أولاً لترتيب ں من العناصر فى صف واحد فإن :

- عدد طرق إختيار العنصر فى المكان الأول = ں
- عدد طرق اختيار العنصر فى المكان الثانى = (ں − ١)

لاحظ أن عدد الطرق تنقص طريقة واحدة بعد إختيار العنصر فى المكان الأول.

- عدد طرق اختيار العنصر فى المكان الثالث = (ں − ٢) ....وهكذا

الى أن نصل إلى آخر عنصر والذى يكون له طريقة واحدة

أى أن عدد طرق أختيار العنصر الأخير = ١

أى أن عدد الطرق التى نرتب بها ں من العناصر فى صف واحد

= ں (ں − ١) (ں − ٢) .... × ٣ × ٢ × ١ = ں|

أى أن عدد طرق ترتيب ں من العناصر فى صف واحد = ں|

ثانياً لترتيب ں من العناصر فى دائرة فإن :

الدائرة ليس لها نقطة بداية أو نقطة نهاية لذلك فلن يبدأ الترتيب إلا بعد وضع العنصر الأول في أى مكان على الدائرة وبذلك يكون للعنصر الاول طريقة واحدة فقط وهى وضعه فى أى مكان والذى بمجرد وضعه فى هذا المكان فيعتبر تحدد به بداية الدائرة ونهايتها للأخرين ثم نبدأ ترتيب العناصر الأخرى ويكون :

عدد طرق إختيار العنصر فى المكان الاول = ١

عدد طرق إختيار العنصر فى المكان الثانى = (ں − ١)

عدد طرق إختيار العنصر فى المكان الثالث = (ں − ٢) ....وهكذا

الى أن نصل إلى آخر عنصر الذى يكون له طريقة واحدة

أى أن عدد طرق اختيار العنصر الاخير = ١

أى أن عدد الطرق التى نرتب بها ں من العناصر على دائرة

= ١ × (ں − ١) (ں − ٢) .... × ٣ × ٢ × ١ = ں − ١|

أى أن عدد طرق ترتيب ں من العناصر على دائرة = ں − ١|





مثال ٦

بكم طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص فى ٥ مقاعد بحيث يجلسون :

❶ فى صف واحد.　　❷ على شكل دائرة مستديرة.

الحل

① يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا فى صف واحد بعدة طرق عددها

= ٥| = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

② يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا على شكل دائرة بعدة طرق عددها

= |٥ - ١ = |٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

مثال ٧

أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٤ طلاب على ٦ مقاعد فى صف واحد .

الحل

لدينا ٦ مقاعد يراد اختيار ٤ منها فى كل مرة

∴ عدد الطرق = $^{٦}ل_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

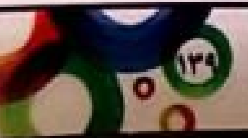
مثال ٨

أوجد عدد الكلمات المختلفة التى يمكن تكوينها عند أخذ ٤ حروف من كلمة «المدرسة»

الحل

لدينا ٧ حروف من كلمة «المدرسة» يراد إختيار ٤ حروف مختلفة فى كل مرة

∴ عدد الطرق = $^{٧}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠





مثال ٩

مجلس إدارة شركة يتألف من ثمانية أعضاء بكم طريقة يمكن أن نختار منهم رئيسًا وأمينًا ومحاسبًا ؟

الحل

لإختيار رئيس للشركة أمامنا ٨ إختيارات

لإختيار أمينًا للشركة أمامنا ٧ إختيارات

لإختيار محاسبًا للشركة أمامنا ٦ إختيارات

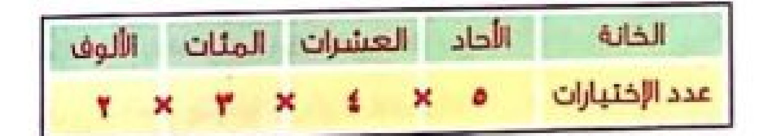
أى أننا أجرينا تبديلة على ٨ أشخاص مأخوذة ثلاثة ثلاثة

∴ عدد الطرق = $^{٨}ل_{٣}$ = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

مثال ١٠

كم عددًا يمكن تكوينه من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ يتكون من أربع خانات مختلفة ؟

الحل



الخانة	الآحاد		العشرات		المئات		الألوف
عدد الإختيارات	٥	×	٤	×	٣	×	٢

∴ عدد الطرق $^{٥}ل_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ عددًا









اختبار تراكمى ٨

$\frac{1}{2}$ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{\dots\dots}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① المتتابعة التى قاعدتها $ح_ن = ٢ ن + ١$ تكون متتابعة ....

[تزايدية ، تناقصية ، تذبذبية ، ثابتة]

② مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٩} (٢ ر - ١)$ يساوى ....

[٧٢ ، ٨٠ ، ٩٦ ، ٩٩]

③ متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة $ح_ن = ٢^ن - ١$
فإن الحد السابع منها يساوى ....

[١٥ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ١٩٤]

④ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ٤٨ هو ٧٢ فإن أساسها يساوى ....

[$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$]

---

⑤ كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨}

....

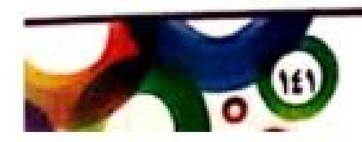
....

---

⑥ عددان موجبان وسطهما الحسابى يساوى ١٠ ووسطهما الهندسى يساوى ٨
أوجد العددين .

....

....



ثانيا مسائل المستوى الاول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① $\underline{|٥} - \underline{|٤}$ = ... [٢٤ ، ٤٢ ، ٤٨ ، ٩٦]

② $\frac{\underline{|١٠٠}}{\underline{|٩٩}}$ = ... [١ ، صفر ، ١٠٠ ، $\frac{١٠٠}{٩٩}$]

③ $\frac{\underline{|١}}{\underline{|٠}}$ = ... [١ ، صفر ، ١٠ ، غير معرف]

④ مجموعة حل المعادلة $\underline{|س - ١}$ = ١ هي .... [{١، ٠} ، {١} ، {١، ٢} ، {٢}]

⑤ مجموعة حل المعادلة $\underline{|س + ٢}$ = ١٢٠ هي .... [{٣} ، {-٣} ، {٤} ، {٢}]

⑥ إذا كان $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ١}}$ = ٧ فإن ن = ... [٤ ، ٦ ، ٥ ، ٧]

⑦ إذا كان $\frac{\underline{|ن + ٥}}{\underline{|ن + ٣}}$ = ٥٦ فإن $\underline{|ن}$ = ... [٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤]

⑧ إذا كان $\underline{|ن + ٤}$ = ١٢٠ (ن + ٤) فإن $\underline{|ن + ٣}$ = ... [٣٠ ، ٦٠ ، ١٢٠ ، ٢٤٠]

⑨ ${}^{٥}ل_{٠} + {}^{٥}ل_{١}$ = ... [٦ ، ٥ ، صفر ، ٧]

⑩ إذا كان ${}^{ن}ل_{ن}$ = ٥٠٤٠ فإن ن = ... [٦ ، ٧ ، ٥ ، ٨]

⑪ إذا كان ${}^{ن}ل_{١}$ = ٤ فإن ن = ... [٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥]

⑫ إذا كان ${}^{٦}ل_{ر}$ = ١٢٠ فإن ر = ... [٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦]

⑬ إذا كان ${}^{ن}ل_{٢}$ = ٩٠ فإن $\underline{|ن - ١٠}$ = ... [١ ، صفر ، ١٠ ، ٩]

⑭ لجنة مؤلفة من ١٠ أعضاء بكم طريقة يمكن إختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة = ... [٢٠ ، ٦٠ ، ٤٥ ، ٩٠]

⑮ عدد طرق ترتيب ٦ أطفال فى دائرة يساوى .... [٢٤ ، ٧٢٠ ، ٦٠ ، ١٢٠]





٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① $^{ن}ل_{ن}$ = ... [١ أو ن أو صفر أو ن − ١]

② $^{٧}ل_{٧}$ − |٧ = ... [٠ أو ١٤ أو ٧ أو ١٢٠]

③ |٢ + |٤ = ... [|٦ أو |٨ أو ٢٤ أو ٢٦]

④ |٥ − |٣ = ... [|٢ أو |٨ أو ١٦ أو ١١٤]

⑤ إذا كان |ن = ٢٤ فإن $^{٣ن}ل_{٢}$ = ... [٤ أو ٢ أو ٧٢ أو ١٣٢]

⑥ إذا كان $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ فإن ر = ... [٤ أو ٣ أو ٢ أو ٥]

⑦ إذا كان $^{٦}ل_{ر}$ = ١٢٠ فإن |ر − ٣ = ... [١ أو ٢ أو ٣ أو ٤]

⑧ إذا كان $^{ن}ل_{٣}$ = ١٢٠ فإن قيمة ن = ... [٦ أو ٥ أو ٤ أو ٣]

⑨ إذا كان $^{ن}ل_{٤}$ = $^{ن}ل_{٥}$ فإن ن = ... [١ أو ٤ أو ٥ أو ٩]

⑩ عدد الطرق التى يمكن أن يجلس بها ٣ أشخاص على ٥ مقاعد تساوى ....

[٥ أو ١٢ أو ١٥ أو ٦٠]

⑪ عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى ....

[٤ أو ٩ أو ١٠ أو ٢٤]

⑫ لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا عدد الطرق التى يمكن بها إختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة تساوى ....

[٢ أو ٢٣ أو ٦٦ أو ١٣٢]

⑬ عدد طرق إختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} تساوى ....

[٤٨ أو ٣٠ أو ١٢ أو ٤]

⑭ عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة تساوى ....

[١ أو ٧ أو ٧٢٠ أو ٥٠٤٠]

⑮ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

......	......	......	......	......	......	هـ	٩

هـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨

بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد ، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟

[٤٩٩٩٩٩ أو ٤٠٠٠٠٠٠ أو ٤٩٩٩٩٩٩ أو ١٠٠٠٠٠٠٠]





ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٤ بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) مثل ذلك بمخطط الشجرة البيانية. [٦]

٥ كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؟ [١٦]

٦ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؟ [١٢]

٧ كم عددًا زوجيًا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ؟ [٨]

٨ كم عددًا من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ دون تكرار للرقم ؟ [١٢٠]

٩ كم عددًا من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ويبدأ كل منها بالرقم ٥ بدون تكرار للرقم ؟ [٢٤]

١٠ كم عددًا يمكن تكوينه من الأرقام ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ يتألف من أربعة أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢ ؟ [٢٤]

١١ كم طريقة يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و ٤ سيدات [١٢]

١٢ بكم طريقة يمكن إختيار حرف صحيح وآخر معتل من أربعة حروف صحيحة وثلاثة معتلة ؟ [١٢]

١٣ تعطى مدرسة ثلاثة جوائز الأولى فى القسم الأدبى والثانية فى القسم العلمى والثالثة فى قسم الرياضيات فإذا كان عدد المتسابقين ٨ ، ٧ ، ٤ على التوالى فبكم طريقة يمكن توزيعها ؟ [٢٢٤]

١٤ يقدم أحد محلات الأيس كريم ثلاثة أحجام مختلفة وخمس نكهات (صغير - متوسط - كبير) (فراولة - مانجو - ليمون - حليب - شيكولاتة) كم عدد الإختيارات المتاحة لشراء واحدة من الأيس الكريم ؟ [١٥]

١٥ من مجموعة من الحروف { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و } أوجد :

(١) عدد طرق إختيار حرف واحد. (٢) عدد طرق اختيار حرفين مختلفة. [٦ ، ٣٠]

١٦ بكم طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص فى ٤ مقاعد على شكل دائرة ؟ [٣٠]

١٧ أوجد قيمة كل من :

① $\underline{|٧} + \underline{|٥}$ [٥١٦٠]

② $\underline{|٣} - \underline{|٠}$ [٥]

③ $^{٥}ل_{٥} - \underline{|٥}$ [صفر]

④ $٣\underline{|٢} - \underline{|٣}$ [صفر]

⑤ $^{٥}ل_{٢} \times \underline{|٢}$ [١٢٠]

⑥ $^{ن}ل_{٠} \times \underline{|٣}$ [٦]

⑦ $^{٣}ل_{٣} \times {}^{٢}ل_{٢}$ [١٢]

⑧ $^{٤}ل_{٠} + {}^{٤}ل_{١}$ [٥]

⑨ $^{٨}ل_{١} + {}^{٨}ل_{٢}$ [٦٤]

⑩ $^{٧}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{٧}$ [٥٠٤١]

⑪ $\dfrac{\underline{|١٠}}{\underline{|٩}}$ [١٠]

⑫ $\dfrac{\underline{|١٠٠}}{\underline{|٩٩}}$ [١٠٠]

---

١٨ أوجد قيمة ن التى تحقق كل من :

① $\underline{|ن} = ١$ [١، ٠]

② $\underline{|ن} = ٢٤$ [٤]

③ $\underline{|ن - ٢} = ١٢٠$ [٧]

④ $\dfrac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن}} = ٥$ [٤]

⑤ $\dfrac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} = ٤٢$ [٦]

⑥ $^{٦}ل_{ن} = ١٢٠$ [٣]

⑦ $^{١٥}ل_{ن} = ٢٧٣٠$ [٣]

⑧ $^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ [١٠]

⑨ $^{ن + ٢}ل_{٢} = ٢١٠$ [١٣]

⑩ $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} = ٤$ [٣]

⑪ $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$ [٧]

⑫ $^{ن}ل_{ن} = ١٢٠$ [٥]

---

١٩ أوجد قيمة ن إذا كان :

① $^{٧}ل_{ن} = ٢١٠$ [٣]

② $٧\underline{|ن + ٢} = \underline{|ن + ٣}$ [٤]

③ $(ن + ١)\underline{|ن} = ٢٤$ [٣]

④ $\underline{|ن + ٢} : \underline{|ن} = ٥٦$ [٦]

⑤ $\dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{١}{\underline{|ن + ١}} = \dfrac{ن + ٢}{٢٤}$ [٣]

⑥ $ن \times \underline{|٢ن - ١} = ١٢$ [٢]

---

٢٠ إذا كان $^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ ، $\underline{|ن} = ٢٤$ أوجد : $\underline{|ن - ر}$ [١]

---

٢١ إذا كان $\underline{|ر} = ١٢٠$ ، $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ أوجد : $\underline{|ن - ر}$ [١]



٢٢ إذا كان $^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $|\underline{٢س+ص} = ٥٠٤٠$ **أوجد** : $^{ص}ل_{س}$ [٥]

٢٣ إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٤ × {}^{ن-٢}ل_{٢}$ **أوجد** قيمة : ن [٧ أو ٨]

٢٤ إذا كان $٧ \; ^{ن}ل_{٥} = {}^{ن}ل_{٣} × {}^{٩}ل_{٣}$ **أوجد** قيمة : ن [١٢]

٢٥ إذا كان $^{٦}ل_{ر} = ٤ × {}^{٦}ل_{ر-١}$ **أوجد** قيمة : ر [٣]

٢٦ **أوجد** عدد طرق إختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من سبعة أشخاص. [٢١٠]

٢٧ من بين ثمانية طلاب **بكم** طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية إختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للإشتراك فى فرق كرة القدم وكرة السلة والكرة الطائرة على الترتيب. [٣٣٦]

٢٨ أثبت أن : $\frac{|\underline{ن+٢}}{|\underline{ن}} = {}^{ن+٢}ل_{٢}$

٢٩ أثبت أن : $|\underline{ن+١} = {}^{ن+١}ل_{ن}$

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٣٠ إذا كان $\frac{|\underline{ن-٢}}{٥} = \frac{|\underline{٤}}{(ن-١)}$ **فأوجد** قيمة : ن [٦]

٣١ إذا كان $\frac{|\underline{ن-٤}}{|\underline{٣}} = \frac{|\underline{٥}}{ن-٣}$ **فأوجد** قيمة : ن [٩]

٣٢ إذا كان $^{ن+١}ل_{٢} : \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}} = ٧$ **فما** قيمة : ن ؟ [٦]

٣٣ أثبت أن : $|\underline{١٠} = ٢^{٥} \; |\underline{٥} \; (١ × ٣ × ٥ × ٧ × ٩)$

٣٤ إذا كان $^{ن}ل_{٨} > {}^{ن}ل_{٧}$ **فأوجد** أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة السابقة. [٩]

٣٥ إذا كان $^{ن}ل_{ر} + {}^{ر}ل_{ن} = ٤٨$ **فأوجد** قيمة : ن [٤]

الدرس ٣

التــوافيــق

علمنا فيما سبق أن التباديل هى إختيارات مرتبة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذة كلها أو بعضها فى كل مرة وفى بعض الأحيان نحتاج إلى إجراء إختيارات بدون ترتيب.

فمثلاً

إذا كان أربعة أندية { أ ، ب ، جـ ، ء } وتقام مباريات لكرة القدم بنظام الدورى بين الفرق بحيث تقام المباراة على ملعب الفريق المذكور أولاً فإن الترتيب هنا له أهمية فتكون الإختيارات الممكنة هى :

(أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (أ ، ء) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ) ، (ب ، ء) ، (جـ ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، ء) ، (ء ، أ) ، (ء ، ب) ، (ء ، جـ)

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « تبديلــة »

إما إذا أردنا إقامة مباراة بين فريقين من فرق الأندية الأربعة فى أحد الإحتفالات الرياضية ففى هذه الحالة لا يهم الترتيب وتكون الإختيارات الممكنة هى :

{ أ ، ب } ، { أ ، جـ } ، { أ ، ء } ، { ب ، جـ } ، { ب ، ء } ، { جـ ، ء }

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « توفيقة »



مما سبق نلاحظ أن :

(أ ، ب) ، (ب ، أ) تعبر عن تبديلين لأن (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

أما {أ ، ب} ، {ب ، أ} تعبر عن توفيق واحد لأن {أ ، ب} = {ب ، أ}

في التباديل نهتم بالترتيب أما التوافيق لا نهتم بالترتيب.

ومن ذلك يمكن تعريف التوافيق كما يلي :

تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في نفس الوقت هو $^{ن}ق_{ر}$ حيث : ر ≥ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$

معنى ذلك :

أن كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيب مفردات « عناصر » المجموعة تسمى توفيقًا ويرمز لعدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من ن من العناصر والتي تكون عدد عناصرها ر (حيث ر ≥ ن) بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ وتقرأ « ن قاف ر » أو بالرمز $\binom{ن}{ر}$ وتقرأ « ن فوق ر »

فمثلاً

$^{5}ق_{3}$ تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على ٣ عناصر ويمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على ٥ عناصر وتقرأ « ٥ قاف ٣ » أو « ٥ فوق ٣ »

وأيضًا

$^{6}ق_{4}$ تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على ٤ عناصر ويمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على ٦ عناصر.

وبالتالي $^{4}ق_{0}$ تعني عدد المجموعات الجزئية الخالية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على ٤ عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة أي أن $^{4}ق_{0}$ = ١

وأيضًا

$^{4}ق_{4}$ وهي على عدد المجموعات الجزئية الرباعية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على ٤ عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة حيث أن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها أي أن $^{4}ق_{4}$ = ١ أيضًا ونلاحظ في مثال الأندية الأربعة السابقة إننا نختار فريقين من ٤ أندية وأن عدد التباديل يساوي ١٢ تبديلة وعدد التوافيق يساوي ٦ توفيقة.





أي أن التوافيق فى هذا المثال يساوى $^{4}ق_{2} = \frac{^{4}ل_{2}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

أي أن $^{4}ق_{2} = \frac{^{4}ل_{2}}{|\underline{2}}$ وبالمثل فإن : $^{4}ق_{3} = \frac{^{4}ل_{3}}{|\underline{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$

ومنها يمكن إستنتاج أن :

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}} = \frac{ن(ن-1)(ن-2) \ldots (ن-ر+1)}{ر(ر-1)(ر-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

وبفضل استخدامه إذا كانت ر لها قيمة عددية.

$\because \; ^{ن}ل_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$

$$\therefore \; ^{ن}ق_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\;|\underline{ن-ر}}$$

وبفضل إستخدامه إذا كانت ر ليس لها قيمة عددية.

فمثلاً $^{6}ق_{3} = \frac{|\underline{6}}{|\underline{3}\;|\underline{3}} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20$

وبمكن إستنتاج النتائج التالية :

نتيجة ١

$^{ن}ق_{ر} = ^{ن}ق_{ن-ر}$ (قانون التبسيط)

وتستخدم هذه النتيجة لحساب القيمة العددية للتوفيق إذا كان $ر > \frac{1}{2} ن$

فمثلاً

لإيجاد قيمة $^{100}ق_{98}$ فإننا نلاحظ أن ٩٨ عدد أكبر من نصف ن لذلك نستخدم النتيجة

فيكون $^{100}ق_{98} = ^{100}ق_{2} = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = 4950$

لاحظ أن إذا كانت ن = ر فإن : $^{ن}ق_{ن} = ^{ن}ق_{0} = 1$

وذلك لأن $^{ن}ق_{ن} = ^{ن}ق_{ن-ن} = ^{ن}ق_{0} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{0}\;|\underline{ن-0}} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{0}\;|\underline{ن}} = \frac{1}{|\underline{0}} = 1$

فمثلاً $^{7}ق_{7} = ^{7}ق_{0} = 1$ ، $^{6}ق_{6} = 1$

لاحظ أن $^{ن}ق_{1} = ن$

فمثلاً $^{6}ق_{1} = 6$ ، $^{7}ق_{1} = 7$ ، $^{ن+1}ق_{1} = ن + 1$ وهكذا ....

نتيجـة ٢

إذا كان: ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإما $ر = هـ$ أو $ر + هـ = ن$

لاحظ أن

هناك بعض الجمل الدالة على التوافيق والتى لا تهتم بالترتيب:

١ إختيار مجموعة من الأشخاص (دون تحديد عمل كل منهم حسب الترتيب).

٢ إختيار مجموعة جزئية من مجموعة كلية.

٣ الإختيار أو السحب دفعة واحدة (معًا) أو عشوائيًا بدون ترتيب.

مع ملاحظة أن:

(أ ، ب) ، (ب ، أ) تعبر عن تبديلين حيث نهتم بالترتيب فى التباديل.

أما {أ ، ب} ، {ب ، أ} تعبر عن توفيق واحد حيث لا نهتم بالترتيب فى التوافيق.

مثال ١

أوجد ناتج كل من: ١ ${}^{٦}ق_{٤}$ ٢ ${}^{٥٠}ق_{١}$ ٣ ${}^{١٠٠}ق_{٠}$

الحل

١ ${}^{٦}ق_{٤} = \frac{{}^{٦}ل_{٤}}{٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٥$

بإستخدام الحاسبة:

يمكن استخدام المفاتيح ÷ Shift من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $^{n}C_{r}$

كما يلى: 15 الناتج ← = 4 ÷ Shift ← 6 ← ابدأ

٢ ${}^{٥٠}ق_{١} = ٥٠$

٣ ${}^{١٠٠}ق_{٠} = ١$

مثال (٢)

إذا كان $^{ن}ق_{٢} = ٢٨$ **فأوجد قيمة :** ن

الحل

$^{ن}ق_{٢} = ٢٨$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} = ٢٨$

$ن^{٢} - ن = ٥٦$ $\therefore ن^{٢} - ن - ٥٦ = ٠$

$(ن - ٨)(ن + ٧) = ٠$ $\boxed{\therefore ن = ٨}$ أو $ن = -٧$ (مرفوض لأن $ن \in ص^{+}$)

حل آخر ثان

$^{ن}ق_{٢} = ٢٨$ $\therefore \frac{^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٢٨$

$^{ن}ل_{٢} = ٢٨ \underline{|٢} = ٥٦$ $\therefore {^{ن}ل_{٢}} = ٨ \times ٧$

$\therefore {^{ن}ل_{٢}} = {^{٨}ل_{٢}}$ $\boxed{\therefore ن = ٨}$

حل آخر ثالث

$^{ن}ق_{٢} = ٢٨$ $\therefore \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢}\ \underline{|٢}} = ٢٨$

$\therefore \frac{ن(ن-١)\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٢}} = ٢٨ \underline{|٢}$ $\therefore ن^{٢} - ن = ٥٦ \Leftarrow ن^{٢} - ن - ٥٦ = ٠$

$(ن - ٨)(ن + ٧) = ٠$ $\boxed{\therefore ن = ٨}$

$ن = -٧$ (مرفوض لأن $ن \in ص^{+}$)

مثال (٣)

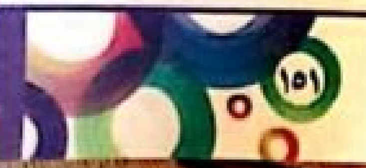
إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ، $٢٤\ {^{ن}ق_{ر}} = {^{ن}ل_{ر}}$ **فأوجد** قيمة كل من ن ، ر

الحل

$^{ن}ق_{٣} = ١٢٠ \Leftarrow \frac{^{ن}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ١٢٠$

$^{ن}ل_{٣} = ١٢٠ \underline{|٣}$ $\therefore {^{ن}ل_{٣}} = ٧٢٠$

٧٢٠	١٠
٧٢	٩
٨	٨
١	



$^{ن}ل_{٣} = ١٠ × ٩ × ٨$ ∴ $^{ن}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$

∴ ن = ١٠

$٢٤ \; {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ $٢٤ × \frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر} = {}^{ن}ل_{ر}$

∴ ٢٤ = |ر ∴ |ر = ٤ × ٣ × ٢ × ١ ∴ |ر = |٤

٢٤	٤
٦	٣
٢	٢
١	

∴ ر = ٤

مثال ٤

إذا كان $^{ن}ق_{ن-٤} = ٣٥$ أوجد قيمة : ن

الحل

$^{ن}ق_{ن-٤} = ٣٥$ ∴ $^{ن}ق_{٤} = ٣٥$

لاحظ أن
$^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

∴ $\frac{^{ن}ل_{٤}}{|٤} = ٣٥$ ∴ $^{ن}ل_{٤} = ٣٥ \, |٤ = ٨٤٠$

$^{ن}ل_{٤} = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$ ∴ ن = ٧

مثال ٥

إذا كان $^{١٥}ق_{٣ر} = {}^{١٥}ق_{ر+٣}$ أوجد قيمة : ر

الحل

∵ $^{١٥}ق_{٣ر} = {}^{١٥}ق_{ر+٣}$

∴ إما ٣ر = ر + ٣ ⟸ ٢ر = ٣ (÷٢)

∴ ر = $\frac{٣}{٢}$ (مرفوض لأن ر ∉ ص$^{+}$)

أو ٣ر + ر + ٣ = ١٥

∴ ٤ر = ١٥ − ٣

∴ ٤ر = ١٢ (÷٤) ∴ ر = ٣

لاحظ أن
إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$
إما ر = هـ
أو ن = ر + هـ





مثال (٦)

إذا كان $^{\text{ن}-\text{م}}\text{ل}_{٣} = ١٢٠$ ، $^{\text{ن}+\text{م}}\text{ق}_{٤} = ٧١٥$ أوجد قيمة : م ، ن

الحل

∵ $^{\text{ن}-\text{م}}\text{ل}_{٣} = ١٢٠$

∴ $^{\text{ن}-\text{م}}\text{ل}_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}\text{ل}_{٣}$

∴ ن − م = ٧ ①

∵ $^{\text{ن}+\text{م}}\text{ق}_{٤} = ٧١٥$

∴ $\frac{^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{٤}}{\lfloor ٤} = ٧١٥$

$^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{٤} = ٧١٥ \times \lfloor ٤ = ١٧١٦٠$

$^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{٤} = {}^{١٣}\text{ل}_{٤}$

١٧١٦٠	١٠
١٧١٦	١١
١٥٦	١٢
١٣	١٣
١	

∴ ن + م = ١٣ ②

بحل ① ، ② معًا بالجمع

∴ ن = ١٠ وبالتعويض فى ② عن ن ∴ م = ٣

مثال (٧)

بكم طريقة يمكن إختيار لجنة من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخص

الحل

∵ الإختيار لا يعتمد على الترتيب فإن كل إختيار يسمى توفيقًا

عدد الإختيارات = $^{١٢}\text{ق}_{٣} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٢٠$

مثال (٨)

بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنتين تتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين.

الحل

عدد طرق أنتخاب اللجنة الأولى = $^{١٠}\text{ق}_{٤} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢١٠$ طريقة

وبعد إختيار اللجنة الأولى فإننا نلاحظ أن عدد الأشخاص أصبح ٦ أشخاص نختار منهم لجنة من ٤ أشخاص.



عدد طرق إنتخاب اللجنة الثانية = $^{٦}ق_{٤} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$ = ١٥ طريقة

عدد الطرق التى يتم بها إنتخاب اللجنتين = ٢١٠ × ١٥ = ٣١٥٠ طريقة

مثال (٩)

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من بين ١٢ طالبًا و ٩ طالبات بحيث تتكون اللجنة من:

(١) أربعة طلبة وثلاث طالبات. (٢) أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات.

الحل

عدد طرق إختيار ٤ طلبة من بين ١٢ طالب = $^{١٢}ق_{٤}$ = ٤٩٥

عدد طرق إختيار ٣ طالبات من بين ٩ طالبات = $^{٩}ق_{٣}$ = ٨٤

(١) عدد طرق إختيار أربعة طلبة و ثلاث طالبات

= ٤٩٥ × ٨٤ = ٤١٥٨٠ طريقة

(٢) عدد طرق إختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

= ٤٩٥ + ٨٤ = ٥٧٩ طريقة

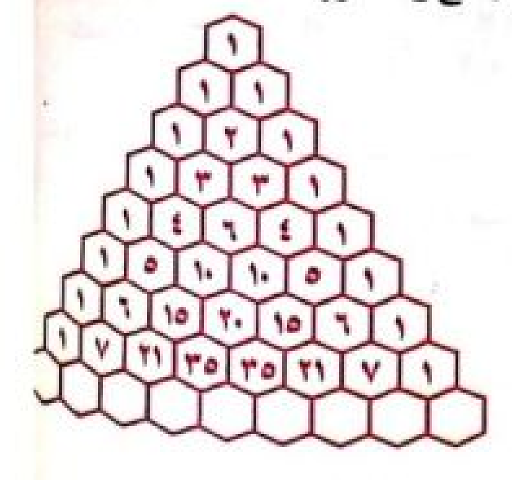
ملاحظة

إذا كان الربط بين إختيارين بحرف «و» فإننا نضرب ناتجى الإختيارين.
إذا كان الربط بين إختيارين بحرف «أو» فإننا نجمع ناتجى الإختيار

نشاط مثلث باسكال:

بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢): هو فيلسوف فرنسى ورياضى وفيزيائى قدم نظرية الإحتمالات وصمم تنظيمًا ثلاثيًا من الأرقام سمى مثلث باسكال فى حساب الإحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدى عمليات الجمع والضرب.

من تأمل مثلث الأعداد المقابل:



(١) الصف الأول:

يمثل (ں = ١) من العناصر مأخوذ منها

ر = ٠ أو ر = ١

فيكون $^{١}ق_{٠}$ = ١ ، $^{١}ق_{١}$ = ١

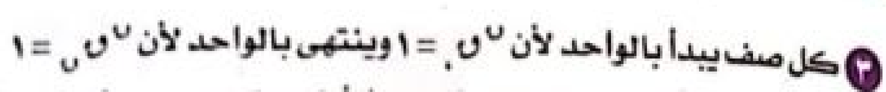
(٢) الصف الثاني:

يمثل (ں = ٢) من العناصر مأخوذ منها

ر = ٠ أو ر = ١ أو ر = ٢ فى كل مرة

فيكون $^{٢}ق_{٠}$ = ١ ، $^{٢}ق_{١}$ = ٢ ، $^{٢}ق_{٢}$ = ١ وهكذا ...





٣ كل صف يبدأ بالواحد لأن ${}^{ن}ق_{٠} = ١$ وينتهي بالواحد لأن ${}^{ن}ق_{ن} = ١$

٤ كل عدد في أي صف بإستثناء الصف الأول يساوي مجموع العددين الموجودين.

فمثلاً الصف الثالث ١ ، ١ + ١ ، ١ وهكذا ....

٥ يوجد تماثل حول العدد الذي يتوسط الصف (إذا كانت ن فردية)

٦ يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت ن زوجية)



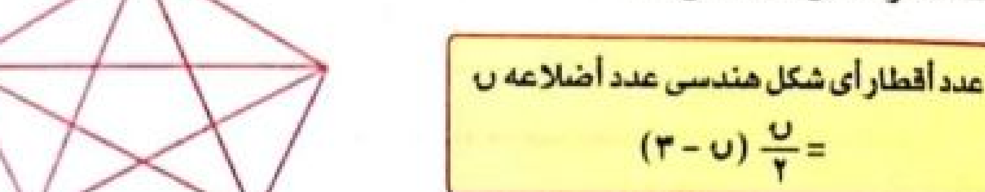
نشاط قطر الشكل الهندسي :

هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين

عدد أقطار المثلث = صفر

عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥



عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه ن

$= \frac{ن}{٢} (ن - ٣)$



∴ عدد أقطار الشكل السداسي = $\frac{٦}{٢} (٦ - ٣) = ٩$

∴ عدد أقطار الشكل الثماني = $\frac{٨}{٢} (٨ - ٣) = ٢٠$

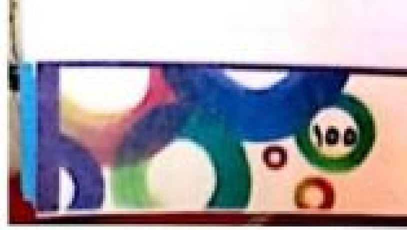
∴ عدد أقطار الشكل ذو عشرة أضلاع = $\frac{١٠}{٢} (١٠ - ٣) = ٣٥$

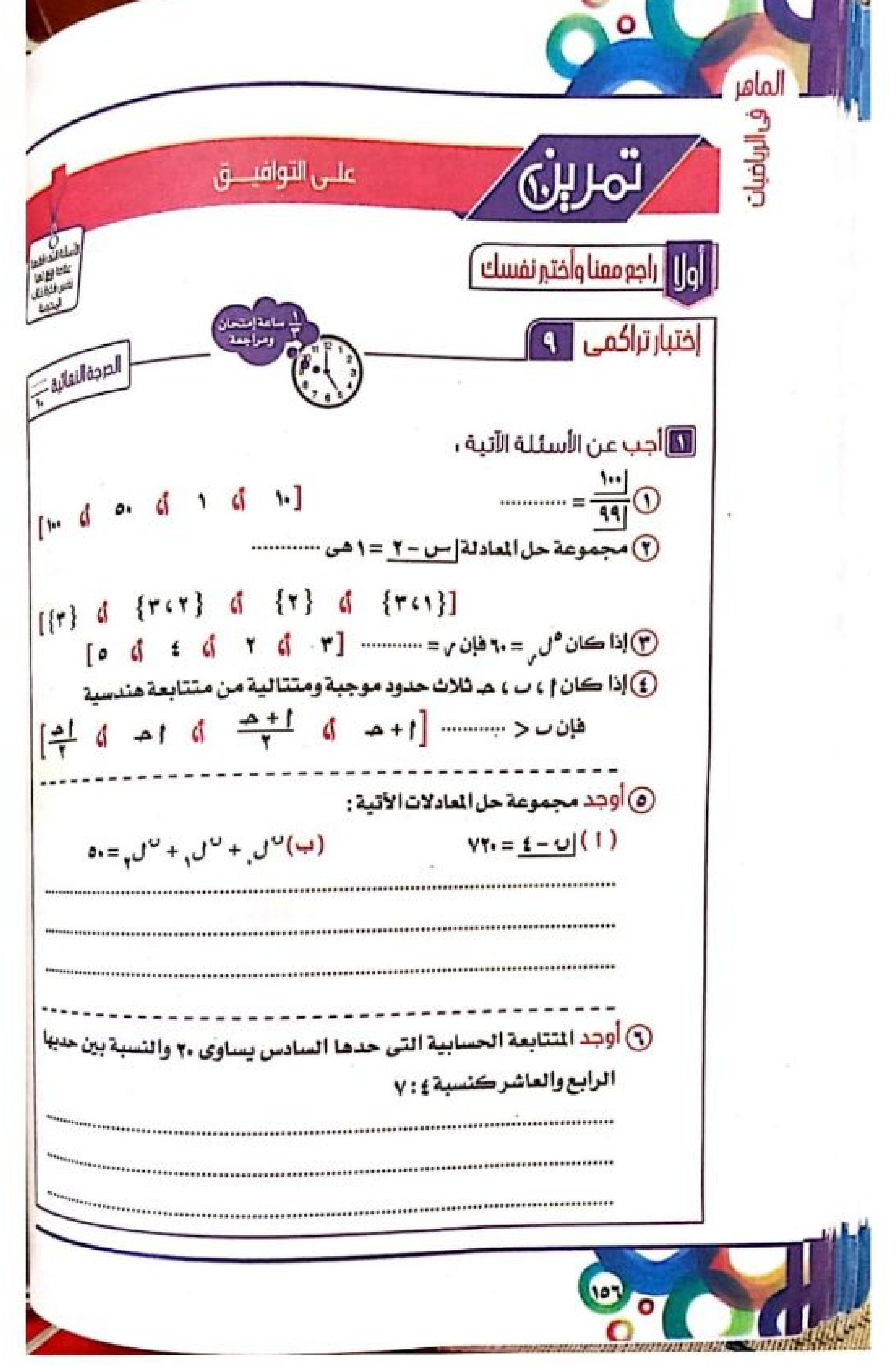
كما يمكن استخدام القاعدة التالية :

عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه ن

$= {}^{ن}ق_{٢} - ن$

ويكون عدد أقطار الشكل السداسي = ${}^{٦}ق_{٢} - ٦ = ٩$





تمرين ١٠

على التوافيق

أولاً راجع معنا وأختبر نفسك

إختبار تراكمى ٩

$\frac{1}{2}$ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{}{10}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① $\frac{|100}{|99}$ = ... [١٠ ، ١ ، ٥٠ ، ١٠٠]

② مجموعة حل المعادلة $|س - 2| = 1$ هى .... [{١، ٣} ، {٢} ، {٢، ٣} ، {٣}]

③ إذا كان ${}^{5}ل_{ر} = 60$ فإن ر = ... [٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥]

④ إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن ب < .... [أ + جـ ، $\frac{أ + جـ}{2}$ ، أ جـ ، $\frac{أ جـ}{2}$]

---

⑤ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(أ) $\underline{|ن - 4} = 720$

(ب) ${}^{ن}ل_{0} + {}^{ن}ل_{1} + {}^{ن}ل_{2} = 50$

....

....

....

---

⑥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس يساوى ٢٠ والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

....

....

....

ثانياً مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① ${}^{٦}ق_{٣}$ = ... [١٠ ، ٢٠ ، ١٨ ، ١٢٠]

② ${}^{٥}ق_{٥}$ = ... [صفر ، ١ ، ٥ ، ٢٥]

③ ${}^{٩}ق_{١}$ = ... [١ ، ٩ ، ٨ ، ١٠]

④ ${}^{ن}ق_{٠}$ = ... [١ ، ن ، صفر ، ن٢]

⑤ ${}^{١٢}ق_{١١}$ = ... [١ ، ${}^{١٢}ق_{١}$ ، ${}^{١٢}ق_{٢}$ ، ${}^{١٢}ق_{٠}$]

⑥ ${}^{٧}ق_{٥}$ = ... [٢ ، ${}^{٧}ق_{٢}$ ، ${}^{١٢}ق_{٥}$ ، ${}^{٧}ق_{١}$]

⑦ ${}^{١٠٠}ق_{١}$ = ... [١ ، صفر ، ٩٩ ، ١٠٠]

⑧ ${}^{٥٠}ق_{٤٩}$ = ... [٤٩ ، ${}^{٥٠}ق_{٠}$ ، ٥٠ ، ١]

---

٣ إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ أوجد قيمة : ن [٣٠]

---

٤ مدرسة بها ١٢ معلم يراد تشكيل لجنة مكونة من ٤ معلمين بكم طريقة ؟ [٤٩٥]

---

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① ${}^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٥}$ = ... [٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨]

② ${}^{٦}ق_{٠} + {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣} + {}^{٦}ق_{٤} + {}^{٦}ق_{٥} + {}^{٦}ق_{٦}$ = ...

[١٦ ، ٣٢ ، ٤٦ ، ٦٤]

③ ${}^{١٠٠}ق_{٩٨}$ = ... [٩٨ ، ٢ ، ٤٩٥٠ ، ١٠٠]

④ إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١$ فإن ن = ... [٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠]

⑤ إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ٧$ ن فإن ن = ... [٧ ، ٨ ، ٦ ، ٩]

⑥ إذا كان ${}^{ن-٢}ق_{٣} = ١٠$ فإن ن = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٧]

⑦ إذا كان ${}^{ن}ق_{٧} = {}^{ن}ق_{٨}$ فإن ${}^{١٥}ق_{ن}$ = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، صفر]

⑧ إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-٢} = ٢٨$ فإن ن = ... [٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

⑨ إذا كان ${}^{٢٠}ق_{ر} = {}^{٢٠}ق_{ر+٤}$ فإن ر = ... [٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠]

⑩ إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن ر = ...

[{١، ٠} ، {٠} ، {١} ، ...

⑪ إذا كان ${}^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{ن}$ فإن ن = ...

[٣ ، ٤ ، ٥ ، ...

⑫ عدد طرق إختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص يساوى ....

[٣٦ ، ١٨ ، ٣٠٢٤ ، ...

٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① عدد الطرق التى يمكن تشكيل لجنة من ٢ طلاب من بين ٩ طلاب = ...

[١٥ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ...

② عدد طرق إختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص = ...

[١٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...

③ عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى إمتحان يحتوى على ٦ أسئلة = ...

[٣٠ ، ١٥ ، ٢٤ ، ...

④ عدد طرق إختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء = ...

[١٥ ، ٨ ، ٦٠ ، ...

⑤ عدد المجموعات الجزئية ذات العنصرين التى يمكن تكوينها من { أ ، ب ، ﻫ ، د ، و } يساوى ....

[${}^{٥}ل_{٢}$ ، ${}^{٥}ق_{٢}$ ، $٥^{٢}$ ، ...

⑥ إذا كان ${}^{ن}ق_{٤} = ٣٥$ فإن ن = ... [٥ ، ٧ ، ٩ ، ...

⑦ إذا كان ${}^{٧}ق_{ر-١} = {}^{٧}ق_{ر}$ فإن ر = ... [٢ ، ٤ ، ٨ ، ...

⑧ إذا كان ${}^{ن}ق_{٦} = {}^{ن}ق_{٤}$ فإن ن = ... [٤ ، ٦ ، ٥ ، ...

⑨ إذا كان ${}^{١٢}ق_{٢ر} = {}^{١٢}ق_{ر+٢}$ فإن ر = ... [٣ ، ٤ ، ٢ ، ...

⑩ إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ل_{١} = ٣٦$ فإن ن = ... [−٨ ، −٩ ، ٨ ، ...

⑪ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٣٣٦$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ٥٦$ فإن ر = ...

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

⑫ إذا كان ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن ${}^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

[٢٤ ، ٢٥ ، ١ ، ...



٧ إذا كانت المجموعة س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و } أوجد ،

(١) عدد المجموعات الجزئية الثنائية لهذه المجموعة.

(٢) عدد المجموعات الجزئية الثلاثية لهذه المجموعة. [١٥ ، ٢٠]

ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٨ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية. [١٦]

---

٩ بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنتين لتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين. [٣١٥٠]

---

١٠ من بين ١٠ معلمين ، ٨ معلمات فى مدرسة بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من ٤ معلمين و ٣ معلمات لتمثل المدرسة فى مناسبة ما ؟ [١١٧٦٠]

---

١١ يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف ؟ [٣٣٦٠]

---

١٢ من بين أربعة معلمين يراد إختيار معلم لتدريب طلبة الأوليمبياد فى مادة الرياضيات ثم معلم آخر لإعداد الإختبار أوجد عدد طرق الإختيار. [١٢]

---

١٣ إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{ن - ٩}$ [١٠]

---

١٤ إذا كان $^{٢ن - ١}ق_{٣} = ٨٤$ فما قيمة $\underline{|ن - ٥}$ [١]

---

١٥ إذا كان $^{ن}ق_{ن - ٢} = ٢١$ فما قيمة $^{ن}ق_{ن}$ [١]

---

١٦ إذا كان $^{م}ق_{٢} = ٣$ ، $^{م + ن}ق_{٣} = ٥٦$ أوجد قيمة $\underline{|ن - م}$ [٢]

---

١٧ إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٠٥$ فأوجد قيمة ن ، ر [١٥ ، ٢]

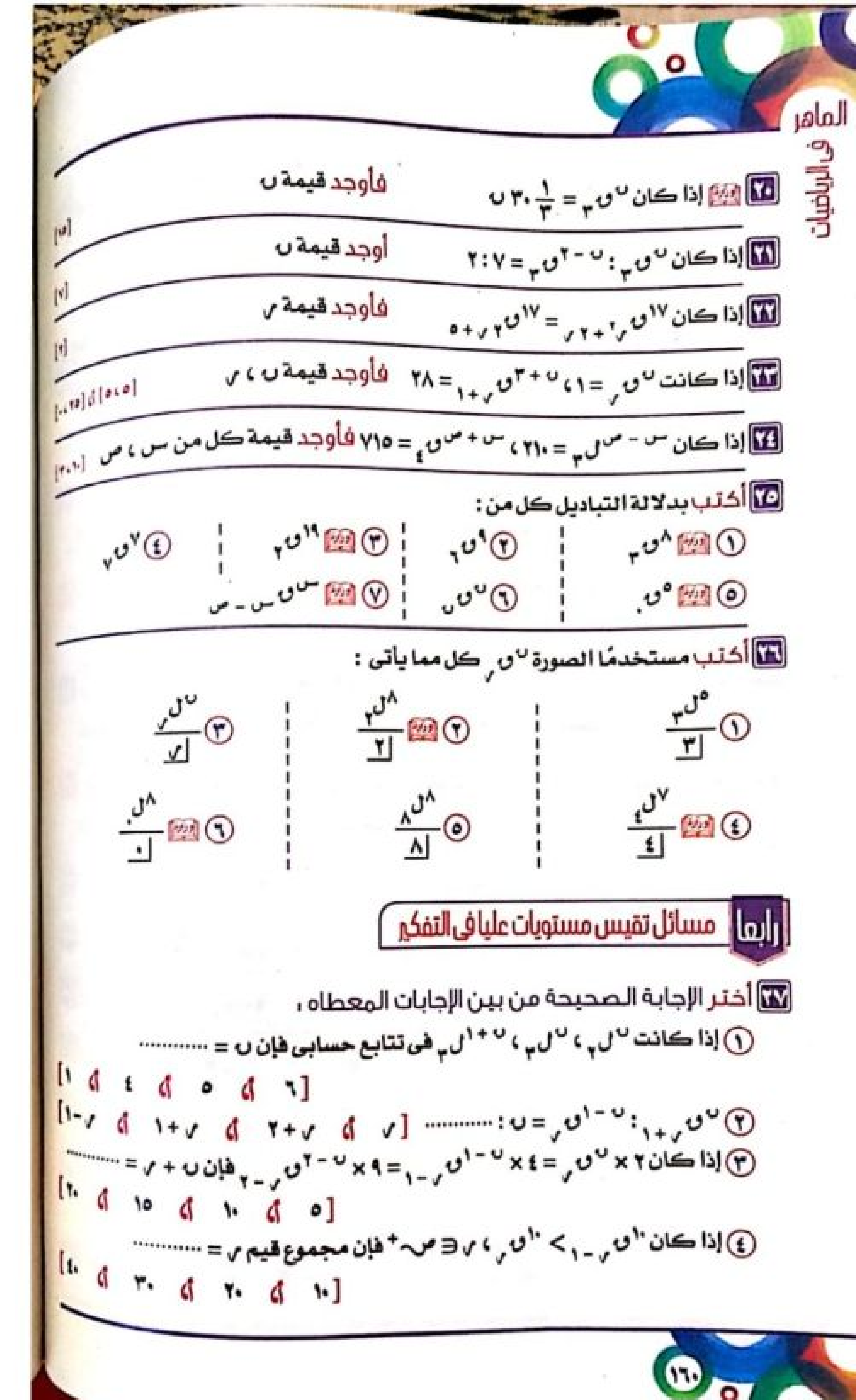
---

١٨ إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٢٤ \; ^{ن}ق_{ر}$ فأوجد قيمة $^{١٠}ق_{٢ر}$ ثم أوجد أقل قيمة لعدد ن التى تجعل هذه العلاقة صحيحة. [٤٥ ، ٤]

---

١٩ إذا كان $^{ن + ١}ق_{٤} = \frac{٥}{٢} \; ^{ن}ق_{٣}$ فأوجد قيمة ن [٩]





٢٠ إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣} \cdot ٣٠ ن$ فأوجد قيمة ن [٣]

٢١ إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} : {}^{ن-٢}ق_{٣} = ٧ : ٢$ أوجد قيمة ن [٧]

٢٢ إذا كان ${}^{١٧}ق_{ر^٢+٢ر} = {}^{١٧}ق_{٢ر+٥}$ فأوجد قيمة ر [٩]

٢٣ إذا كانت ${}^{ن}ق_{ر} = ١$ ، ${}^{ن+٣}ق_{ر+١} = ٢٨$ فأوجد قيمة ن ، ر [٥،٥] أو [٥،١٠]

٢٤ إذا كان ${}^{س-ص}ل_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{س+ص}ق_{٤} = ٧١٥$ فأوجد قيمة كل من س ، ص [٣،١٠]

٢٥ أكتب بدلالة التباديل كل من :

① ${}^{٨}ق_{٣}$ ② ${}^{٩}ق_{٢}$ ③ ${}^{١٩}ق_{٢}$ ④ ${}^{٧}ق_{٢}$

⑤ ${}^{٥}ق_{٠}$ ⑥ ${}^{ن}ق_{ن}$ ⑦ ${}^{س}ق_{س-ص}$

٢٦ أكتب مستخدمًا الصورة ${}^{ن}ق_{ر}$ كل مما يأتى :

① $\frac{{}^{٥}ل_{٣}}{\lfloor ٣}$ ② $\frac{{}^{٨}ل_{٢}}{\lfloor ٢}$ ③ $\frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$

④ $\frac{{}^{٧}ل_{٤}}{\lfloor ٤}$ ⑤ $\frac{{}^{٨}ل_{٨}}{\lfloor ٨}$ ⑥ $\frac{{}^{٨}ل_{٠}}{\lfloor ٠}$

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه ،

① إذا كانت ${}^{ن}ل_{٢}$ ، ${}^{ن}ل_{٣}$ ، ${}^{ن+١}ل_{٣}$ فى تتابع حسابى فإن ن = ...

[٦ أو ٥ أو ٤ أو ١]

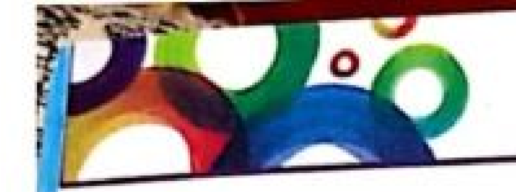
② ${}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن-١}ق_{ر} = ن :$ .... [ر أو ر + ٢ أو ر + ١ أو ر - ١]

③ إذا كان $٢ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٤ \times {}^{ن-١}ق_{ر-١} = ٩ \times {}^{ن-٢}ق_{ر-٢}$ فإن ن + ر = ...

[٥ أو ١٠ أو ١٥ أو ٢٠]

④ إذا كان ${}^{١٠}ق_{ر-١} > {}^{١٠}ق_{ر}$ ، ر $\in$ ص$^+$ فإن مجموع قيم ر = ...

[١٠ أو ٢٠ أو ٣٠ أو ٤٠]



⑤ إذا كان $^{ن+٢}ل_{٣} = ٧٢٠$ > $^{ن}ق_{٢} = ٣$ فإن $^{م}ق_{م-ن}$ = ...

[٢٨ أ ٣٠ أ ٣٥ أ ٤٩]

⑥ إذا كان $^{ن}ق_{٨}$ ، $^{ن}ق_{٩}$ ، $^{ن}ق_{١٠}$ في تتابع حسابي فإن ن = ...

[١٤ أ ١٣ أ ١٢ أ ١١]

⑦ إذا كان $^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن+١}ق_{ر}$ فإن $\frac{^{١٥}ق_{ر} + {}^{١٥}ق_{ر+١}}{^{١٥}ق_{ر-١} + {}^{١٥}ق_{ر}}$ = ...

[$\frac{ر - ١٦}{ر}$ أ $\frac{١٦ - ر}{ر + ١}$ أ $\frac{ر - ١٦}{ر - ١}$ أ $\frac{ر}{ر + ١}$]

⑧ إذا كان $^{ن-١}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} = \frac{ر + ١}{ن}$ وكان $\frac{^{٨}ق_{٢ر-٢} + {}^{٩}ق_{٢ر-١}}{^{٩}ق_{٢ر-١} + {}^{١٠}ق_{٢ر}} = \frac{٨}{٢١}$

فإن ر = ...

[٥ أ ٤ أ ٣ أ ٢]

---

٢٨ إذا كان $^{ن}ق_{٨} < {}^{ن}ق_{ر}$ **فأثبت** أن : ن > ١٥

---

٢٩ إذا كان $^{٧}ق_{ر} < ١$ ، $^{ر}ق_{٥} < ١$ **فما** قيمة : $\underline{|٦ - ر}$ [١]

---

٣٠ إذا كان $^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ **أوجد** قيمة : ن [١٠]

---

٣١ إذا كان $^{ن+٢}ل_{ر} : {}^{ن+٢}ق_{ر} = ٢ : ١$ ، $^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر} = ٥ : ٣$ **أوجد** قيمة ن ، ر [٢ ، ٧]

---

٣٢ **أثبت** أن : $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$

---

٣٣ إذا كانت س مجموعة غير خالية وكان ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب }

وكان عدد عناصر ص يساوى ٧٢ ، ع = { {أ ، ب} : أ ، ب ∈ س }

أوجد عدد عناصر ع [٣٦]



ثانيًا : التفاضل والتكامل

الوحدة الثالثة :

- الدرس ١ : معـدل التغيـر
- الدرس ٢ : الإشتقـــاق
- الدرس ٣ : قواعـد الإ شتقـاق
- الدرس ٤ : مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- الدرس ٥ : مشتقات الدوال المثـلثية
- الدرس ٦ : تطبيقات على المشتقات
- الدرس ٧ : التكامـــل



الدرس ١

معـــدل التغيـــر

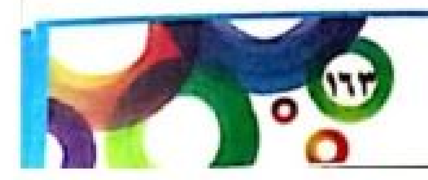
دالـة التغيـر

إذا كانت د :] أ ، ب [← ح حيث ص = د (س) فإن أى تغير فى قيمة س من $س_{1}$ إلى $س_{2}$ فى مجال د يقابله تغير فى قيمة ص من د ($س_{1}$) إلى د ($س_{2}$) وعليه فإن :

مقدار التغير فى س = Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_{2} - س_{1}$

مقدار التغير فى ص = Δ ص = د ($س_{2}$) − د ($س_{1}$)

وباعتبار ($س_{1}$ ، د ($س_{1}$)) نقطة على منحنى الدالة د فإن لكل تغير فى إحداثيها السينى من $س_{1}$ إلى $س_{2}$ = $س_{1}$ + هـ بحيث $س_{1}$ + هـ ∈] أ ، ب [، هـ ≠ ٠



يحدث تغير مناظر في إحداثيها الصادي يتعين بالعلاقة :

ت (هـ) = د (س$_1$ + هـ) − د (س$_1$) وتسمى الدالة ت بدالة التغير في د عند س = س$_1$

ملاحظة كلا الرمزين Δ س أو هـ يمثلان التغير في س

مثال ١

إذا كانت د (س) = ٣ س^2 + س − ٢ وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ثم أوجد : ① مقدار التغير في د عندما هـ = ٠٫٣ ② ت (−٠٫١)

الحل

∵ د (س) = ٣ س^2 + س − ٢ ، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ

∴ س$_1$ = ٢ ، د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ − ٢ = ١٢ ويكون :

د (٢ + هـ) = ٣ (٢ + هـ)^2 + (٢ + هـ) − ٢ = ١٢ + ١٢ هـ + ٣ هـ^2 + ٢ + هـ − ٢

= ٣ هـ^2 + ١٣ هـ + ١٢

ت (هـ) = د (٢ + هـ) − د (٢) = (٣ هـ^2 + ١٣ هـ + ١٢) − ١٢ = ٣ هـ^2 + ١٣ هـ

① عندما هـ = ٠٫٣

ت (٠٫٣) = ٣ (٠٫٣)^2 + ١٣ × ٠٫٣ = ٤٫١٧

② ت (−٠٫١) أي إيجاد التغير عندما هـ = −٠٫١

∴ ت (−٠٫١) = ٣ (−٠٫١)^2 + ١٣ (−٠٫١) = −١٫٢٧

دالة متوسط التغير

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ ، نحصل على دالة جديدة م تسمى دالة متوسط التغير في د عند س = س$_1$ حيث :

$$م (هـ) = \frac{ت (هـ)}{هـ} = \frac{د (س_1 + هـ) - د (س_1)}{هـ}$$

$$أو \quad م (هـ) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س_2) - د (س_1)}{س_2 - س_1}$$

أي أنه يمكن إيجاد دالة التغير ثم نقسمها على هـ أو نوجد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$



مثال ٢

إذا كان $د(س) = س^٢ + ٣ س$ فأوجد :

١ دالة متوسط التغير في د عندما $س = س_١$

٢ متوسط التغير في د عندما تتغير س من ٣ إلى ٢

الحل

$د(س) = س^٢ + ٣ س$

عندما $س = س_١$ ∴ $د(س_١) = س_١^٢ + ٣ س_١$

عندما $س = س_١ + هـ$ ∴ $د(س_١ + هـ) = (س_١ + هـ)^٢ + ٣(س_١ + هـ)$

$د(س_١ + هـ) = س_١^٢ + ٢ س_١ هـ + هـ^٢ + ٣ س_١ + ٣ هـ$

دالة التغير

$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)$

$= س_١^٢ + ٢ س_١ هـ + هـ^٢ + ٣ س_١ + ٣ هـ - س_١^٢ - ٣ س_١$

$ت(هـ) = ٢ س_١ هـ + هـ^٢ + ٣ هـ = هـ (٢ س_١ + هـ + ٣)$

١ **دالة متوسط التغير**

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$م(هـ) = \frac{هـ (٢ س_١ + هـ + ٣)}{هـ} = ٢ س_١ + هـ + ٣$$

٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ ∴ $س_١ = ٣$ ، $هـ = ٢ - ٣ = -١$

∴ متوسط التغير $= ٢ \times ٣ + (-١) + ٣ = ٨$

ويمكن إيجاد متوسط التغير في د عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ بأن نوجد د (٣) ، د (٢) ثم نوجد المتوسط كما يلي :

عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ فإن $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ٢$

ويكون $د(٣) = ٩ + ٩ = ١٨$ ، $د(٢) = ٤ + ٦ = ١٠$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{١٠ - ١٨}{٢ - ٣} = ٨$$



دالة معدل التغير

إذا كانت د :]أ ، ب[← ح حيث ص = د (س) ، س، $س_1$ ، $س_1 + هـ$ ∈]أ ، ب[

وكان لمتوسط التغير م (هـ) نهاية عندما هـ ← ٠ ، فإننا نحصل بهذه النهاية على دالة

جديدة تسمى بمعدل تغير الدالة عند النقطة $س_1$ حيث :

> معدل التغير فى د عند $س_1$ = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$
>
> بشرط أن تكون النهاية موجودة

ملخص لبعض القوانين

المربع

محيط المربع = طول الضلع × ٤ ← د (س) = ٤ س

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه ← د (س) = $س^2$

حيث س طول ضلع المربع

المستطيل

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

مساحة المستطيل = الطول × العرض

المكعب

المساحة الجانبية = ٤ × مربع طول حرفه ← د (س) = ٤ $س^2$

المساحة الكلية = ٦ × مربع طول حرفه ← د (س) = ٦ $س^2$

الحجم = مكعب طول حرفه ← د (س) = $س^3$

حيث س طول حرف المكعب

الدائــرة

محيط الدائرة = ٢ π نق ← د (س) = ٢ π س

مساحة الدائرة = π نق^{٢} ← د (س) = π س^{٢}

حيث س طول نصف قطر الدائرة

الكــرة

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} ← د (س) = ٤ π س^{٢}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ← د (س) = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣}

حيث س طول نصف قطر الكرة

مثال (٢)

إذا كانت د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣ فأحسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫٢ ثم أحسب معدل تغير الدالة د عندما س = ٣

الحل

د (س$_{١}$) = د (٣) = ٩ + ٦ − ٣ = ١٢

د (س$_{٢}$) = د (٣٫٢) = (٣٫٢)^{٢} + ٢ (٣٫٢) − ٣ = ١٣٫٦٤

$$\text{متوسط التغير} = \frac{د(س_{٢}) - د(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١٣٫٦٤ - ١٢}{٣٫٢ - ٣} = \frac{١٫٦٤}{٠٫٢} = ٨٫٢$$

د (س$_{١}$ + هـ) = د (٣ + هـ) = (٣ + هـ)^{٢} + ٢ (٣ + هـ) − ٣

= ٩ + ٦ هـ + هـ^{٢} + ٦ + ٢ هـ − ٣ = هـ^{٢} + ٨ هـ + ١٢

$$\therefore م(هـ) = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ} = \frac{هـ^{٢} + ٨ هـ + ١٢ - ١٢}{هـ} = هـ + ٨$$

$\therefore$ معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (هـ + ٨) = ٨



مثال (٤)

إذا كانت ص = $\frac{٢}{س - ١}$ حيث س ≠ ١ فأوجد :

(١) دالة متوسط التغير في ص عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$ وأوجد هذا المتوسط عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٥

(٢) معدل التغير في ص عندما س = ٣

الحل

(١) ∵ ص = $\frac{٢}{س - ١}$ ∴ ت(هـ) = د($س_١$ + هـ) − د($س_١$)

$$= \frac{٢}{س_١ + هـ - ١} - \frac{٢}{س_١ - ١} \quad \text{(بتوحيد المقامات)}$$

$$= \frac{٢ س_١ - ٢ - ٢ س_١ - ٢ هـ + ٢}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)} = \frac{-٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$$

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{١}{هـ} \times \frac{-٢ هـ}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$$

$$م(هـ) = \frac{-٢}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$$

عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٥ تكون $س_١$ = ٢ ، هـ = ٢,٥ − ٢ = ٠,٥

$$∴ م(هـ) = \frac{-٢}{(٢ + ٠,٥ - ١)(٢ - ١)} = \frac{-٢}{١,٥ \times ١} = -١\frac{١}{٣}$$

(٢) معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠}$ م(هـ) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{-٢}{(س_١ + هـ - ١)(س_١ - ١)}$

$$= \frac{-٢}{(س_١ - ١)(س_١ - ١)}$$

عندما س = ٣ يكون معدل التغير = $\frac{-٢}{٢ \times ٢} = -\frac{١}{٢}$



مثال

احسب معدل تغير الدالة د (س) = $\sqrt{س + ٨}$ عندما س = ١

الحل

∵ د (س) = $\sqrt{س + ٨}$ ∴ مجال د =]−٨ ، ∞[

عند س = $س_١$ فإن د ($س_١$) = $\sqrt{س_١ + ٨}$

$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٨} - \sqrt{س_١ + ٨}}{هـ}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٨} - \sqrt{س_١ + ٨}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٨} - \sqrt{س_١ + ٨}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س_١ + هـ + ٨} + \sqrt{س_١ + ٨}}{\sqrt{س_١ + هـ + ٨} + \sqrt{س_١ + ٨}}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س_١ + هـ + ٨ - س_١ - ٨}{هـ\left(\sqrt{س_١ + هـ + ٨} + \sqrt{س_١ + ٨}\right)} = \frac{١}{\sqrt{س_١ + ٨} + \sqrt{س_١ + ٨}}$

عندما س = ١ يكون معدل التغير = $\frac{١}{\sqrt{٩} + \sqrt{٩}} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$

لاحظ أن لا يمكن إيجاد معدل تغير الدالة عند س = −٨ لأن النهاية تكون غير موجودة عندها

حل آخر عندما س = $س_١$

فإن د ($س_١$) = $(س_١ + ٨)^{\frac{١}{٢}}$ ، د ($س_١$ + هـ) = $(س_١ + هـ + ٨)^{\frac{١}{٢}}$

∴ دالة معدل التغير فى د

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_١ + هـ + ٨)^{\frac{١}{٢}} - (س_١ + ٨)^{\frac{١}{٢}}}{هـ}$

$= \frac{١}{٢}(س_١ + ٨)^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{س_١ + ٨}}$

عند س = ١ فإن معدل التغير = $\frac{١}{٢\sqrt{١ + ٨}} = \frac{١}{٢ \times ٣} = \frac{١}{٦}$



مثال (٦)

أوجد دالة متوسط التغير فى د حيث $د(س) = س^{٣}$ عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + هـ$ ثم **استنتج** معدل التغير فى د عند $س = ٢$

الحل

$\because د(س) = س^{٣}$

عندما $س = س_{١}$ $\therefore د(س_{١}) = س_{١}^{٣}$

عندما $س = س_{١} + هـ$ $\therefore د(س_{١} + هـ) = (س_{١} + هـ)^{٣}$

$$\text{دالة متوسط التغير} = \frac{د(س_{١} + هـ) - د(س_{١})}{هـ} = \frac{(س_{١} + هـ)^{٣} - س_{١}^{٣}}{هـ}$$

$$\text{دالة معدل التغير} = \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_{١} + هـ)^{٣} - س_{١}^{٣}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_{١} + هـ)^{٣} - س_{١}^{٣}}{(س_{١} + هـ) - س_{١}} = ٣ \times س_{١}^{٣-١} = ٣ س_{١}^{٢}$$

عندما $س = ٢$ $\therefore س_{١} = ٢$

$\therefore$ معدل التغير فى د $= ٣ \times (٢)^{٢} = ١٢$

مثال (٧)

يوضح الشكل المقابل :

المنحنى $ص = د(ن)$ حيث ص جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور



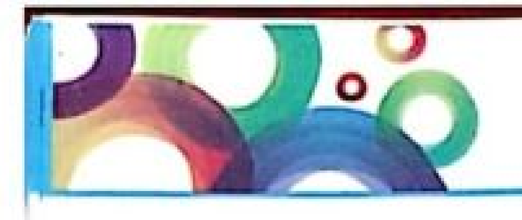
أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

(١) $ن = ٤$ إلى $ن = ٨$ (٢) $ن = ٨$ إلى $ن = ١٠$

الحل

(١) من الرسم $د(٨) = ٥$ ، $د(٤) = ١$





متوسط التغير فى د = $\frac{د(٨) - د(٤)}{٨ - ٤} = \frac{٥ - ١}{٤} = ١$ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة

(٢) من الرسم د (١٠) = ٢ ، د (٨) = ٥

متوسط التغير فى د = $\frac{د(١٠) - د(٨)}{١٠ - ٨} = \frac{٢ - ٥}{٢} = -١,٥$ مليون جنيه / شهر

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٥ مليون جنيه شهريًا خلال هذه الفترة

مثال (٨)

صفيحة من المعدن على شكل دائرة تتعرض للحرارة فتتمدد بإنتظام محتفظة بشكلها
أوجد معدل التغير فى مساحة سطح الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما
يكون طول نصف قطرها ١٤ سم $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

بفرض أن طول نصف القطر = س ∴ مساحة الصفيحة = π س^٢

∴ د (س) = π س^٢

$م(هـ) = \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \frac{\pi(س + هـ)^٢ - \pi س^٢}{هـ} = \frac{\pi[(س + هـ)^٢ - س^٢]}{هـ}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \pi \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{(س + هـ) - س} = \pi \times ٢$ س

عندما يكون طول نصف القطر = ١٤

∴ معدل التغير = $\frac{٢٢}{٧} \times ٢ \times ١٤ = ٨٨$



تمرين ١ على معدل التغير

أولا راجع معنا واختبر نفسك

عزيزى الطالب

فى هذا المكان من كل تمرين ستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق فى صورة إختبار تراكمى على ما سبق دراسته يتم الإجابة فى نفس الورقة قبل أن تدخل فى الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست بإستمرار ولا تنساه ويجعلك فى مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك فى تواصل مع ما درست وأيضًا يعودك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

ثانيا مسائل المستوى الأول

١ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة دالة التغير للدالة د (س) = ٢ س + ١ إذا تغيرت س من ٣ إلى ٤ يساوى ....

[١ أ، -١ أ، -٢ أ، ٢]

(٢) قيمة دالة التغير للدالة د (س) = س^{٢} + ١ إذا كان التغير فى س = ٠,٢ عندما س = ١ يساوى ....

[٠,٢٢ أ، ٠,٤٤ أ، ٤,٤ أ، ٢,٢]

(٣) قيمة دالة التغير للدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س - ٣ عندما س = ٢ ، Δ س = -١ يساوى ....

[$\frac{١}{٥}$ أ، $\frac{-١}{٥}$ أ، -٥ أ، ٥]

٢ إذا كان د (س) = س^{٢} - ٣ س ودالة التغير ت عندما س = ٢ فإن :

أولاً ت (٠,١) = ...

[٠,١١ أ، ١,١ أ، ١١ أ، ٠,٢٢]

ثانيا ت (-٠,٥) = ...

[٢,٥ أ، -٢,٥ أ، ٠,٢٥ أ، -٠,٢٥]

٣ إذا كانت د (س) = س^{٢} + ٢ س - ١ فإن التغير فى د عندما :

(١) تتغير س من ٢ إلى ٢,١ = ...

[١,٦ أ، ٠,١٦ أ، ٠,٦١ أ، ٦,١]

(٢) س = -٢ ، هـ = ١ يساوى ....

[صفر أ، -١ أ، ١ أ، -٠,١]



4 إذا كان د (س) = ٣ س − ٢ أوجد دالة التغير ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٤ ثم أوجد معدل التغير عندما س = ٢

[د٣، ٣، ٣]

5 أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان د (س) = س^{٢} + ٣ فإن ت (٠,٥) = ... عندما س = ٢

[−١,٧٥ أ ٢,٢٥ أ ١,٧٥ أ ١٦,٢٥]

② إذا كان د (س) = ٢ س − ٣ فإن ت (٠,٣) = ...

[٠,٦ أ −٢,٤ أ ٢,٤ أ ٤ س − ٠,٩]

③ إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....

[٠,٣٢ أ ٠,٤٨ أ ٨ أ ١٦]

④ متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٣ س + ٥ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....

[١ أ ٣ أ ٧ أ ٩]

⑤ إذا كان متوسط التغير فى د = −٤,٤ عندما تتغير س من ٢,٤ إلى ٢ فإن التغير فى د يساوى ....

[−٠,٤ أ ٠,٤٤ أ ١,٧٦ أ −١,٧٦]

⑥ إذا كان متوسط التغير فى د = ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦ فإن د (٤) تساوى ....

[٤٠ أ ٧ أ ٨ أ ١٦]

⑦ متوسط التغير فى محيط مربع طول ضلعه س يساوى ....

[−١ أ ١ أ −٤ أ ٤]

⑧ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

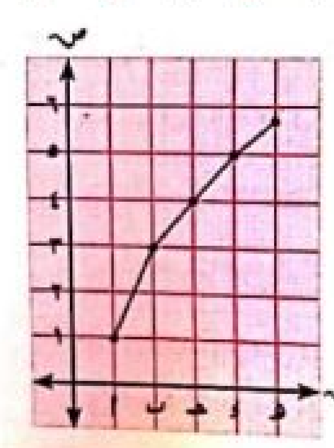
[١٠٩ أ ١٢٥ أ ٢١٨ أ ٣٤٣]

⑨ متوسط التغير فى مساحة مربع عندما يتغير طول ضلعه من ٢ سم إلى ٣ سم يساوى ....

[−٥ أ −١٣ أ ١٣ أ ٥]

⑩ يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د (س) فى أى الفترات يكون متوسط التغير فى د هو الأكبر ....

[[أ ، ب] أ [ب ، ج] أ [ج ، د] أ [أ ، هـ]]





ثالثًا مسائل المستوى الثاني

٦ أوجد متوسط التغير للدالة د حيث د $(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}$ وذلك عندما تتغير س من ٢ إلى ٢٫١ ثم أحسب معدل التغير لهذه الدالة عند س = ٢ [٦٫١ ، ٦]

٧ إذا كان د $(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ١$ أوجد دالة متوسط التغير للدالة ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير من ٣ إلى ٣٫٠١ ثم أوجد معدل التغير عندما س = ٤ [٩٫٠١ ، ١١]

٨ أوجد متوسط تغير الدالة ص = ٣ + ٢ س − $\text{س}^{٢}$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫١ ثم أحسب معدل التغير في هذه الدالة عندما س = ٣ [−٤٫١ ، −٤]

٩ أوجد متوسط تغير الدالة ص = $\text{س}^{٣}$ − ٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢٫١ وأحسب معدل تغيرها عند س = ٢ [١٢٫٦١ ، ١٢]

١٠ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د $(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ثم أحسب معدل التغير لهذه الدالة عندما س = $\sqrt{٣}$ $\left[\frac{-١}{٣}\right]$

١١ إذا كانت د دالة حيث د $(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} + ١$ فأوجد :

(١) دالة متوسط التغير للدالة.

(٢) معدل تغير هذه الدالة عند س = ٣ $\left[\frac{-١}{٩}\right]$

١٢ إذا كانت د $(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ١}$ فأوجد دالة معدل التغير عندما س = $\text{س}_{١}$ وأحسب معدل التغير عندما س = ٣ $\left[-\frac{١}{٢}\right]$

١٣ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د $(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - \text{س}$ عندما تتغير س من س إلى س + هـ ثم أحسب معدل التغير في الدالة عندما س = ١ [−٢]

١٤ أوجد دالة متوسط التغير في د حيث د $(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ عندما س = $\text{س}_{١}$ ثم استنتج معدل التغير عندما س = ٠ [−٢]

١٥ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د $(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٣}$ عندما س = $\text{س}_{١}$ ثم أحسب معدل التغير لهذه الدالة عندما س = ٧ $\left[\frac{١}{٤}\right]$

١٦ إذا كانت د (س) = أ س + ب فأوجد دالة التغير ت (هـ) عندما س = ١ وإذا كانت ت (٠٫١) = ٠٫٢ ، عندما د (١) = ٣ فأوجد قيمتى أ ، ب [٢ ، ١]





١٧ إذا كانت د (س) = $س^{٢}$ + أ س − ٣ **فأوجد** دالة التغير ت (هـ) عندما س = ٢
وإذا كانت ت $\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١٩}{٤}$ **فأوجد** قيمة أ [٥]

---

١٨ إذا كانت المسافة ف التى تقطعها حشرة خلال زمن قدره ن ثانية يعطى بالعلاقة
ف = $ن^{٢}$ − ٣ ن + ٢ **فأوجد** متوسط التغير فى المسافة عندما تتغير ن من ن = ٢ ث
إلى ٤ ث ثم **أحسب** معدل التغير فى ف عندما ن = ٢ ث [١ ، ٣]

---

١٩ صفيحة دائرية الشكل عند تسخينها تتمدد بإنتظام بحيث تحتفظ بشكلها
أوجد معدل تغير مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٤ سم [٨ π]

---

٢٠ سقط حجر من ماء ساكن فتكونت موجة دائرية تزداد بإنتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى **أحسب** متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يزداد طول نصف قطرها من ٣ سم إلى ٣٫١ سم ثم **أوجد** معدل التغير عندما يكون طول نصف قطرها ٣٫٥ سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ [٦٫١ π ، ٢٢]

---

٢١ صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بإنتظام بحيث تحتفظ بشكلها **أوجد** دالة متوسط التغير فى مساحة سطح الصفيحة عندما يتغير طول ضلعها من ٣ إلى ٣ + هـ
ومنه **أحسب** معدل التغير فى المساحة عندما يكون طول الضلع ٨ سم [١٦]

---

٢٢ مكعب يتمدد بإنتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله **أحسب** متوسط التغير فى مساحته الكلية وذلك عندما يتغير طول حرفه من ٣ سم إلى ٣٫٢ سم ثم **أحسب** معدل تغير مساحته الكلية عندما يكون طول حرفه ٣ سم [٣٧٫٢ سم² ، ٣٦ سم²]

---

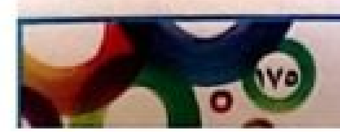
٢٣ كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروى **فأوجد** معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧ سم [١٩٦ π سم²]

---

٢٤ فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى **أحسب** متوسط التغير فى مساحة سطحها الكروى عندما يتغير طول نصف قطرها من ٠٫٥ سم إلى ٠٫٦ سم علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوى ٤ π $نق^{٢}$ حيث نق طول نصف قطر الكرة. [٤٫٤ π]

---

٢٥ إذا كانت الكمية ص (مُقاسة بالكيلوجرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلوجرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة :
ص = ١٠٠ − $\frac{٤٢}{س + ١}$ **أحسب** متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢ [٧]



٢٦ صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوي ضعف ارتفاعها المناظر تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها أحسب متوسط التغير في مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨٫٠٤ سم [١٦٫٠٤]

٢٧ مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بإنتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله وبنفس النسبة بين أبعاده ، أحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون عرضه ٥ سم وأحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يتغير طوله من ١٠ سم إلى ١١ سم [٢٠ ، ١٠]

٢٨ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د (س) = $س^{١٥}$ فإن معدل تغير الدالة د عندما س = ١ يساوي ....

[١ أ ١٥ أ ١٤ أ -١٥]

② إذا كانت د (س) = طا س فإن معدل تغير الدالة د عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ يساوي ....

[١ أ $\frac{١}{٢}$ أ ٢ أ $\frac{-١}{٢}$]

③ إذا كانت د (س) = جتا س فإن معدل تغير الدالة د عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوي ....

[$\frac{١}{٢}$ أ صفر أ ١ أ -١]

④ إذا كانت د (س) = $س^{٥}$ فإن $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ = ...

[٥ أ ٥ $س^{٤}$ أ $س^{٥}$ أ غير موجودة]

⑤ إذا كانت د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ = ...

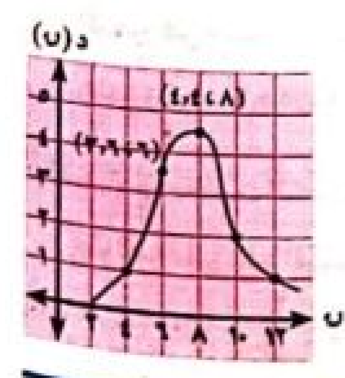
[$\frac{-١}{س^{٢}}$ أ $\frac{١}{س^{٢}}$ أ $-س^{٢}$ أ $\frac{-١}{س}$]

⑥ $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{جا\left(\frac{\pi}{٤} + هـ\right) - جا\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{هـ}$ = ...

[$\frac{جا هـ}{هـ}$ أ جا هـ أ جتا هـ أ جتا $\frac{\pi}{٤}$]

⑦ يوضح الشكل المقابل المنحنى ص = د (ن) حيث ص جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدرًا بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :





أولاً ن = ٤ إلى ن = ٨ يساوى ....

[-٥,٨ أ، -٠,٨٥ أ، ٠,٨٥ أ، ٥,٨]

ثانيًا ن = ٨ إلى ن = ١٠ يساوى ....

[-٠,١٢ أ، -١,٢ أ، ٠,١٢ أ، ١,٢]

ثالثًا ن = ٤ إلى ن = ١٢ يساوى .... [صفر أ، -١ أ، ١ أ، ١,٢]

⑧ إذا كانت الدالة د : د (س) = { س^2 + ١ عندما س < ٢ ، ٣ س - ١ عندما س ≥ ٢ } فإن :

أولاً متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

[٠,١ أ، صفر أ، -٣ أ، ٣]

ثانيًا معدل تغير الدالة عندما س = ١ يساوى ....

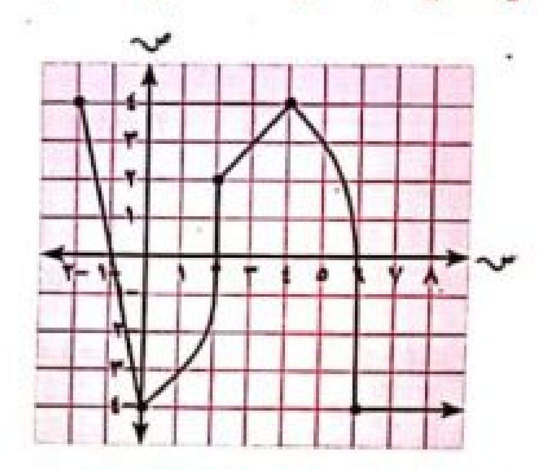
[١ أ، ٢ أ، -١ أ، -٢]

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٢٩ فى الشكل المقابل :

منحنى الدالة د حيث ص = د (س)

حدد الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتًا وفسر إجاباتك



---

٣٠ صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد متوسط التغير فى مساحة الصفيحة عندما يتغير طول ضلعها من ١,٥ سم إلى ٢,٥ سم [$\sqrt{3}$]

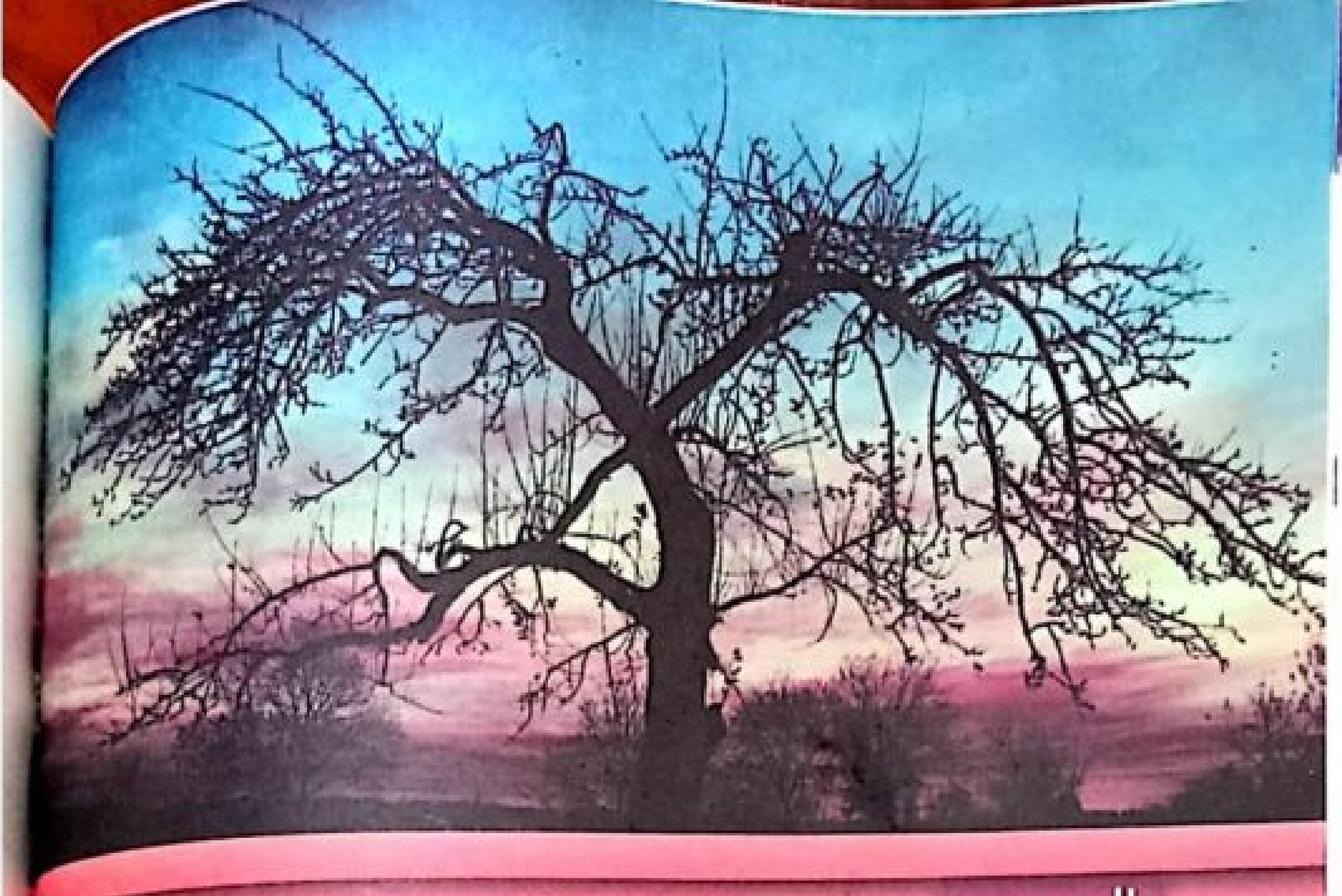
---

٣١ مثلث متساوى الأضلاع أحسب متوسط تغير مساحة سطحه عندما يتغير طول ضلعه من ٨ سم إلى ١٠ سم [$\frac{9\sqrt{3}}{2}$]

---

٣٢ صفيحة من المعدن على شكل مربع تتعرض للحرارة فتتمدد محتفظة بشكلها أحسب التغير فى طول ضلعها عندما تتغير المساحة بمقدار ٩ سم^2 بدءًا من اللحظة التى يكون فيها طول الضلع ٤ سم [١ سم]







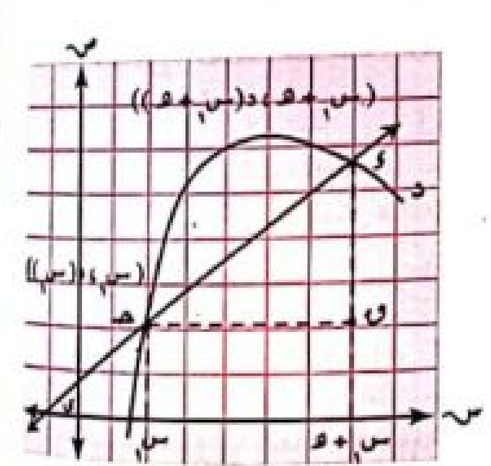
الإشتقـــاق

في الشكل المقابل :

منحنى د :]أ ، ب[← ح حيث ص = د (س) ،

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ قاطعًا له في النقطتين حـ $\left(\text{س}_1 ، \text{د}(\text{س}_1)\right)$

، ء $\left(\text{س}_1 + \text{هـ} ، \text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ})\right)$

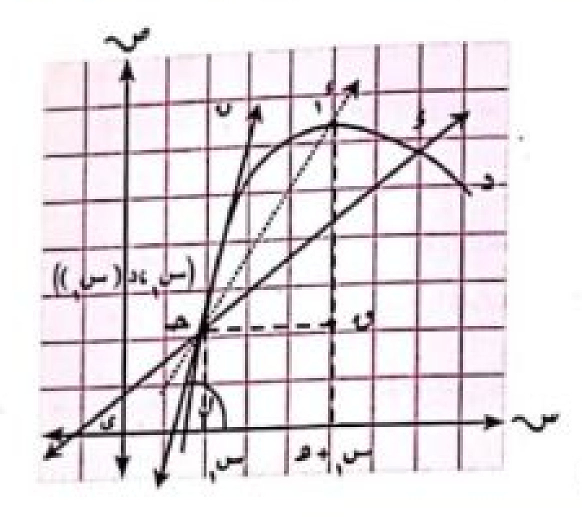


فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} = \dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

$$= \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{س}_1} = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

ويكون ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ظا ى = $\dfrac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ = م(هـ) **(دالة متوسط التغير)**





وإذا كانت النقطة جـ $(س_1 ، د(س_1))$ نقطة ثابتة على منحنى الدالة د وتحركت النقطة ء على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ ليأخذ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ الوضع $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ويصبح مماسًا للمنحنى عند جـ أى أن هـ ← صفر

فإن ميل المماس عند جـ = ظا ل

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$ إن وجدت

أى أن ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) عند النقطة $(س_1 ، د(س_1))$ يساوى معدل التغير فى د عند س = $س_1$

الدالة المشتقة

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا فى المتغير س يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلى الأول» ويمكن تعريفها كما يلى :

تعريف

إذا كانت د :]أ ، ب[← ح ، س ∈]أ ، ب[فإن ،

الدالة المشتقة $د' = د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

رموز الدالة المشتقة

إذا كانت ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

- $ص'$ أو $د'$ ← وتقرأ «مشتقة ص» أو «مشتقة د»
- $\frac{ءص}{ءس}$ ← وتقرأ «دال ص دال س» أو «مشتقة ص بالنسبة إلى س»



ملاحظة

ميل المماس لمنحنى $ص = د(س)$ عند النقطة $\left(س_١ ، د(س_١)\right)$ هو $د'(س_١)$

فمثلاً

لإيجاد الدالة المشتقة للدالة د أو ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = ٣س^٢ - ١$ عند النقطة $(١ ، ٣)$ فإن ميل المماس عند $(س = ١)$ = المشتقة الأولى للدالة عند $(س = ١)$

$$= \text{معدل التغير في د عند } (س = ١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(١ + هـ)^٢ - ١ - ٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(١ + ٢هـ + هـ^٢) - ٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣ + ٦هـ + ٣هـ^٢ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦ + ٣هـ)}{هـ} = ٦$$

مثال ١

أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث $د(س) = س^٢ + ٣س + ٥$ مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة $(-١ ، ٣)$

الحل

$$\because د(س) = س^٢ + ٣س + ٥$$

$$د(س + هـ) = (س + هـ)^٢ + ٣(س + هـ) + ٥$$

$$= س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٣س + ٣هـ + ٥$$

$$د(س + هـ) - د(س) = س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٣س + ٣هـ + ٥$$

$$- س^٢ - ٣س - ٥ = ٢س هـ + هـ^٢ + ٣هـ$$

$$= هـ(٢س + هـ + ٣)$$

$$\because د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$\therefore د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢س + هـ + ٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٢س + هـ + ٣)$$

$$\therefore د'(س) = ٢س + ٣ \qquad \because د(-١) = (-١)^٢ + ٣(-١) + ٥ = ٣$$

$\therefore$ النقطة $(-١ ، ٣)$ تقع على المنحنى د

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $(-١ ، ٣) = د'(-١) = ٢ \times -١ + ٣ = ١$





مثال (٢)

أوجد مستخدمًا التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

① $د(س) = \sqrt{٢س - ٣}$ ② $د(س) = \frac{١}{س + ٢}$

الحل

① ∵ $د(س) = \sqrt{٢س - ٣}$ ∴ $د(س + هـ) = \sqrt{٢س + ٢هـ - ٣}$

$$د(س + هـ) - د(س) = \sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}$$

$$∵ د'(س) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$∴ د'(س) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{هـ} \times \frac{\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}{\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

(المرافق)

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{٢س + ٢هـ - ٣ - ٢س + ٣}{هـ \left[\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}\right]}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{٢هـ}{هـ \left[\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}\right]}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{٢}{\sqrt{٢س + ٢هـ - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢س - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}}$$

$$∴ د'(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}} ،\ س > \frac{٣}{٢}$$

② ∵ $د(س) = \frac{١}{س + ٢}$ ∴ $د(س + هـ) = \frac{١}{س + هـ + ٢}$



$$د(س + هـ) - د(س) = \frac{1}{س + هـ + 2} - \frac{1}{س + 2}$$

$$= \frac{س + 2 - س - هـ - 2}{(س + هـ + 2)(س + 2)} = \frac{-هـ}{(س + هـ + 2)(س + 2)}$$

$$\because د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$\therefore د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{1}{هـ} \times \frac{-هـ}{(س + هـ + 2)(س + 2)}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-1}{(س + هـ + 2)(س + 2)}$$

$$\therefore د'(س) = \frac{-1}{(س + 2)^2} \text{ ، } س \neq -2$$

مثال (٢)

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^3 + ١ عند النقطة أ (١، ٢)
ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ

الحل

د (س) = س^3 + ١ $\qquad$ د (١) = (١)^3 + ١ = ٢

∴ النقطة (١، ٢) ∈ للمنحنى د

ميل المماس عند (س = ١) = معدل التغير فى د عند (س = ١)

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(1 + هـ) - د(1)}{هـ}$$

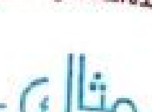
$$\therefore \text{ميل المماس} = \lim_{هـ \to 0} \frac{[(1 + هـ)^3 + 1] - 2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(1 + هـ)^3 - 1}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(1 + هـ)^3 - 1^3}{(1 + هـ) - 1} = 3 \times 1^2 = 3$$

∴ ظا ل = ٣ $\qquad$ ∴ ل = ظا$^{-1}$ (٣) = ٧١° ٣٤َ





مثال ٤

إذا كان د (س) = أ س^٣ − ٢ حيث أ ثابت أوجد :

① المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

② قيمة أ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند س = ١ يساوى ٩

الحل

① ∵ د (س) = أ س^٣ − ٢ ∴ د (س + هـ) = أ (س + هـ)^٣ − ٢

∵ د′(س) = نهــا (هـ ← ٠) [د (س + هـ) − د (س)] / هـ

∴ د′(س) = نهــا (هـ ← ٠) ([أ (س + هـ)^٣ − ٢] − [أ س^٣ − ٢]) / هـ

= نهــا (هـ ← ٠) [أ (س + هـ)^٣ − ٢ − أ س^٣ + ٢] / هـ = نهــا (هـ ← ٠) [أ (س + هـ)^٣ − أ س^٣] / هـ

= نهــا (هـ ← ٠) أ [((س + هـ)^٣ − س^٣) / هـ] = أ نهــا (هـ ← ٠) [((س + هـ)^٣ − س^٣) / ((س + هـ) − س)]

∴ د′(س) = أ × ٣ س^٢ = ٣ أ س^٢

② ∵ ميل المماس = د′(س) = ٩ عندما س = ١

∴ ٩ = ٣ أ (١)^٢ ∴ ٣ أ = ٩ **∴ أ = ٣**

مثال ٥

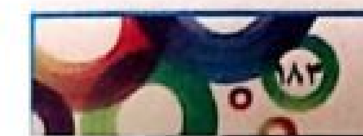
إذا كان د (س) = أ س^٢ + ب س حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

① المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

② قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (−١ ، −٢) الواقعة عليه يساوى ١

الحل

∵ د (س) = أ س^٢ + ب س



$\therefore$ د(س + هـ) = أ(س + هـ)^{٢} + ب(س + هـ)

= أ س^{٢} + ٢أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب س + ب هـ

د(س + هـ) − د(س) = أ س^{٢} + ٢أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب س + ب هـ − أ س^{٢} − ب س

= ٢أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب هـ = هـ (٢أ س + أ هـ + ب)

$\because$ د′(س) = نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{هـ (٢أ س + أ هـ + ب)}}{\text{هـ}}$

د′(س) = نهـــا (هـ ← ٠) (٢أ س + أ هـ + ب) $\therefore$ د′(س) = ٢أ س + ب

إذا كان ميل المماس = د′(س) = ١   عند س = −١

١ = ٢أ × −١ + ب

$\therefore$ −٢أ + ب = ١   (١)

$\because$ (−١ ، −٢) تقع على المنحنى د $\therefore$ د(−١) = −٢

د(س) = أ س^{٢} + ب س

−٢ = أ(−١)^{٢} + ب(−١)

$\therefore$ أ − ب = −٢   (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

$\therefore$ −أ = −١ ÷ (−١)   **$\therefore$ أ = ١**

بالتعويض في (١)

$\therefore$ −٢أ + ب = ١ $\therefore$ −٢ × ١ + ب = ١

$\therefore$ ب = ١ + ٢   **$\therefore$ ب = ٣**

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

يقال أن الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة)

إذا وفقط إذا كانت د′(أ) لها وجود حيث: د′(أ) = نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{د(أ + هـ) − د(أ)}}{\text{هـ}}$

وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة]جـ ، ء[نقول أن الدالة د قابلة للإشتقاق في هذه الفترة ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للإشتقاق على ع



المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى

إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ (حيث أ تنتمى إلى مجال الدالة) وكانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فنبحث عن قابلية الإشتقاق عند س = أ بأن نوجد المشتقة اليمنى للدالة ويرمز لها د′ (أ⁺) والمشتقة اليسرى ويرمز لها د′ (أ⁻) حيث:

المشتقة اليمنى = د′ (أ⁺) = $\lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

المشتقة اليسرى = د′ (أ⁻) = $\lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

وتكون الدالة د قابلة للإشتقاق عند أ إذا فقط إذا كان: **د′ (أ⁺) = د′ (أ⁻)**

ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز د′ (أ)

الإشتقاق والإتصال

تعريف

إذا كانت الدالة د حيث ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

ملاحظات هامة

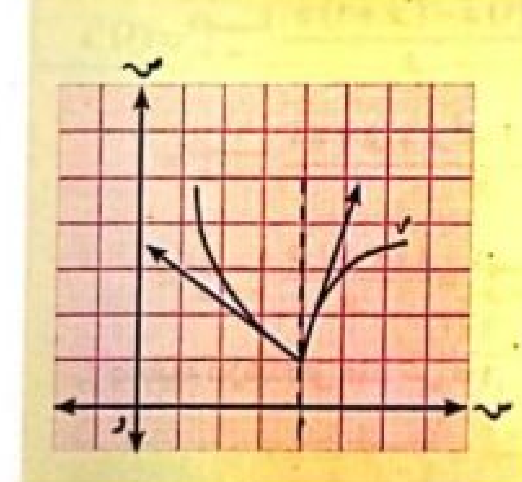
1. إتصال دالة عند نقطة لا يعنى بالضرورة أنها قابلة للإشتقاق عند نفس النقطة.

فمثلاً

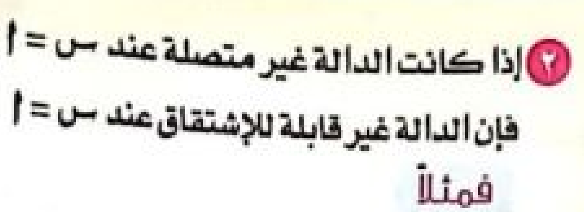
الدالة ر متصلة عند أ

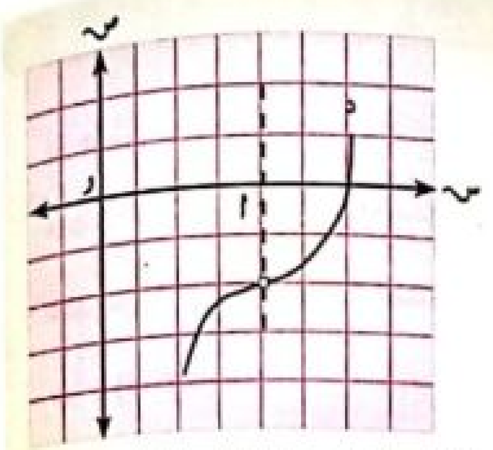
ولكن ميل المماس الأول (المشتقة اليمنى) ≠ ميل المماس الثانى (المشتقة اليسرى)

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = أ









② إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ
فإن الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = أ

فمثلاً

الدالة د غير متصلة عند س = أ
لأن الدالة غير معرفة عند س = أ
∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = أ

③ عند بحث إشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها يفضل بحث إتصالها عند هذه النقطة أولاً.
فإذا كانت د متصلة نبحث الإشتقاق.
فإذا كانت د غير متصلة فالدالة غير قابلة للإشتقاق.

مثال ⑥

أثبت أن : د (س) = $س^٢$ − س + ٣ قابلة للإشتقاق عند س = ١

الحل

∵ د (س) كثيرة حدود ∴ مجال د = ع

∴ د معرفة عند س = ١ ∴ د (١) = $(١)^٢$ − ١ + ٣ = ٣

$$د'(١) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{[(١ + هـ)^٢ - (١ + هـ) + ٣] - ٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ١ - هـ + ٣ - ٣}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{هـ^٢ + هـ}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{هـ(هـ + ١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} (هـ + ١) = ١ \in ع$$

∴ د قابلة للإشتقاق عند س = ١





مثال ٧

أثبت أن: $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ قابلة للإشتقاق عند س = ٤

الحل

لإيجاد مجال الدالة د نضع المقام = ٠

∵ س − ٢ = ٠   ∴ س = ٢   ∴ مجال د = ح − {٢}

∵ د معرفة عند س = ٤   ∴ $د(٤) = \frac{١}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢}$

$$د'(٤) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٤ + هـ) - د(٤)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٤ + هـ - ٢} - \frac{١}{٢}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٢ + هـ} - \frac{١}{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{٢ - ٢ - هـ}{٢(٢ + هـ)}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{-هـ}{٢(٢ + هـ)}}{هـ}$$

$$\therefore د'(٤) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١}{٢(٢ + هـ)} = \frac{-١}{٤} \in ح$$

∴ د قابلة للإشتقاق عند س = ٤

مثال ٨

أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ١ حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ١ - ٢س & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

الحل

∵ مجال د = ح   ∴ الدالة معرفة عند س = ١

∴ د(١) = ١ + ٣ = ٤

$$\text{المشتقة اليمنى} = د'(١^{+}) = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{١ + هـ + ٣ - ٤}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{هـ}{هـ} = ١$$



المشتقة اليسرى $= \text{د}'(1^-) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{[1 - 2(1+\text{هـ})] - 4}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{1 - 2 - 2\text{هـ} - 4}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{-2\text{هـ} - 5}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} -2 - \dfrac{5}{\text{هـ}} = -2 - \dfrac{5}{0}$

∴ النهاية غير موجودة ∴ المشتقة اليسرى غير موجودة

∴ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س = ١

مثال ٩

أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ٢ حيث ،

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س} - 9 & \text{عندما س} \geq 2 \\ \text{س}^2 - 5 & \text{عندما س} < 2 \end{cases}$

الحل

∵ مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

∴ $\text{د}(2) = 4 \times 2 - 9 = -1$

المشتقة اليمنى $= \text{د}'(2^+) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{[4(2+\text{هـ}) - 9] - (-1)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{8 + 4\text{هـ} - 9 + 1}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{4\text{هـ}}{\text{هـ}} = 4$

∴ $\text{د}'(2^+) = 4$

المشتقة اليسرى $= \text{د}'(2^-) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{[(2+\text{هـ})^2 - 5] - (-1)}{\text{هـ}}$



$$= \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤} + \text{٤هـ} + \text{هـ}^{2} - \text{٥} + \text{١}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤هـ} + \text{هـ}^{2}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(\text{٤} + \text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} (\text{٤} + \text{هـ}) = \text{٤}$$

∵ $\text{د}'(\text{٢}^{-}) = \text{٤}$ ∴ $\text{د}'(\text{٢}^{+}) = \text{د}'(\text{٢}^{-}) = \text{٤}$

∴ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = ٢

مثال ١٠

ابحث قابلية إشتقاق الدالة د حيث د (س) = | س − ٢ | عند س = ٢

الحل

د (س) = | س − ٢ |

$$\therefore \text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} - \text{٢} & \text{عندما س} \geqslant \text{٢} \\ \text{٢} - \text{س} & \text{عندما س} < \text{٢} \end{cases}$$

∵ مجال د = ح

∴ الدالة معرفة عند س = ٢ ، د (٢) = ٢ − ٢ = صفر

$$\text{د}'(\text{٢}^{+}) = \underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{٢} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{٢})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{[(\text{٢} + \text{هـ}) - \text{٢}] - \text{٠}}{\text{هـ}}$$

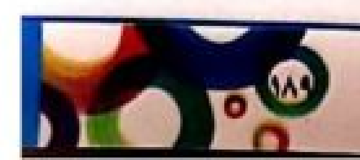
$$\text{د}'(\text{٢}^{+}) = \underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢} + \text{هـ} - \text{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{١}$$

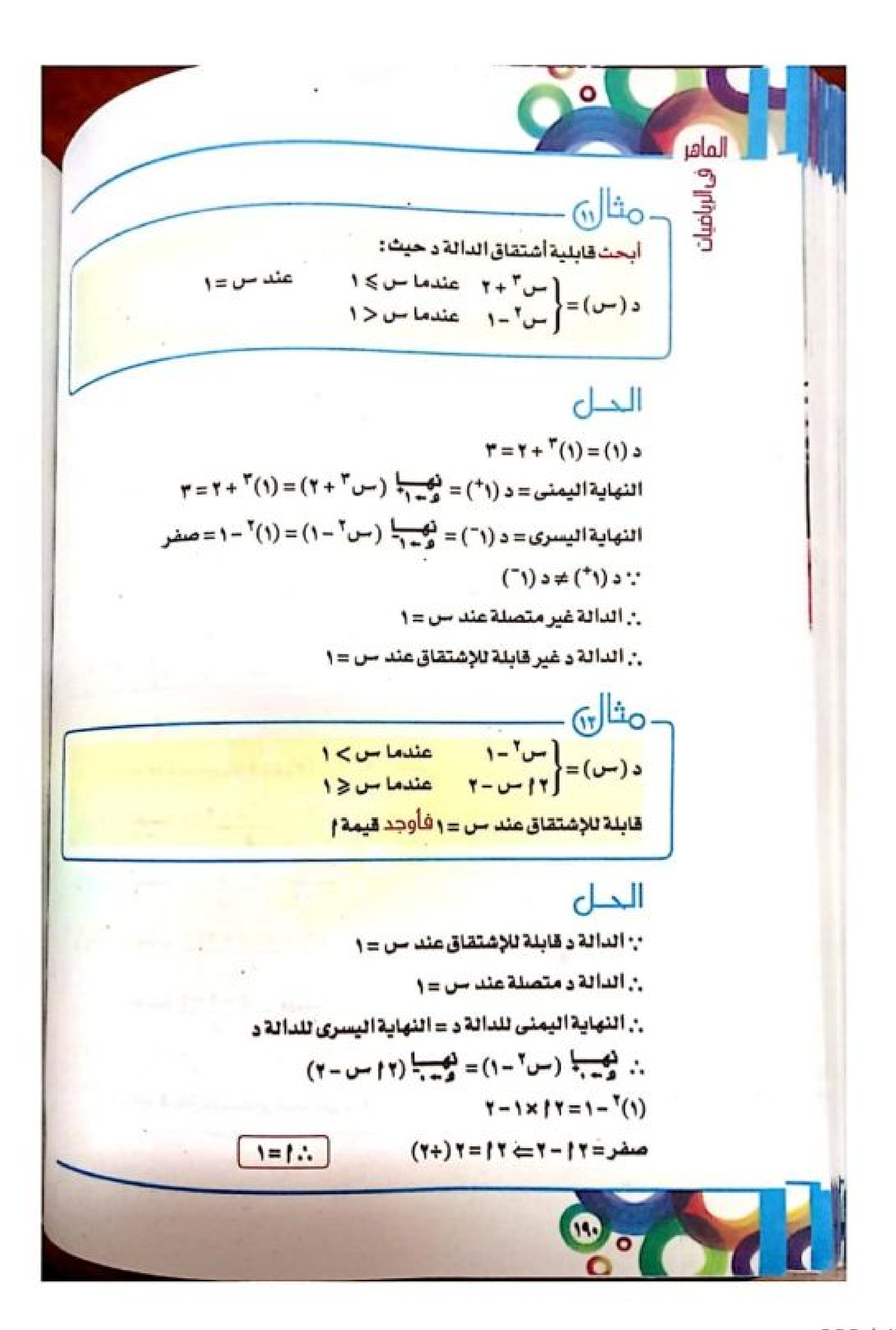
$$\text{د}'(\text{٢}^{-}) = \underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{٢} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{٢})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{[\text{٢} - (\text{٢} + \text{هـ})] - \text{٠}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢} - \text{٢} - \text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -\text{١}$$

∵ $\text{د}'(\text{٢}^{+}) \neq \text{د}'(\text{٢}^{-})$

∴ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س = ٢





مثال (١١)

أبحث قابلية أشتقاق الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢ & \text{عندما } س \leq ١ \\ س^{٢} - ١ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$$

عند س = ١

الحل

$د(١) = (١)^{٣} + ٢ = ٣$

النهاية اليمنى $= د(١^{+}) = \lim_{س \to ١^{+}} (س^{٣} + ٢) = (١)^{٣} + ٢ = ٣$

النهاية اليسرى $= د(١^{-}) = \lim_{س \to ١^{-}} (س^{٢} - ١) = (١)^{٢} - ١ =$ صفر

$\because د(١^{+}) \neq د(١^{-})$

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند س = ١

$\therefore$ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س = ١

مثال (١٢)

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٢أ\,س - ٢ & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ **فأوجد** قيمة أ

الحل

$\because$ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = ١

$\therefore$ الدالة د متصلة عند س = ١

$\therefore$ النهاية اليمنى للدالة د = النهاية اليسرى للدالة د

$\therefore \lim_{س \to ١^{-}} (س^{٢} - ١) = \lim_{س \to ١^{+}} (٢أ\,س - ٢)$

$(١)^{٢} - ١ = ٢أ \times ١ - ٢$

صفر $= ٢أ - ٢ \Leftarrow ٢أ = ٢ \quad (\div ٢)$

$\therefore أ = ١$

تمرين ٢



أولاً راجع معنا واختبر نفسك



½ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{.....}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان متوسط التغير فى د = ١,٢ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣
فإن التغير فى د يساوى .... [٠,١٢ أ ٣,٦ أ ٠,٣٦ أ ٣٦]

(٢) إذا كان متوسط التغير فى د = ٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ ، د (١) = ٦
فإن د (٣) = ... [٤ أ ٧ أ ٨ أ ١٤]

(٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٤سم إلى ٦سم
يساوى .... [١٥٢ أ ٧٦ أ ٣٨ أ ١٩]

(٤) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٢ س عندما تتغير س
من ١ إلى ٣ يساوى .... [صفر أ ١٢ أ ١٥ أ ٦]

---

(٥) أوجد معدل تغير الدالة د حيث د (س) = س + $\frac{١}{س}$ عند س = ٢

....

....

....

....

---

(٦) إذا كانت د (س) = س^{٢} − س + ١ فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣
ثم أحسب ت (−٠,٣)

....

....

....

....

ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) عند س = $س_١$ يساوى معدل .... فى د عند س = $س_١$

[متوسط التغير أ دالة التغير أ معدل التغير أ التغير]

② المشتقة الأولى للدالة ص = د (س) عند س = ١ يساوى ....

[$\frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$ أ $\frac{د(١+هـ) - د(هـ)}{هـ}$ أ $\frac{د(٠+هـ) - د(٠)}{هـ}$ أ $\frac{د(١-هـ) - د(١)}{هـ}$]

③ مشتقة الدالة د (س) = $س^٢$ عند س = ١ تساوى ....

[٢س أ ٢ أ ١ أ -٢]

④ مشتقة الدالة د : د (س) = ٢ س - ١ هى ....

[صفر أ -١ أ ٢ أ -٢]

⑤ الدالة د تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ ، أ ∈ مجال الدالة إذا كانت ....

[د (أ) لها وجود أ $د'$(أ) لها وجود أ $د'$(أ) = ثابت أ $د'$(أ) ليس لها وجود]

⑥ إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون .... عند س = أ

[$د'$(س) غير معرفة أ متصلة أ غير متصلة أ د (س) غير معرفة]

⑦ إذا كانت الدالة د حيث د :

$$د(س) = \begin{cases} س + ٥ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٢س^٢ + أ & \text{عندما } س \geqslant ٢ \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن أ = ... [-١ أ ١ أ صفر أ ٢]

⑧ إذا كانت الدالة د حيث د :

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } س > ٢ \\ أس^٢ + ب س - ١ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن ٢ أ + ب = ...

[-٣ أ -٤ أ ٤ أ ٣]





(٩) إذا كانت الدالة د حيث د :

$$د(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب س - ٦ & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ أ س + ٢ ب & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن ٢ أ - ب = ...

[-١ أ ٣ أ -١٥ أ ١٥]

٣ أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ - س + ١ مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (-٢ ، ٧) [-٥]

٤ أوجد مشتقة الدالة د حيث د (س) = $س^{٣}$ + ٤ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (-١ ، ٣) الواقعة عليه. [٣]

٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} أ س + ١ & \text{عندما } س \leqslant ١ \\ س^{٢} + ٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ فإن أ = ... [١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

(٢) إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٢ أ س - ٣ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ فإن أ = ... [١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

(٣) إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} أ س - ب & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ س^{٢} - ٣ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

حيث أ ، ب ثابتان فإذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند س = ٢

فإن ٢ أ - ب = ... [١ أ ٢ أ ٣ أ ٤]

(٤) إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ أ س + ب & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن أ + ب = ... [٤ أ -٤ أ ٨ أ -٨]

(٥) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س \leqslant ٢ \\ ٤ س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن د' (٢) = ... [١ أ ٢ أ ٤ أ ٨]



ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٦ إذا كانت د (س) = ٣ س^{٢} + ٤ س + ٧ أوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (-١ ، ٦)

[-٢]

٧ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = س^{٢} - ٥ عند س = ٢ وبين المعنى الهندسى لمشتقة الدالة عند س = ٢

[٤]

٨ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = ٢ س + ٣ عند س = ١ ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب دقيقة.

[٦٣° ٢٦']

٩ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = ١ - ٥ س - ٣ س^{٢} عند النقطة (-١ ، ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب دقيقة.

[٤٥°]

١٠ أوجد مستخدمًا التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = س^{٢} - ٣ س + ٢

② د (س) = $\sqrt{س}$

③ د (س) = $\sqrt{٣ س + ١}$

④ د (س) = $\frac{١}{س}$

⑤ د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$

⑥ د (س) = $\frac{س}{س + ١}$

⑦ د (س) = س^{٣} + ٢

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{س}$

١١ أوجد المشتقة الأولى للدالة د فى كل مما يأتى وعين قيم س التى تكون عندها الدالة غير قابلة للإشتقاق :

① د (س) = $\frac{١}{س}$

② د (س) = $\frac{١}{س + ٣}$

③ د (س) = $\frac{٣}{٢ س - ٥}$

④ د (س) = $\sqrt{س - ٤}$





١٢ أبحث قابلية الإشتقاق لكل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة :

① د (س) = $س^٢$ − س + ١ عند س = ١

② د (س) = ٢ $س^٢$ − ٤ عند س = صفر

③ د (س) = $\frac{س - ١}{س + ١}$ عند س = ٢

④ د (س) = $\sqrt{س - ١}$ عند س = ١ ، عند س = ٥

---

١٣ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د حيث ،

د (س) = { ٥ − $س^٢$ عندما س ≥ ٢ ، $س^٢$ − ٣ عندما س < ٢ } عند س = ٢

---

١٤ إذا كان د (س) = { $\sqrt{س - ٢}$ عندما س ≥ ٢ ، $س^٢$ − ٤ عندما س < ٢ }

فأبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ٢

---

١٥ أبحث الإتصال وقابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ١ حيث ،

د (س) = { $س^٢$ + ٢ عندما س ≥ ١ ، س + ٢ عندما س < ١ }

---

١٦ أبحث قابلية الدالة د للإشتقاق عند س = ١ حيث ،

د (س) = { $س^٢$ + ٤ س − ٣ عندما س < ١ ، ٣ $س^٢$ − ١٢ س + ١١ عندما س > ١ }

---

١٧ أبحث قابلية الإشتقاق الدالة د عند س = ١ حيث ،

د (س) = { ٤ − $س^٢$ عندما س ≥ ١ ، ٢ س + ١ عندما س < ١ }

---

١٨ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د حيث د (س) = | س − ٢ | عند س = ٢

---

١٩ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د حيث د (س) = س | س | عند س = ٠

---

٢٠ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د حيث د (س) = (س − ٤) | س | عند س = ٠



٢١ أوجد قيمة الثابت $أ$ إذا كانت الدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} أ س^٢ + ١ & \text{عندما } س \geqslant ٢ \\ ٤ س - ٣ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ ثم أبحث قابلية الإشتقاق للدالة عند س = ٢

[١]

٢٢ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س \leqslant ١ \\ ٣ - أ س^٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة الثابت $أ$ ثم أبحث قابلية هذه الدالة للإشتقاق عند س = ١ [١]

٢٣ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} & \text{عندما } ٠ < س \leqslant ١ \\ س + ٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة الثابت $أ$ ثم أبحث قابلية هذه الدالة د للإشتقاق عند س = ١ [٣]

٢٤ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} ٣ س + ٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ أ س^٣ & \text{عندما } س \geqslant ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت $أ$ ثم أبحث قابلية الدالة د للإشتقاق عند س = ٢ [١]

٢٥ أوجد قيمة الثابت $أ$ إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = ٢ حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س + ٣ & \text{عندما } س < ٢ \\ أ س^٢ + ٨ س - ١ & \text{عندما } س \geqslant ٢ \end{cases}$$

[-٢]

٢٦ إذا كان $د(س) = أ س^٢ + ب$ حيث $أ$ ، ب ثابتان أوجد ،

① المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

② قيمتى $أ$ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، -٣) الواقعة عليه يساوى ١٢

[٣ ، -١٥]

٢٧ إذا كان $د(س) = \frac{أ}{س} + ب$ حيث $أ$ ، ب ثابتان أوجد ،

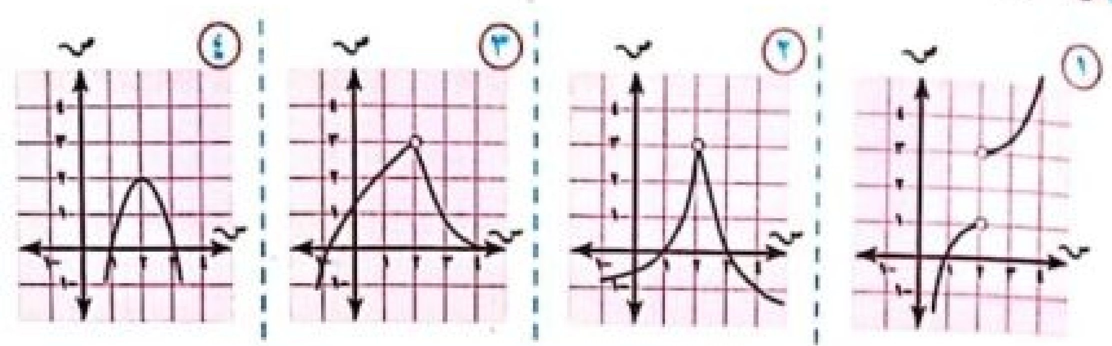
① المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

② قيمتى $أ$ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، ٤) الواقعة عليه يساوى -٣

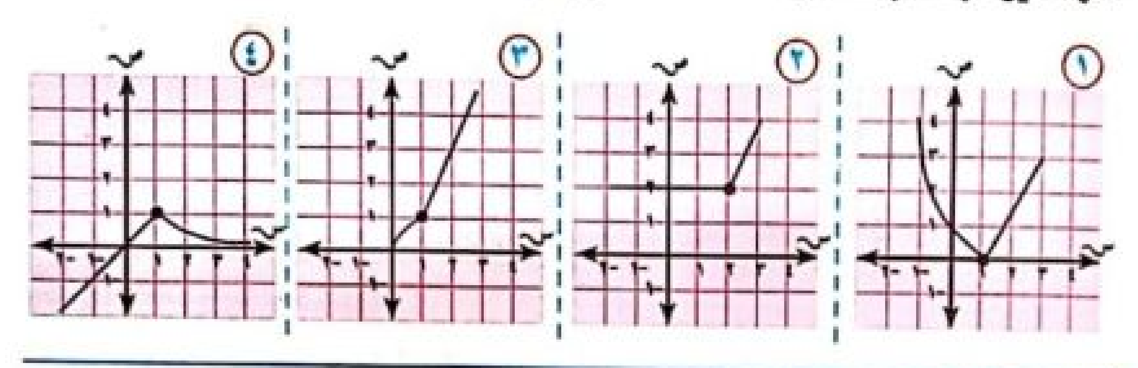
[٣ ، ١]



٢٨ أي الدوال الآتية قابلة للإشتقاق عند س = ٢



٢٩ قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية وأثبت أن كلاً منها غير قابلة للإشتقاق عند النقطة س = ١



٣٠ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة وكان د (٢) = ٣ ، د′(٢) = ١ فإن $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = ...

[٣ أ ١ أ −٣ أ غير موجودة]

② إذا كانت الدالة د : د (س) = { ك − طا ٢ س عندما س < ٠ ، ٣ س − ٢ عندما س ≥ ٠

قابلة للإشتقاق عند س = ٠ فإن ك = ...

[−١ أ صفر أ ١ أ −٢]

③ إذا كانت الدالة د : د (س) = { جا س عندما س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ ، ك − ٢ عندما س > $\frac{\pi}{٢}$

قابلة للإشتقاق عند س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن ك = ...

[صفر أ ١ أ ٣ أ −١]





④ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س^{3} & \text{عندما } س \le 2 \\ 12\,س & \text{عندما } س > 2 \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن $د'(2) =$ ....

[٦ أ ١٢ أ ٧ أ ٨]

⑤ إذا كانت $د(س) = |س|$ فإن: $د'(0) =$ ....

[صفر أ ٢ أ −٢ أ غير موجودة]

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٣١ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة $د(س) = \sqrt[3]{(س - 3)^{2}}$ عند س = ٣

٣٢ أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ٢ حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} س^{2} + 1 & \text{عندما } س \ge 1 \\ |2\,س| & \text{عندما } -1 < س < 1 \end{cases}$$

٣٣ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} -5\,س^{2} + 7\,س + 1 & \text{عندما } س \le 1 \\ \dfrac{3}{|س|} & \text{عندما } س > 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ١

٣٤ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} 6\,س + 11 & \text{عندما } |س| \le 1 \\ س^{2} + 4 & \text{عندما } |س| > 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = ١

٣٥ إذا كانت الدالة د حيث ،

$$د(س) = \begin{cases} م\,س + 3\,هـ & \text{عندما } س < 1 \\ هـ\,س^{2} + 4\,م & \text{عندما } س \ge 1 \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ ، د(١) = ١١ أوجد قيم الثابتين م ، هـ

ثم أبحث قابلية الإشتقاق عند س = ١ [٢٠١٢]



الدرس ٣

قواعد الإشتقاق

علمنا أن المشتقة الأولى للدالة د هى $د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

ولاحظنا أن إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال مثل $د(س) = س^3 + س^2 + 2س - 1$ تحتاج إلي كثير من الجهد والوقت للوصول إليها لذلك سوف نتعرف على بعض قواعد الإشتقاق التى تسهل علينا إيجاد المشتقة الأولى دون عناء أو جهد فيما يلى :

مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث جـ (ثابت) ∈ ح فإن $\frac{ءص}{ءس} = $ صفر

وذلك لأن :

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

$\because \frac{ءص}{ءس} = د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{جـ - جـ}{هـ} = $ صفرًا $(هـ \neq 0)$





فمثلاً

إذا كانت ص = ٣ فإن ص′ = صفر

إذا كانت د (س) = −٤ فإن د′(س) = صفر

مشتقة الدالة د (س) = سⁿ

إذا كانت ص = $س^ن$ حيث ن ∈ ح فإن $\frac{ءص}{ءس} = ن\,س^{ن-١}$

إذا كانت ص = أ $س^ن$ حيث أ ، ن ∈ ح فإن $\frac{ءص}{ءس} = أ\,ن\,س^{ن-١}$

إذا كانت ص = س فإن $\frac{ءص}{ءس} = ١$

فمثلاً

إذا كانت ص = $س^٣$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٣\,س^٢$

إذا كانت ص = ٢ $س^٤$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٨\,س^٣$

إذا كانت ص = ٢ س فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٢$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

١ د (س) = ٥

٢ د (س) = ٣ $س^٢$

٣ ص = $\frac{١}{س^٣}$

٤ ص = ٤ $\sqrt{س^٣}$

الحل

(١) د (س) = ٥ ∴ د′(س) = صفر

(٢) د (س) = ٣ $س^٢$ ∴ د′(س) = ٣ × ٢ س = ٦ س

(٣) ص = $\frac{١}{س^٣}$ = $س^{-٣}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٣\,س^{-٤} = \frac{-٣}{س^٤}$

(٤) ص = ٤ $\sqrt{س^٣}$ = ٤ $س^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ × \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = ٦\sqrt{س}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع ، ن دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ع ± ن تكون أيضًا قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع ± ن) = $\frac{د ع}{د س} \pm \frac{د ن}{د س}$

وبصفة عامة فإن :

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ ، .... ، $د_ن$ دوال قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

$\frac{د}{د س}$ ($د_1 \pm د_2 \pm د_3 \pm .... \pm د_ن$) (س)

$= د'_1$ (س) $\pm د'_2$ (س) $\pm د'_3$ (س) $\pm .... \pm د'_ن$ (س)

فمثلاً

$\frac{د}{د س}$ (س^3 + ٣ س^2 + ٥ س)

$= \frac{د}{د س}$ (س^3) + $\frac{د}{د س}$ (٣ س^2) + $\frac{د}{د س}$ (٥ س)

= ٣ س^2 + ٦ س + ٥

مثال (٢)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = ٢ س^3 + ٣ س^2 − ٤ س + ٥

(٢) ص = س (٢ س^2 − ٤ س − ٧)

(٣) ص = $\frac{س^3 + ٢ س^2 + س + ١}{س^3}$ حيث س ≠ ٠

الحل

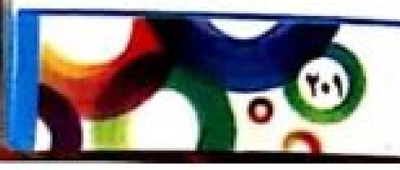
(١) ∵ د (س) = ٢ س^3 + ٣ س^2 − ٤ س + ٥

∴ د' (س) = ٦ س^2 + ٦ س − ٤

(٢) ∵ ص = س (٢ س^2 − ٤ س − ٧) بفك الأقواس

= ٢ س^3 − ٤ س^2 − ٧ س

∴ ص' = ٦ س^2 − ٨ س − ٧



(٣) $\because \text{ص} = \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س}^{٣}} = ١ + ٢\text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠ - ٢\text{س}^{-٢} - ٢\text{س}^{-٣} - ٣\text{س}^{-٤} = -\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}} - \frac{٣}{\text{س}^{٤}}$

مثال (٣)

إذا كانت $\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + \text{س}\sqrt{\text{س}} - ٦\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} - \frac{١}{٤\text{س}^{٤}}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + \text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - \frac{١}{٤}\text{س}^{-٤}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٦ \times \frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{١}{٣}} + \frac{١}{٤} \times ٤\text{س}^{-٥}$

$= ٤\text{س} + \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}} - ٨\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٥}}$

مثال (٤)

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١$ فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١، ١)

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٣$

$\therefore$ الميل عند النقطة (١، ١) $= ٣(١)^{٢} - ٨(١) + ٣ = -٢$

مثال (٥)

أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات للمنحنى $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} - ٥\text{س} - \frac{٢}{٣}$ عند النقطة (-١، ٣)

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{٣} \times ٣\text{س}^{٢} - ٥ = ٤\text{س}^{٢} - ٥$

$\therefore$ الميل عند النقطة (-١، ٣) $= ٤(-١)^{٢} - ٥ = -١$

$\because$ الميل $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{طا هـ} = -١$

$\therefore \text{هـ} = ١٣٥^{\circ}$



مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت ع ، ن دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن الدالة (ع . ن) تكون أيضًا قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{د}{د س}$ (ع . ن) = ع $\frac{د ن}{د س}$ + ن $\frac{د ع}{د س}$

أي أن مشتقة حاصل الضرب = الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

مثال ٦

إذا كان د (س) = (٢ س + ٣) (س^{٢} - ٢ س + ١) فأوجد د َ(س)

ثم أوجد د َ(-١)

الحل

د َ(س) = الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

= (٢ س + ٣) × (٢ س - ٢) + (س^{٢} - ٢ س + ١) × (٢)

= ٤ س^{٢} + ٢ س - ٦ + ٢ س^{٢} - ٤ س + ٢ = ٦ س^{٢} - ٢ س - ٤

∴ د َ(-١) = ٦ + ٢ - ٤ = ٤

ملاحظة يمكن البدء بإجراء ضرب الدالتين أولاً ثم إيجاد د َ(س) كما يلي :

د (س) = (٢ س + ٣) (س^{٢} - ٢ س + ١)

= ٢ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢ س + ٣ س^{٢} - ٦ س + ٣ = ٢ س^{٣} - س^{٢} - ٤ س + ٣

∴ د َ(س) = ٦ س^{٢} - ٢ س - ٤ وهى نفس النتيجة السابقة

مثال ٧

إذا كان ص = (س^{٢} - $\sqrt{س}$) (٢ س^{٤} + $\sqrt{س}$ - $\frac{٣}{س}$) أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

الحل

∵ ص = (س^{٢} - $\sqrt{س}$) (٢ س^{٤} + $\sqrt{س}$ - $\frac{٣}{س}$)

∴ ص = (س^{٢} - س$^{\frac{١}{٢}}$) (٢ س^{٤} + س$^{\frac{١}{٢}}$ - ٣ س$^{-١}$)



$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \left(س^{٢} - س^{\frac{١}{٢}}\right) \times \left(٨ س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{\frac{-١}{٢}} + ٣ س^{-٢}\right)$$
$$+ \left(٢ س^{٤} + س^{\frac{١}{٢}} - ٣ س^{-١}\right) \times \left(٢ س - \frac{١}{٢} س^{\frac{-١}{٢}}\right)$$

عندما $س = ١$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \left(١^{٢} - ١^{\frac{١}{٢}}\right) \times \left(٨ \times ١^{٣} + \frac{١}{٢} \times (١)^{\frac{-١}{٢}} + ٣ (١)^{-٢}\right)$$
$$+ \left(٢ (١)^{٤} + ١^{\frac{١}{٢}} - ٣ (١)^{-١}\right) \left(٢ \times ١ - \frac{١}{٢} \times (١)^{\frac{-١}{٢}}\right) = \text{صفر}$$

مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت ع ، ن دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت $ن(س) \neq$ ،

فإن الدالة $\left(\frac{ع}{ن}\right)$ تكون أيضًا قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون :

$$\frac{د}{د س}\left(\frac{ع}{ن}\right) = \frac{ن \frac{د ع}{د س} - ع \frac{د ن}{د س}}{ن^{٢}} \qquad \text{أى} \quad \left(\frac{ع}{ن}\right)' = \frac{ن ع' - ع ن'}{ن^{٢}}$$

أى أن : مشتقة خارج القسمة = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

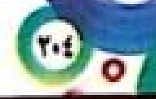
مثال ٨

أوجد المشتقة الأولى للدالة $ص = \frac{٢ س}{٢ س + ٣}$ ثم أوجد د$'(-٢)$

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(٢ س + ٣) \times ٢ - ٢ س \times ٢}{(٢ س + ٣)^{٢}} = \frac{٤ س + ٦ - ٤ س}{(٢ س + ٣)^{٢}} = \frac{٦}{(٢ س + ٣)^{٢}}$$

$$د'(-٢) = \frac{٦}{(٢ \times -٢ + ٣)^{٢}} = \frac{٦}{١} = ٦$$



مثال ٩

أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = $\frac{(س + ٢)(س + ٣)}{س + ٤}$

الحل

∵ ص = $\frac{(س + ٢)(س + ٣)}{س + ٤}$ ∴ ص = $\frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س + ٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + ٤)(٢س + ٥) - (س^٢ + ٥س + ٦) × ١}{(س + ٤)^٢}$

$= \frac{٢س^٢ + ١٣س + ٢٠ - س^٢ - ٥س - ٦}{(س + ٤)^٢} = \frac{س^٢ + ٨س + ١٤}{(س + ٤)^٢}$

مثال ١٠

أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{س^٢ + ٢س - ١}{س + ١}$ عند س = ١

الحل

ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + ١)(٢س + ٢) - (س^٢ + ٢س - ١) × ١}{(س + ١)^٢}$

$= \frac{٢س^٢ + ٤س + ٢ - س^٢ - ٢س + ١}{(س + ١)^٢} = \frac{س^٢ + ٢س + ٣}{(س + ١)^٢}$

$د'(١) = \frac{١ + ٢ + ٣}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

تمرين ٣ على قواعد الإشتقاق

أولا راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ١١

$\frac{1}{2}$ ساعة امتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{\quad}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون .... عند س = أ

[غير متصلة ، د$'$(أ) غير معرفة ، د(أ) غير معرفة ، متصلة]

(٢) إذا كانت الدالة د حيث : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + ٥ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٢\text{س} + \text{أ} & \text{عندما س} \geq ٢ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ فإن أ = ...

[صفر ، -١ ، ١ ، ٣]

(٣) متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٤١

يساوي .... [$\frac{٤١}{١٠}$ ، $\frac{١٠}{٤١}$ ، $\frac{-١٠}{٤١}$ ، $\frac{-٤١}{١٠}$]

(٤) معدل تغير الدالة د حيث د(س) = س^2 - ١ عند س = -٢ يساوي ....

[-٢ ، -٤ ، ٢ ، ٤]

---

(٥) أبحث قابلية إشتقاق الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^3 + ٢ & \text{عندما س} \geq ١ \\ \text{س}^2 - ١ & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

....

....

....

---

(٦) أبحث قابلية إشتقاق الدالة د حيث د(س) = | س - ٢ | عند س = ٢

....

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\frac{ء}{ء س}(٧) = $ .... [٧ ، صفر ، ١ ، غير موجودة]

② $\frac{ء}{ء س}(٥\pi) = $ .... [صفر ، ٥ ، π ، غير معرف]

③ $\frac{ء}{ء س}(س^{٧}) = $ .... [$٦س^{٧}$ ، $س^{٦}$ ، $٧س^{٦}$ ، ٧]

④ $\frac{ء}{ء س}(٣س^{٢}) = $ .... [$٥س$ ، $س$ ، ٦ ، $٦س$]

⑤ $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right) = $ .... [$\frac{-٣}{س^{٤}}$ ، $\frac{٣}{س^{٤}}$ ، $\frac{-١}{س^{٢}}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]

⑥ $\frac{ء}{ء س}\left(س^{\frac{١}{٢}}\right) = $ ....

[$٢س^{\frac{-١}{٢}}$ ، $\frac{١}{٢}س^{\frac{-١}{٢}}$ ، $س^{\frac{-١}{٢}}$ ، $\frac{٣}{٢}س^{\frac{٣}{٢}}$]

⑦ $\frac{ء}{ء س}\left(س^{\frac{-٣}{٥}}\right) = $ ....

[$\frac{٣}{٥}س$ ، $\frac{٣}{٥}س^{\frac{١}{٥}}$ ، $\frac{٣}{٥}س^{\frac{٨}{٥}}$ ، $\frac{-٣}{٥}س^{\frac{-٨}{٥}}$]

⑧ $\frac{ء}{ء س}\left(\sqrt[٤]{س}\right) = $ ....

[$٤\sqrt{س}$ ، $\frac{١}{٤}س^{\frac{٣}{٤}}$ ، $\frac{١}{٤}س^{\frac{-٣}{٤}}$ ، $س^{\frac{-٣}{٤}}$]

⑨ $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right) = $ ....

[$\frac{-١}{٣}س^{\frac{-٤}{٣}}$ ، $\frac{١}{٣}س^{\frac{٤}{٣}}$ ، $٣س^{\frac{-٤}{٣}}$ ، $٣س^{\frac{٤}{٣}}$]

⑩ $\frac{ء}{ء س}(س^{٣} + ٢س + ٧) = $ ....

[$٣س^{٢} + ٢$ ، $س^{٢} + ٢$ ، $٣س^{٢}$ ، $٣س^{٢} + ٢س$]

⑪ $\frac{ء}{ء س}(٥س^{٢} + ٣س + ٢) = $ ....

[$٧س + ٣$ ، $١٠س + ٣$ ، $٧س + ٤$ ، $١٠س$]

⑫ $\frac{ء}{ء س}\left(\sqrt{٢}س^{٧} - \frac{س^{٥}}{٥} + \pi\right) = $ ....

[$٧س^{٧} + س^{٤}$ ، $\sqrt{٢}س^{٦} + س^{٤}$ ، $٧س^{٦} + س^{٤}$ ، $٧\sqrt{٢}س^{٦} - س^{٤}$]



ثالثًا مسائل المستوى الثانى

مسائل على مجموع دالتين أو عدة دوال

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية حيث $س \neq ٠$:

① $ص = ٤ س + ٣$

② $د(س) = ٢ س^{٣} + ٢ س + ١$

③ $ص = ٢ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٩ س + ٨$

④ $ص = \frac{١}{٣} س^{٦} - ٢ س^{٥} - ١$

⑤ $ص = \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} + س - ٧$

⑥ $ص = س^{٢} (س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣)$

⑦ $د(س) = س^{٣} \left(٢ س - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)$

⑧ $ص = ٢ س^{-١} - ٣ س^{-٢} - \frac{٥}{٣} س^{-٣}$

⑨ $ص = ٣ س^{٢} - \frac{٣}{٢ س^{٢}} + \frac{١}{س} + ٤ س$

⑩ $ص = س (٣ س^{٢} - \sqrt{س})$

⑪ $ص = \sqrt{س} \left(٢ س^{\frac{٥}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}}\right)$

⑫ $د(س) = \frac{س^{٤} + ٢ س^{٢} - ٣ س}{س}$

⑬ $ص = \frac{٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٧}{س^{٢}}$

⑭ $ص = \frac{٤ س^{٢} - ٣ س + ٢ س}{س}$

⑮ $ص = \frac{٤ س^{٢} - س + ٣}{\sqrt{س}}$

⑯ $ص = ٢ س^{٦} + ٣ \sqrt{س}$

⑰ $ص = \sqrt[٣]{س^{٢}} - ٥ \sqrt[٣]{س} + ٩ - \frac{٣}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

⑱ $ص = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س^{٢}}$

⑲ $ص = \frac{(\sqrt{س} + ٢)(\sqrt{س} - ٢)(س + ٤)}{\sqrt{س}}$

⑳ $ص = س^{٢} + (س + ١)^{٢} - س + ٥$

٤ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ميل المماس للمنحنى $ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢ س + ٢$ عند $س = ١$ يساوى ....

[صفر ، -١ ، ١ ، ٢]

② ميل المماس للمنحنى $ص = ٢ س^{٥} + ٣ س^{٢} - ٢$ عند النقطة $(-١ ، -١)$ يساوى ....

[صفر ، -٤ ، ٤ ، ٢]

③ ميل المماس للمنحنى $ص = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ يساوى ....

[صفر ، ١ ، -٢ ، ٢]

٥ قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات :

(١) ص = ٢ س^٥ − ٩ س عند س = ١ تساوى ....

[٣٠° أ ٤٥° أ ٦٠° أ ٩٠°]

(٢) د (س) = س^٣ + ٤ س^٢ + ٤ س عند س = −١ تساوى ....

[٤٥° أ ٦٠° أ ١٢٠° أ ١٣٥°]

(٣) ص = س^٣ − ٣ س + ٥ عند النقطة (١ ، ٣) تساوى ....

[صفر° أ ٣٠° أ ٤٥° أ ٦٠°]

(٤) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^٢ − ٢ عند النقطة ($\sqrt{٣}$ ، −$\frac{١}{٢}$) تساوى ....

[صفر° أ ٣٠° أ ٤٥° أ ٦٠°]

٦ أثبت أن المماس للمنحنى ص = س^٢ + $\frac{١}{س}$ − ١ عند النقطة (١ ، −١) يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$

مسائل على مشتقة حاصل ضرب دالتين

٧ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = (٢ س − ٣) (٣ س + ١)

(٢) ص = (س^٢ + ١) (س^٣ − ٤)

(٣) ص = (س + ٢) (س^٢ + س − ١)

(٤) ص = (س − ٣) (س^٢ + ٢ س − ٤)

(٥) ص = (٢ س + ١) (٤ س^٢ − ٢ س + ١)

(٦) ص = (س^٢ + ٣) (س^٣ − ٣ س + ١)

(٧) ص = (س^٢ − $\sqrt{س}$) (س^٢ + ٢ $\sqrt{س}$)

(٨) ص = (٢ س^٤ − ٣ س + ٤) (س^٢ + $\sqrt{س}$ + $\frac{٢}{س}$)

(٩) ص = س ($\sqrt{س}$ + $\frac{١}{\sqrt{س}}$) ($\sqrt{س}$ − $\frac{١}{\sqrt{س}}$)

(١٠) ص = س^٢ (٢ س − ١) (س^٢ + ٣ س − ٢)



مسائل على مشتقة خارج قسمة دالتين

٨ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

① $ص = \frac{س}{س + ٢}$

② $ص = \frac{س - ١}{٢ س + ٣}$

③ $ص = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

④ $ص = \frac{٥ س - ٢}{٥ س + ١}$

⑤ $ص = \frac{س}{س^{٢} - ٣}$

⑥ $ص = \frac{س^{٢} - ٣}{س^{٢} + ١}$

⑦ $ص = \frac{س^{٢} + ٤ س + ٢}{س + ٢}$

⑧ $ص = \frac{س^{٢} + ٢ س + ٥}{س^{٢} - ٥ س + ١}$

⑨ $ص = \frac{(س - ١)(س + ١)}{س^{٢} + ١}$

⑩ $ص = \frac{س}{س + ٢} + \frac{٢ س}{س - ٢}$

٩ أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ عند $س = ٢$ [$\frac{-٣}{٢٥}$]

مسائل متنوعة على قواعد الإشتقاق

١٠ إذا كان $ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٩ س$ فأوجد قيم س التى تجعل $\frac{ءص}{ءس} = $ صفر [٣، -١]

١١ إذا كان $د(س) = س^{٣} - ٥ س + ٢$ فأوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ [±٢]

١٢ إذا كان $د(س) = (٢ س - ٣)(٣ س + ١)$ فأوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٥$ [١]

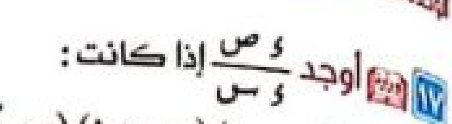
١٣ إذا كان $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ فأوجد قيم س التى يكون عندها $د'(س) = $ صفر [١، -١]

١٤ إذا كانت $ص = س^{٣} - أ س + ١$ ، $د'(١) = -١$ فأوجد قيمة أ [١]

١٥ إذا كانت $د(س) = أ س^{٣} + ب س$ وكانت $د(١) = ٢$ ، $د'(١) = ٠$
فأوجد قيمة كل من أ ، ب [-١، ٣]

١٦ إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = س^{٢} + أ س + ب$ يساوى -١ عند النقطة (٢ ، -٢)
فأوجد قيمة كل من أ ، ب [-٥، ١]





١٧ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت :

ص = (س − ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) (س^{٤} + ١) (س^{٨} + ١) (س^{١٦} + ١)

١٨ أوجد ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} − ٤ عند نقط تقاطعه مع محور السينات [٤ ، −٤]

١٩ أوجد ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} − ٣ س + ٤ عند نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات [−٣]

٢٠ أوجد ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} − ٤ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع المستقيم ص + ٢ س = ٤ [٤ ، −٨]

٢١ حدد نوع الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١ عند النقط (٢ ، ١٩) ، (−١ ، ١) مع الإتجاه الموجب لمحور السينات. [حادة ، منفرجة]

٢٢ إذا كان ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} ، $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٨ عندما س = ١ وكان متوسط تغير ص عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ٧ فأوجد قيمتى أ ، ب [أ = ٢ ، ب = ١]

٢٣ إذا كان ص (٢ س + ٤) = ٣ س + ١ أوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$ عند س = −١ [$\frac{٥}{٢}$]

٢٤ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{أ س + ب}$ يساوى (−٨) عند النقطة (١ ، −٤) أوجد قيمتى أ ، ب [٢ ، −٣]

٢٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان د (س) = س^{٢} + أ س + ٤ ، د$'$(١) = ٥ فإن أ = ...

[−٣ ، ٣ ، ٧ ، ٢]

② إذا كانت د (س) = س^{٥} فإن معدل تغير د (س) عند س = ٢ يساوى ....

[١٠ ، ٥ س^{٤} ، ٨٠ ، ٢١]

③ إذا كانت د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن د$'$(٣) = ...

[−١ ، −٢ ، ١ ، ٢]

④ إذا كانت ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن د$'$(٤) = ...

[$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{-١}{٨}$ ، $\frac{-١}{١٦}$]

⑤ إذا كانت د (س) = (س − ك) (س + ك) ، د$'$(١) = م فإن م = ...

[١ ، −٢ ، ٢ ، −١]





⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} م س + ك & \text{عندما } س > ١ \\ س^٣ + ٤ & \text{عندما } س \leqslant ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ فإن م + ك = ...

[٣ أو ٢ أو ١ أو ٥]

⑦ إذا كان س ص = ٣ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[$\frac{-ص}{س}$ أو $\frac{ص}{س}$ أو $\frac{-س}{ص}$ أو $\frac{س}{ص}$]

⑧ إذا كانت ص = $\frac{س^٣ - ١}{س^٣}$ فإن $س^٤ \frac{ءص}{ءس}$ = ...

[-١ أو ٢ أو ٣ أو ١]

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

26 أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س | س - ٣ | عند النقطة (٢ ، ٢) [-١]

27 أوجد المشتقة الأولى للدالة ص = $\frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}}$

28 إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٢س + ١}{أس + ب}$ عند النقطة (١ ، ٣) الواقعة عليه = -٧

فأوجد قيمتى أ ، ب [٣ ، -٢]

الدرس ٤

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

مشتقة الدالة $[د(س)]^{ن}$

إذا كانت ص $= [د(س)]^{ن}$ حيث د قابلة للإشتقاق بالنسبة الى س ، ن عدد حقيقى

فإن $\frac{ءص}{ءس} = ن\,[د(س)]^{ن-١} \times د'(س)$

أى أن

مشتقة (قوس)^{ن} = ن (القوس)$^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً

إذا كانت ص $= (٣\,س^{٢} + ٥\,س)^{٤}$

فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٤\,(\text{القوس})^{٣} \times$ مشتقة ما بداخل القوس

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٤\,(٣\,س^{٢} + ٥\,س)^{٣} \times (٦\,س + ٥) = ٤\,(٦\,س + ٥)\,(٣\,س^{٢} + ٥\,س)^{٣}$



ملاحظات

- إذا كانت ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن $\frac{د}{د س}(ص)^ن = ن \cdot ص^{ن-1} \frac{د ص}{د س}$

فمثلاً $\frac{د}{د س}(ص^3) = 3 ص^2 \times \frac{د ص}{د س}$

- يمكن ملاحظة أنه إذا كانت ص $= \sqrt{د(س)}$ حيث د (س) > ٠

فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2\sqrt{د(س)}} \times د'(س)$

أى أن مشتقة الجذر التربيعى للدالة $= \frac{1}{2 \text{ الجذر}} \times$ مشتقة ما تحت الجذر

مثال (١)

أوجد المشتقة الأولى للدالة : $ص = (2 س^2 + 3)^4$

الحل

$\because ص = (2 س^2 + 3)^4$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = 4 (2 س^2 + 3)^3 \times 4 س = 16 س (2 س^2 + 3)^3$

مثال (٢)

إذا كانت ص $= \sqrt[4]{2 س^2 + 1}$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$ص = (2 س^2 + 1)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{4}(2 س^2 + 1)^{\frac{-3}{4}} \times 4 س = \frac{س}{\sqrt[4]{(2 س^2 + 1)^3}}$



مثال (٣)

أوجد المشتقة الأولى للدالة $\text{ص} = (٣\text{س} + ١)^{٣}(٤ - ٣\text{س})^{٤}$

الحل

$\text{ص}'$ = الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

$$\text{ص}' = (٣\text{س} + ١)^{٣} \times [٤(٤ - ٣\text{س})^{٣} \times -٣] + (٤ - ٣\text{س})^{٤} \times [٣(٣\text{س} + ١)^{٢} \times ٣]$$

$$= ٣(٣\text{س} + ١)^{٢}(٤ - ٣\text{س})^{٣}[-٤(٣\text{س} + ١) + ٣(٤ - ٣\text{س})]$$

$$= ٣(٣\text{س} + ١)^{٢}(٤ - ٣\text{س})^{٣}(٨ - ٢١\text{س})$$

مثال (٤)

إذا كان $\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٧}$ أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$$\because \text{ص} = \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٧}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧\left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٦} \times \frac{(\text{س}^{٢} + ٣) \times ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} - ٢) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧\left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٦} \times \frac{٢\text{س}^{٣} + ٦\text{س} - ٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$$

$$= ٧\left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٣}\right)^{٦} \times \frac{١٠\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}} = \frac{٧٠\text{س}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٦}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٨}}$$



مشتقة دالة الدالة

إذا كان د ، ر دالتين حيث ص = د (ع) ، ع = ر (س) فإن ص = د [ر (س)]
ونقول أن ص دالة الدالة س ولإيجاد مشتقة دالة الدالة يمكن إتباع النظرية التالية :

نظرية :

إذا كانت ص = د (ع) قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير ع
وكانــت ع = ر (س) قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير س
فــإن ص = د (ر (س)) تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير س
ويكـون $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ (تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة)

مثال ⑤

إذا كان ص = ع^{٣} ، ع = س^{٣} + ٢ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

∵ ص = ع^{٣} ∴ $\frac{ءص}{ءع}$ = ٣ ع^{٢}

∵ ع = س^{٣} + ٢ ∴ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٣ س^{٢}

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ٣ ع^{٢} × ٣ س^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ (س^{٣} + ٢)^{٢} × ٣ س^{٢} = ٩ س^{٢} (س^{٣} + ٢)^{٢}

مثال ⑥

إذا كانت ص = ٢ ع^{٣} ، ع = $\sqrt{س^{٢} - ٣ س}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٤

الحل

بالتعويض عن ع ∴ ص = ٢ $\left(\sqrt{س^{٢} - ٣ س}\right)^{٣}$

∴ ص = ٢ (س^{٢} − ٣ س)$^{\frac{٣}{٢}}$



∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ (س^{٢} − ٣ س)$^{\frac{١}{٢}}$ × (٢ س − ٣)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣(٢\text{س} - ٣) \times \sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$$

عند س = ٤ يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣(٨ - ٣) \times \sqrt{١٦ - ١٢} = ٣ \times ٥ \times ٢ = ٣٠$

حل آخر

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٦\text{ع}^{٢} \text{ ، } \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ٣}{٢\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{ع}^{٢} \times \frac{٢\text{س} - ٣}{٢\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})}} = \frac{٣(\text{س}^{٢} - ٣\text{س}) \times (٢\text{س} - ٣)}{\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})}}$$

$$= ٣(٢\text{س} - ٣)\sqrt{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})}$$

عند س = ٤ يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ \times ٥ \times ٢ = ٣٠$

مثال ٧

إذا كانت ص = $\frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$ ، ع = س + ١ **فأوجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

يمكن الحل بطريقتين كما فى المثال السابق ولكن الطريقة الأسهل هى التعويض أولاً

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{س} + ١ - ١}{\text{س} + ١ + ١} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١(\text{س} + ٢) - \text{س}}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$$



مثال (٨)

أوجد كلاً مما يأتى حيث أن ما بداخل الأقواس دوال وليست ثوابت :

① $\frac{د}{د س}$ (ص^٤) ② $\frac{د}{د س}$ (س^٣) ③ $\frac{د}{د ع}$ (س^٥)

④ $\frac{د}{د ص}$ (ص^٣) ⑤ $\frac{د}{د س}$ (ك^٧) ⑥ $\frac{د}{د س}$ (ص)

الحل

① $\frac{د}{د س}$ (ص^٤) = ٤ ص^٣ × $\frac{د ص}{د س}$ (تشتقها كدالة مثل (دالة فى قوس)^٤)

② $\frac{د}{د س}$ (س^٣) = ٣ س^٢ × $\frac{د س}{د س}$ = ٣ س^٢ (لاحظ أن الإشتقاق بالنسبة إلى س)

③ $\frac{د}{د ع}$ (س^٥) = ٥ س^٤ × $\frac{د س}{د ع}$

④ $\frac{د}{د ص}$ (ص^٣) = ٣ ص^٢ (نستغنى عن $\frac{د ص}{د ص}$ ولا نكتبها)

⑤ $\frac{د}{د س}$ (ك^٧) = ٧ ك^٦ × $\frac{د ك}{د س}$

⑥ $\frac{د}{د س}$ (ص) = ١ × $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د س}$

مثال (٩)

إذا كان ص^٣ = س^٢ + ٣ س + ١ فأوجد : $\frac{د ص}{د س}$

الحل

∵ ص^٣ = س^٢ + ٣ س + ١ بأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ٣ ص^٢ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س + ٣

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س + ٣}{٣ ص^٢}$ = $\frac{٢ س + ٣}{٣ \sqrt[٣]{(س^٢ + ٣ س + ١)^٢}}$

حل آخر

$\because ص^{٣} = س^{٢} + ٣س + ١$ $\qquad$ $\therefore ص = (س^{٢} + ٣س + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}(س^{٢} + ٣س + ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times (٢س + ٣)$

$= \frac{٢س + ٣}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٢}}}$

مثال (١٠)

إذا كان $ص = ع^{٢} + ع + ٣$ ، $ع = س^{٣} + ٢$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} - ٥\frac{ءع}{ءس} - ٦س^{٥} = ٠$

الحل

$\frac{ءص}{ءع} = ٢ع + ١$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٣س^{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = [٢(س^{٣} + ٢) + ١] \times ٣س^{٢}$

$= (٢س^{٣} + ٥) \times ٣س^{٢} = ٦س^{٥} + ١٥س^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ٥\frac{ءع}{ءس} - ٦س^{٥} = ٦س^{٥} + ١٥س^{٢} - ١٥س^{٢} - ٦س^{٥} = ٠$

مثال (١١)

إذا كان $د(س) = (س + ٢)^{٥}$ فأوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٥$

الحل

$\because د(س) = (س + ٢)^{٥}$

$د'(س) = ٥(س + ٢)^{٤} \times ١$ $\qquad$ $\therefore د'(س) = ٥(س + ٢)^{٤}$

عندما $د'(س) = ٥$ $\qquad$ $\therefore ٥(س + ٢)^{٤} = ٥ \quad (\div ٥)$

$(س + ٢)^{٤} = ١$ $\qquad$ $\therefore س + ٢ = \pm ١$

إما $س + ٢ = ١$ $\qquad$ أو $\qquad$ $س + ٢ = -١$

$\therefore س = -١$ $\qquad$ $\therefore س = -٣$

تمرين ٤ على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

مسائل على كل درس متنوعة على مستوى الدرجة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

إختبار تراكمي ١٢

١/٤ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{\quad}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = $س^٢ + ٢ س + ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوي ....

[١ ، ٣ ، ٧ ، ٦]

② $\frac{ء}{ء س} (\sqrt{س^٣}) = $ ....

[$\sqrt{س^٢}$ ، $\frac{٣ س^٢}{٢\sqrt{س^٣}}$ ، $\frac{س^٢}{\sqrt{س^٣}}$ ، $\frac{٣ س^٢}{\sqrt{س^٣}}$]

③ ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س^٢}$ عندما س = −١ يساوي ....

[١ ، −١ ، صفر ، ٢]

④ قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى ص = $٢ س^٥ - ٩ س$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ تساوي ....°

[٤٥ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ١٣٥]

---

⑤ إذا كان ص = (٢ س − ١) ($س^٢$ + ٣) فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

....

....

---

⑥ أوجد معدل التغير للدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ عندما س = ٤

....

....





ثانياً مسائل المستوى الأول

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

① د $(س) = (٢ س + ٣)^{٥}$

② د $(س) = (٢ - س^{٢})^{٩}$

③ ص $= \left(\frac{٢ س + ١}{س}\right)^{٢}$

④ ص $= \left(\frac{٢ س}{س + ١}\right)^{٢}$

⑤ ص $= س (٢ س - ١)^{٢}$

⑥ ص $= \sqrt{٢ س + ٣}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت ص $= (٣ س + ٢)^{٢}$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ....

[$٢(٣ س + ٢)$ أو $٦(٣ س + ٢)$ أو $١٢(٣ س + ٢)$ أو $(٣ س + ٢)$]

② إذا كان $\frac{د ص}{د ع} = ٣$ ، $\frac{د ع}{د س} = ٢$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ....

[٥ أو ٦ أو ١ أو $\frac{٣}{٢}$]

③ إذا كان د $(س) = (٢ س + ١)^{٣}$ فإن د $'(٠) =$ ....

[٥٤ أو ١٢ أو ٦ أو ٣]

④ إذا كان د $(س) = (٥ - ٢ س)^{٤}$ فإن د $'(٢) =$ ....

[−٨ أو −٤ أو ٤ أو ٨]

⑤ إذا كان ص $= (ع + ١)^{٣}$ ، ع $= س^{٣} - ١$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ....

[$٣ س^{٣}$ أو $٩ س^{٨}$ أو $٣ (س + ١)$ أو $٣ (ع + ١)^{٢}$]

⑥ إذا كان ص $= (\sqrt[٣]{٣ س - ١})^{٥}$ $\therefore \frac{د ص}{د س} =$ .... عندما س = ٠

[−١٥ أو ١٥ أو ٥ أو −٥]

⑦ إذا كان $ص^{٣} = س^{٢}$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ....

[$\frac{٢}{٣} س^{\frac{١}{٣}}$ أو $\frac{س}{٣ ص^{٢}}$ أو $\frac{٢ س}{ص^{٢}}$ أو $\frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$]



⑧ إذا كان $ص = \sqrt{٢ - س}$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[$\frac{-١}{٢ص}$ ، -١ ، $-٢ص - ١$ ، $-٢ص$]

⑨ إذا كان $(س + ص)^٣ = ٥$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[-١ ، صفر ، ٣ ، ٥]

⑩ إذا كان $\frac{ءع}{ءس} = ٤س - ٣$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢س^٢ + ٧$ فإن $\frac{ءع}{ءص}$ = ... عندما س = ٢

[$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$ ، -٣ ، ٢]

ثالثا مسائل المستوى الثاني

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

① $ص = (٢ + ٥س^٢)^٦$

② $ص = (٢ - ٣س^٢)^٧$

③ $ص = (س^٣ + س - ٩)^٥$

④ $د(س) = \left(٣ - \frac{٢}{س^٢}\right)^٥$

٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٧}$ عند س = ٤ يساوي ....

[$\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{-٤}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٤}$]

② مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt{٣ - س^٣}$ عند س = ٠ يساوي ....

[-١ ، ١ ، صفر ، -٢]

③ مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٢س - ٢}$ عند س = ١ يساوي ....

[-١ ، ١ ، صفر ، ٢]

④ مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt[٣]{(٢س^٣ + ٤س + ٣)^٢}$ عند س = ٢ يساوي ....

[-٢ ، ٤ ، $\frac{٥٦}{٩}$ ، $\frac{٥٤}{٧}$]

٦ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

① $ص = س^٢(٢ - ٣س)^٣$

② $ص = (س - ٢)^٢(٣ - ٢س)^٣$

③ $ص = (٣س + ١)^٤(س + ٢)^{-٣}$

④ $ص = س\sqrt{س^٢ + ١}$

⑤ $ص = (س^٢ + ١)\sqrt[٣]{س^٢ - ١}$

⑥ $د(س) = (١ + س)^٤(١ - س)^٤$



7 أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(1) $ص = \left(\frac{س + ٣}{س}\right)^{٣}$

(2) $ص = \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥}$

(3) $ص = \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٣}\right)^{٧}$

(4) $ص = \left(\frac{٢}{\sqrt{٢ - س}}\right)^{٣}$

8 إذا كان $ص = ع^{٢}$ ، $ع = ٣ س^{٢} - ٢$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

9 إذا كان $ص = ٢ ع^{٣}$ ، $ع = ٨ س - ١١$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

10 إذا كان $ص = \sqrt[٣]{ع}$ ، $ع = س^{٢} - ٣ س + ٢$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

11 إذا كان $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = ٢ س + ١$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

12 إذا كان $ص = ٣ ع^{٢} - ١$ ، $ع = \frac{٥}{س}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

13 إذا كان $ص = \frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، $ع = س^{٢} + ١$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ٢$ $\left[\frac{-١}{٢}\right]$

14 إذا كان $\frac{ءع}{ءس} = ٤ س - ٣$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢ س^{٢} + ٧$

فأوجد : $\frac{ءع}{ءص}$ عندما $س = ٢$ $\left[\frac{١}{٣}\right]$

15 إذا كان $ص = س^{٢} + ١$ ، $س = ع^{٢} + ع$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءع}$ عندما $ع = ١$ [١٢]

16 إذا كان $ص = ع^{٧}$ ، $ع = س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٤$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ١$ [٤٩]

17 إذا كانت $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = س + \frac{١}{س}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ١$ [صفر]

18 إذا كانت $ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، $ع = \frac{س + ١}{س - ١}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ $\left[\frac{-١}{س^{٢}}\right]$

19 إذا كان $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٥ س - ١٢$ ، $ع = س^{٢} + ١٠ س - ٥$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءع}$ $\left[\frac{١}{٢}\right]$

20 إذا كانت $ص^{٣} = ٣ س^{٢} - ٤$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ١$ [٢]





٢١ إذا كان ص = ع^{٢} + ٣ ع + ٥ ، ع = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢ فأثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ - ٧ $\frac{ءع}{ءس}$ - س^{٣} = ٠

٢٢ إذا كان ع = س^{٣} - ١ ، ص = ع^{٢} - ٧ ع + ٣ فأثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ + ٩ $\frac{ءع}{ءس}$ - ٦ س^{٥} = ٠

٢٣ إذا كان ص = س^{٢} - ٥ س + ٤ ، س = ع^{٣} - ١ فأثبت أن : $\frac{ءص}{ءع}$ + ٧ $\frac{ءس}{ءع}$ - ٦ ع^{٥} = ٠

٢٤ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\left(\frac{س + ٣}{س + ١}\right)^{٢}$ عند النقطة (-٢ ، ١) على هذا المنحنى [٤]

٢٥ إذا كان س = $\sqrt{ص^{٢} + ٥}$ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٣ [$\frac{٣}{٢}$]

٢٦ إذا كان ص^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠ أثبت أن : ص^{٢} $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ - ٢ = ٠

٢٧ إذا كانت ص = $\sqrt{س^{٢} - ١}$ فأثبت أن : ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ - ٢ س = ٠

٢٨ إذا كانت ص = $\frac{ع - ٢}{ع + ١}$ ، ع = $\frac{س + ١}{٢ س - ١}$ فأثبت أن : س^{٢} $\frac{ءص}{ءس}$ + ١ = ٠

٢٩ إذا كان ص^{٢} + ٢ أ س = أ^{٢} حيث أ ثابت أوجد قيمة : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + $\frac{٢ س}{ص}$ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ [١]

٣٠ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ + $\frac{١}{\sqrt{ع}}$ ، ع = س^{٢} + ٢٥

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = صفر [-١ أ صفر أ ١ أ $\frac{١}{٢}$]

② إذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٣

[$\frac{٣}{٤}$ أ $\frac{١٦}{٣}$ أ ٣ أ $\frac{٣}{١٦}$]

③ إذا كانت س = $\frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، ص = $\frac{ع + ١}{ع - ١}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[$\frac{١}{س}$ أ $\frac{-١}{س^{٢}}$ أ $\frac{١}{س^{٢}}$ أ $\frac{-١}{س}$]

④ إذا كانت ص^{٢} = ٢ - س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[-١ أ -٢ص أ $\frac{-١}{٢ ص}$ أ ١-٢ص]



⑤ إذا كان $ص^{٤} = س^{٣}$ فإن: $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

[$\frac{٣}{٤}\sqrt[٤]{س}$ أ، $\frac{س^{٢}}{٤ص^{٣}}$ أ، $\frac{٣س^{٢}}{ص^{٣}}$ أ، $\frac{٣}{٤\sqrt[٤]{س}}$]

⑥ إذا كان $ص = (س + أ)^{٣}$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ١٢$ عند س = صفر فإن أ = ...

[±٢ أ، ٢ أ، −٢ أ، ±٤]

⑦ إذا كان $ص = \frac{ع}{ع - ١}$ ، $ع = \frac{س}{س + ١}$ فإن: $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

[١ أ، صفر أ، −١ أ، ٢]

⑧ يُصب زيت بمعدل ٨١٠ سم³/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠ سم فإن معدل إرتفاع الزيت فى البرميل = ... سم/ث

[٨١٠π أ، $\frac{١}{٨١٠}$ أ، $\frac{١}{٨١\pi}$ أ، $\frac{١}{٨١٠\pi}$]

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٣١ إذا كان $ص = \frac{(س + ١)^{٣}}{(س^{٢} + ١)^{٤}}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

٣٢ إذا كان $ص^{٢} + س^{٢} + ٣س + ٢ص + ١ = ٠$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

٣٣ إذا كان $ع = \frac{١}{٢}ص^{٢} + ص - ٥$ ، $س^{٢} + ص^{٢} - س = ٤$

أوجد $\frac{ءع}{ءس}$ عند س = ١ [$\frac{-٣}{٤}$ ، $\frac{-١}{٤}$]

٣٤ إذا كان $(ص + ٣)^{٢} = (س - ١)^{٣}$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{٢}\sqrt{س - ١}$

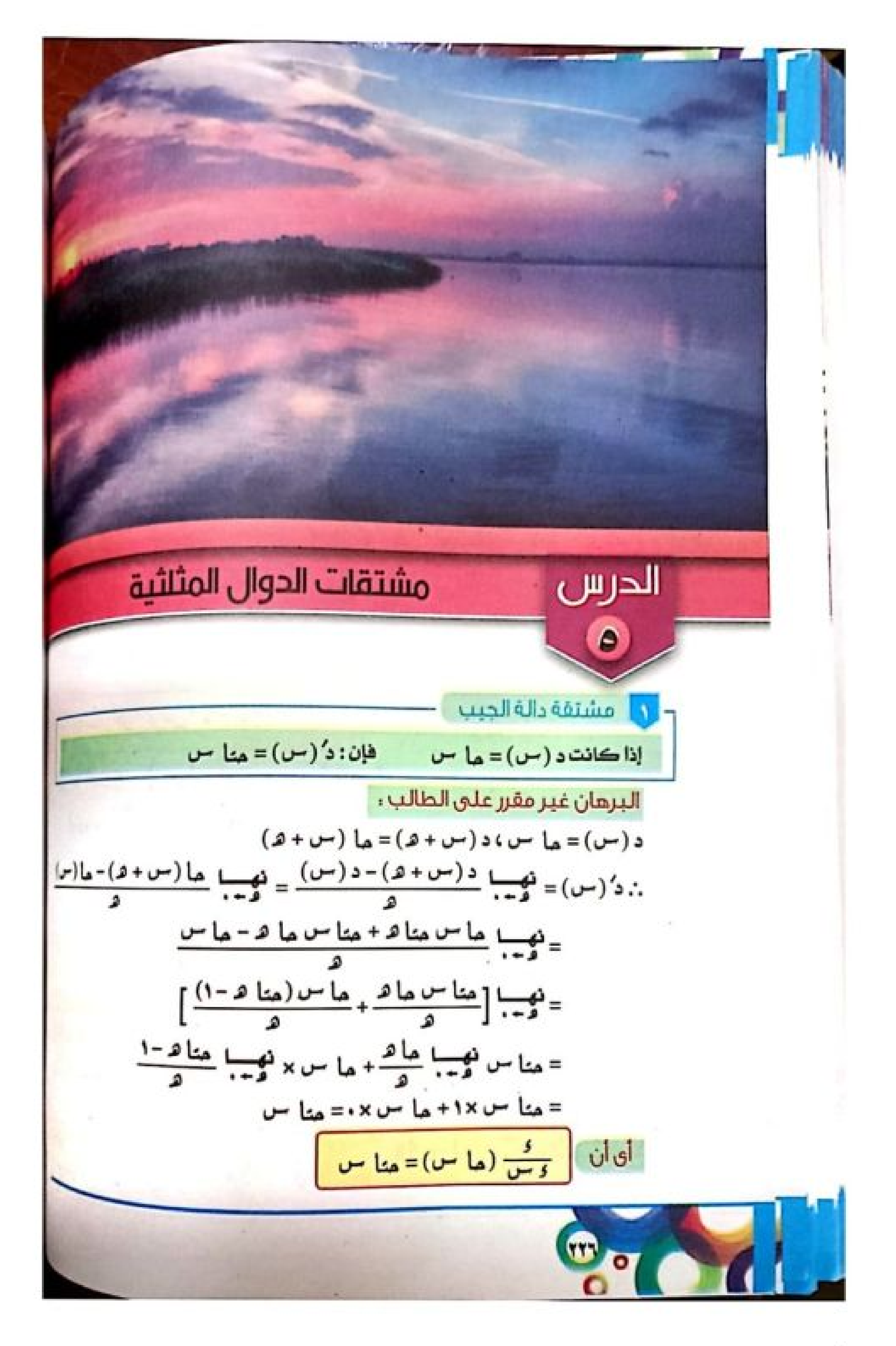
٣٥ إذا كانت $ص = \left(\frac{ع + ١}{ع - ١}\right)^{٢}$ ، $ع = س^{٢} + ٢س$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ [−٨]

٣٦ إذا كان $ص = س^{٢} + ١$ ، $ع = \sqrt{س^{٢} - ١}$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع$

٣٧ إذا كانت $ص = س^{٢} + س$ ، $ع = \frac{\sqrt{س - ١}}{س}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءع}$ عند س = ١ [٦]

٣٨ إذا كانت $ص = \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن}$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨ن س ص}{س^{٤} - ٤}$





الدرس ٥ مشتقات الدوال المثلثية

١ مشتقة دالة الجيب

إذا كانت د (س) = جا س فإن: د َ(س) = جتا س

البرهان غير مقرر على الطالب:

د (س) = جا س ، د (س + هـ) = جا (س + هـ)

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جا}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{جا}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جا س جتا هـ} + \text{جتا س جا هـ} - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \left[\frac{\text{جتا س جا هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{جا س}(\text{جتا هـ} - 1)}{\text{هـ}} \right]$$

$$= \text{جتا س} \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} + \text{جا س} \times \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جتا هـ} - 1}{\text{هـ}}$$

$$= \text{جتا س} \times 1 + \text{جا س} \times 0 = \text{جتا س}$$

أى أن

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا س}) = \text{جتا س}$$

بصفة عامة

إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإن ،

$\frac{د}{د س}$ [جا ع] = جتا ع . $\frac{د ع}{د س}$ (قاعدة السلسلة)

أى أن ، جا (زاوية عبارة عن دالة فى س) = جتا (دالة فى س) × مشتقة هذه الدالة (الزاوية)

فمثلاً

$\frac{د}{د س}$ جا (٢ س + ٣) = جتا (٢ س + ٣) × ٢ = ٢ جتا (٢ س + ٣)

وأيضًا إذا كانت ص = جا (س^{٢} + ٤) فإن ،

ص$'$ = جتا (س^{٢} + ٤) × ٢ س = ٢ س جتا (س^{٢} + ٤)

٢ مشتقة دالة جيب التمام

إذا كانت ص = جتا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − جا س

وبصفة عامة إذا كانت ص = جتا (د (س)) فإن ، ص$'$ = د$'$(س) جا (د (س))

فمثلاً إذا كانت ص = جتا (٢ س^{٣} − ١) فإن ، ص$'$ = −٦ س^{٢} جا (٢ س^{٣} − ١)

٣ مشتقة دالة الظل

إذا كانت ص = ظا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} س

وبصفة عامة إذا كانت ص = ظا (د (س)) فإن ، ص$'$ = د$'$(س) قا^{٢} (د (س))

فمثلاً إذا كانت ص = ظا (س^{٣} + ٢) فإن ، ص$'$ = ٣ س^{٢} قا^{٢} (س^{٣} + ٢)

ملاحظات

١ $\frac{د}{د س}$ (جتا س) = $\frac{د}{د س}$ [جا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)]

= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − س) × −١ = − جا س





٣ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{ظا س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right) = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - (-\text{جا س}) \times \text{جا س}}{\text{جتا}^{2}\text{ س}}$

$= \frac{\text{جتا}^{2}\text{ س} + \text{جا}^{2}\text{ س}}{\text{جتا}^{2}\text{ س}} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{ س}} = \text{قا}^{2}\text{ س}$

مثال (١)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١ ص = ٢ جا س
٢ ص = جتا ٦ س
٣ ص = جا س + جتا ٢ س
٤ ص = جا س جتا ٢ س

الحل

١ ص = ٢ جا س ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ جتا س

٢ ص = جتا ٦ س ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (− جا ٦ س) × ٦ = −٦ جا ٦ س

٣ ص = جا س + جتا ٢ س ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جتا س − ٢ جا ٢ س

٤ ص = جا س جتا ٢ س

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا س × −٢ جا ٢ س + جتا ٢ س × جتا س

= −٢ جا س جا ٢ س + جتا ٢ س جتا س

مثال (٢)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١ ص = جا (٣ س + ١)
٢ ص = س جا ٢ س + ٣ جتا $\frac{\text{س}}{3}$
٣ ص = ظا (٤ س + ٣)
٤ ص = س^{2} ظا ٣ س + جتا ٢ س

الحل

١ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جتا (٣ س + ١) × ٣ = ٣ جتا (٣ س + ١)

٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = س × (جتا ٢ س) × ٢ + جا ٢ س × ١ − ٣ جا $\frac{\text{س}}{3}$ × $\frac{1}{3}$

= ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س − جا $\frac{\text{س}}{3}$



(٣) $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (٤س + ٣) × ٤ = ٤ قا^{٢} (٤س + ٣)

(٤) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س طا ٣س + قا^{٢} ٣س × ٣ × س^{٢} − حا ٢س × ٢

= ٢س طا ٣س + ٣س^{٢} قا^{٢} ٣س − ٢ حا ٢س

مثال (٣)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = حا^{٣} (٢س + ٣)   (٢) ص = حا (٢س + ٥)^{٢}

الحل

(١) ص = [حا (٢س + ٣)]^{٣}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ حا^{٢} (٢س + ٣) × حتا (٢س + ٣) × ٢

= ٦ حا^{٢} (٢س + ٣) حتا (٢س + ٣)

(٢) $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا (٢س + ٥)^{٢} × ٢ (٢س + ٥) × ٢

= ٤(٢س + ٥) حتا (٢س + ٥)^{٢}

مثال (٤)

إذا كانت ص = حا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$ فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا ٢س

الحل

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ حا $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$ × حتا $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$

= حا ٢ $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$ = حا (π + ٢س) (لأن ٢ حا أ حتا أ = حا ٢أ)

= − حا ٢س





مثال ٥

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{جا } ٢\text{س}}{١ + \text{جتا } ٢\text{س}}\right)$ عند س = π

الحل

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{(١ + \text{جتا } ٢\text{س}) \times ٢ \text{ جتا } ٢\text{س} - \text{جا } ٢\text{س} \times -٢ \text{ جا } ٢\text{س}}{(١ + \text{جتا } ٢\text{س})^{٢}}$$

$$\text{د}'(\text{س})_{\text{س} = \pi} = \frac{(١ + \text{جتا } ٢\pi)\,(٢ \text{ جتا } ٢\pi) + ٢ \text{ جا } ٢\pi \text{ جا } ٢\pi}{(١ + \text{جتا } ٢\pi)^{٢}}$$

$$= \frac{(١ + ١)(٢ \times ١) + ٢ \times ٠ \times ٠}{(١ + ١)^{٢}} = \frac{٤}{٤} = ١$$

مثال ٦

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان ص = جا (طا ٥ س)

الحل

$\because$ ص = جا (طا ٥ س) بفرض أن ع = طا ٥ س

فإن ص = جا ع ، ع = طا ٥ س

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{جتا ع}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥ \text{ قا}^{٢} \, ٥\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{جتا ع} \times ٥ \text{ قا}^{٢} \, ٥\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥ \text{ قا}^{٢} \, ٥\text{س} \times \text{جتا (طا ٥س)}$

حل آخر

$\because$ ص = جا (طا ٥ س) = جتا (طا ٥ س) × ٥ قا^{٢} ٥ س



أثبت أن المماس للمنحنى $\text{ص} = ٢\ \text{جا}\left(\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$ عند $\text{س} = \pi$ يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$\because \text{ص} = ٢\ \text{جا}\left(\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\ \text{جتا}\left(\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

عند $\text{س} = \pi$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\ \text{جتا}\left(\pi - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\ \text{جتا}\ \frac{\pi}{٣} = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$

$\therefore$ ميل المماس $= \text{ظا}\ \theta = ١$

$\therefore \theta = \text{ظا}^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$

Shift Tan 1 = 45

مثال ٨

إذا كانت $\text{ص} = \text{قتا}\ ٢\ \text{س}$ أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

الحل

$\because$ معدل تغير ص بالنسبة إلى س = ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{ص} = \text{قتا}\ ٢\ \text{س} = \frac{١}{\text{جا}\ ٢\ \text{س}}$

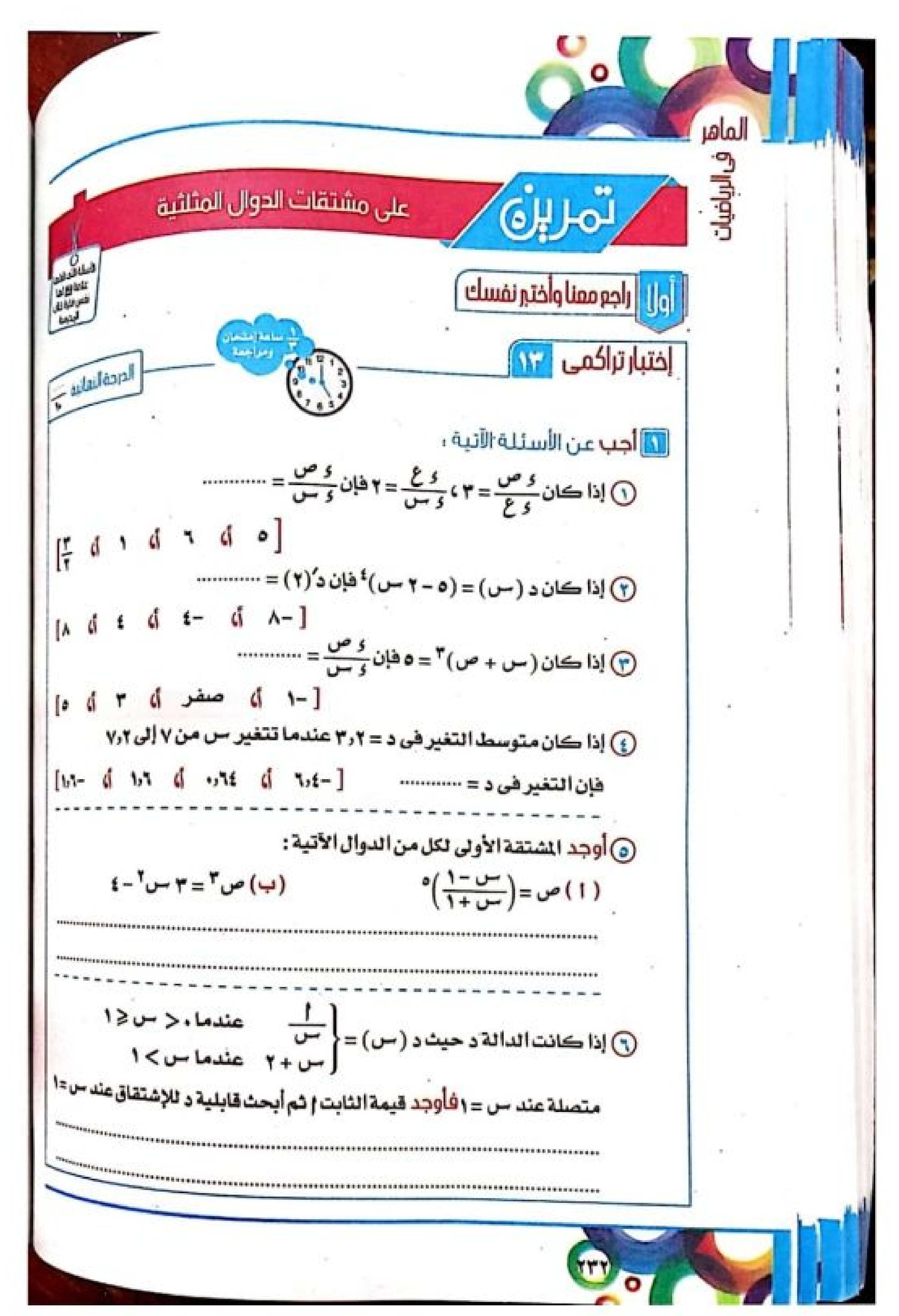
$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جا}\ ٢\ \text{س} \times ٠ - ١ \times ٢\ \text{جتا}\ ٢\ \text{س}}{(\text{جا}\ ٢\ \text{س})^٢}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\ \text{جتا}\ ٢\ \text{س}}{(\text{جا}\ ٢\ \text{س})^٢}$

عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\ \text{جتا}\left(٢ \times \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(\text{جا}\ ٢ \times \frac{\pi}{٤}\right)^٢} = \frac{-٢\ \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{\left(\text{جا}\ \frac{\pi}{٢}\right)^٢} = \frac{-٢ \times ٠}{(١)^٢} = \text{صفر}$$





تمرين على مشتقات الدوال المثلثية

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ١٣

½ ساعة امتحان ومراجعة

الدرجة النهائية

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان $\frac{دص}{دع} = ٣$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢$ فإن $\frac{دص}{دس} =$ ....

[٥ أ ٦ أ ١ أ $\frac{٣}{٢}$]

(٢) إذا كان د (س) = $(٥ - ٢س)^٤$ فإن د′(٢) = ...

[−٨ أ −٤ أ ٤ أ ٨]

(٣) إذا كان $(س + ص)^٣ = ٥$ فإن $\frac{دص}{دس} =$ ....

[−١ أ صفر أ ٣ أ ٥]

(٤) إذا كان متوسط التغير فى د = ٣٫٢ عندما تتغير س من ٧ إلى ٧٫٢

فإن التغير فى د = ... [−٦٫٤ أ ٠٫٦٤ أ ١٫٦ أ −١٫٦]

---

(٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(أ) ص = $\left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥$ (ب) $ص^٣ = ٣س^٢ - ٤$

....

....

---

(٦) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{أ}{س} & \text{عندما } ٠ < س \leq ١ \\ س + ٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة الثابت أ ثم أبحث قابلية د للإشتقاق عند س = ١

....

....

ثانيا مسائل المستوى الأول

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت ص = طا س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

[قا س أ، قتا س أ، قا^{٢} س أ، قتا^{٢} س]

② إذا كانت د (س) = جا ٥ س فإن د َ(س) = ...

[٥ أ، ٥ جا س أ، ٥ جتا س أ، ٥ جتا ٥ س]

③ إذا كان ص = جتا^{٢} π فإن ص َ = ...

[-١ أ، صفر أ، $\frac{١}{٢}$ أ، ١]

④ $\frac{ء}{ءس}$(جا ٣٠°) = ... [$\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° أ، جتا ٣٠° أ، صفر أ، $\frac{١}{٢}$]

⑤ إذا كانت ص = جا (٢ س + ٥) فإن ص َ = ...

[٢ جتا ٢ س أ، -٢ جتا ٢ س أ، جتا (٢ س + ٥) أ، ٢ جتا (٢ س + ٥)]

⑥ إذا كانت ص = طا (٣ س - ٤) فإن ص َ = ...

[٣ طا (٣ س - ٤) أ، ٣ قا (٣ س - ٤) أ،
٣ قتا^{٢} (٣ س - ٤) أ، ٣ قا^{٢} (٣ س - ٤)]

⑦ إذا كانت ص = ٣ جتا (٢ - ٤ س) فإن ص َ = ...

[٤ جا (٢ - ٤ س) أ، ١٢ جا (٢ - ٤ س) أ،
-٦ جا (٢ - ٤ س) أ، -١٢ جا (٢ - ٤ س)]

⑧ إذا كانت د (س) = س^{٢} + جا ٤ س فإن د َ(س) = ...

[٢ س - ٤ جتا ٤ س أ، س^{٢} + ٤ جتا ٤ س أ،
٢ س + ٤ جتا ٤ س أ، ٢ س + ٤ جا ٤ س]

⑨ إذا كانت ص = ٣ س - جتا ٢ س فإن ص َ = ...

[٣ - جا ٢ س أ، ٣ + جا ٢ س أ، ٣ + ٢ جا ٢ س أ، ٣ - ٢ جا ٢ س]



(١٠) إذا كانت د (س) = طا (٥ س − π) فإن د′ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

[٥ أ، ٥ $\sqrt{2}$ أ، ١٠ أ، ١٠ $\sqrt{2}$]

(١١) إذا كانت د (س) = جا ٢ س فإن د′ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

[صفر أ، −١ أ، ١ أ، $\frac{1}{2}$]

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\frac{د}{د س}$ (جتا س − جا س) = ...

[− جا س + جتا س أ، جا س − جتا س أ، − جا س − جتا س أ، جا س + جتا س]

(٢) $\frac{د}{د س}$ (٥ س + طا ٢ س) = ...

[٥ + ٢ قا^2 ٢ س أ، ٥ + قا^2 ٢ س أ، ٥ + ٢ قا ٢ س أ، ٥ + قا^2 س]

(٣) $\frac{د}{د س}$ (طا ٣ س^2) = ...

[س قا^2 ٣ س^2 أ، ٦ س قا^2 ٣ س^2 أ، ٣ س قا^2 ٣ س^2 أ، ٦ س قا ٣ س^2]

(٤) $\frac{د}{د س}$ (طا $\frac{3\pi}{4}$) = ... [$\frac{3\pi}{4}$ أ، −١ أ، ١ أ، صفر]

(٥) $\frac{د}{د س}$ (جتا ٢ π) = ... [صفر أ، −١ أ، ١ أ، −٢ جا π]

(٦) $\frac{د}{د س}$ (جا^2 ١٥° + جتا^2 ١٥°) = ...

[صفر أ، −١ أ، ١ أ، ٢ جا ١٥° + ٢ جتا ١٥°]

(٧) $\frac{د}{د س}$ (جتا^2 س + جا^2 س) = ...

[صفر أ، −١ أ، ١ أ، ٢ جا س جتا س]

(٨) $\frac{د}{د س}$ (قا^2 س − ١) = ...

[طا^2 س أ، ٢ طا س ظتا س أ، ٢ طا س أ، ٢ طا س قا^2 س]

(٩) $\frac{د}{د س}\left(\frac{جا س}{جتا س}\right) =$ ....

[ظا س أ، قا^{٢} س أ، ظتا س أ، -قا^{٢} س]

(١٠) $\frac{د}{د س}\left(جا (٧ - ٣ س^{٢})\right) =$ ....

[جتا (٧ - ٣ س^{٢}) أ، -٦ س جتا (٧ - ٣ س^{٢}) أ،
٦ جتا (٧ - ٣ س^{٢}) أ، ٦ س جتا (٧ - ٣ س^{٢})]

(١١) $\frac{د}{د س}(٢ جتا^{٢} س - ١) =$ ....

[جا ٢ س أ، ٢ جا ٢ س أ، -٢ جا ٢ س أ، - جا ٢ س]

(١٢) $\frac{د}{د س}(٢ جا س جتا س) =$ ....

[٢ جتا ٢ س أ، جتا ٢ س أ، -٢ جتا ٢ س أ، ٢ جا ٢ س]

(١٣) $\frac{د}{د س}(٢ س جا ٤ س) =$ ....

[٨ س + ٢ جا ٤ س أ، ٨ س جتا ٤ س + ٢ جا ٤ س أ،
جتا ٤ س + جا ٤ س أ، ٨ س جتا ٤ س + جا ٤ س]

(١٤) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{جا س - جا أ}{س - أ} =$ ....

[- جا أ أ، جا أ أ، جتا أ أ، - جتا أ]

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = جا ٣ س

(٢) ص = جا $\frac{١}{٢}$ س

(٣) ص = جتا $\frac{س}{٣}$

(٤) ص = جا (٤ س + ٧)

(٥) ص = جا (س^{٢} + ٣)

(٦) ص = جتا (٥ س + ٣)

(٧) ص = ٣ ظا (٢ س + ٣)

(٨) ص = ظا (-٥ س^{٢} + ١٩)

ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٥ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت :

(١) ص = جا^{٢} س

(٢) ص = س جا س

(٣) ص = س^{٢} جتا س

(٤) ص = س جا ٢ س



(٥) $\text{ص} = \text{س جا س}^{٢}$

(٦) $\text{ص} = \text{س جا }(٣\text{ س} + ٢)$

(٧) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\text{ جا }(٢\text{ س}^{٢} + ٥)$

(٨) $\text{ص} = \text{جا ٢ س جتا ٥ س}$

(٩) $\text{ص} = \frac{\text{طا س}}{\text{س}}$

(١٠) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

(١١) $\text{ص} = \frac{٢\text{ س} + \text{جا س}}{\text{جتا س}}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$

٦ أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

(١) $\text{ص} = \text{طا س }(\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س})$

(٢) $\text{ص} = \text{قا}^{٢}\text{ س} - ١$

(٣) $\text{ص} = ٤\text{ س} + ٥\text{ جا ٤ س}$

(٤) $\text{ص} = \text{س جا س} + \sqrt{\text{س}}$

(٥) $\text{ص} = \text{طا }\sqrt{\text{س}}$

(٦) $\text{ص} = \text{جتا س}^{٢} + ٥$

(٧) $\text{ص} = \text{جا }\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

(٨) $\text{ص} = \text{جا}^{٣}\,(٢\text{ س} + ٣)$

(٩) $\text{ص} = \text{طا}^{٢}\text{ ٣ س}$

(١٠) $\text{ص} = ٤\text{ جتا}^{٥}\text{ س}$

(١١) $\text{ص} = \text{جتا}^{٣}\left(\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right)$

(١٢) $\text{ص} = \text{جتا }(\text{جتا س})$

٧ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{جتا ٢ س}}$

(٢) $\text{ص} = \sqrt{٣\text{ س} - \text{جا}^{٢}\text{ ٤ س}}$

(٣) $\text{ص} = \sqrt{\text{جا س} + \text{جتا س}}$

(٤) $\text{ص} = \sqrt{\text{جتا }(٥\text{ س})}$

٨ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) $\text{ص} = \text{جا س جتا }\frac{\pi}{٣} + \text{جتا س جا }\frac{\pi}{٣}$

(٢) $\text{ص} = \text{جتا س جتا }\frac{\pi}{٦} + \text{جا س جا }\frac{\pi}{٦}$

(٣) $\text{ص} = \frac{\text{طا س} + \text{طا }\frac{\pi}{٤}}{١ - \text{طا س طا }\frac{\pi}{٤}}$

(٤) $\text{ص} = \frac{٢\text{ طا س}}{١ - \text{طا}^{٢}\text{ س}}$




٩ أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت :

① ص = قتا س

② ص = ظتا س

③ ص = جا^{٢} س ظا س

④ ص = س ظا (٢ س − ١)

⑤ ص = ظا (٤ س − ١) − $\frac{١}{٢}$ جا ٤ س

⑥ ص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ س − س جتا $\frac{١}{٢}$ س

⑦ ص = $\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا ٢ س}}$

⑧ ص = س^{٣} قا س

⑨ ص = (٢ س + ١) ظا ٢ س

⑩ ص = (س + ١)^{٣} جتا س

١٠ ميل المماس لكل من المنحنيات :

① ص = جا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٦}$ يساوي ....

[١ ، −١ ، صفر ، ٢]

② ص = جا (٢ س − π) عندما س = π يساوي ....

[١ ، −١ ، صفر ، −٢]

③ ص = جا س + جا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوي ....

[صفر ، −٢ ، ١ ، ٢]

④ ص = ٢ جتا ٣ س + ٤ جا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوي ....

[−٢ ، −٤ ، ٤ ، ٢]

⑤ ص = س جتا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ يساوي ....

[$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٢}{\pi}$ ، $\frac{-٢}{\pi}$]

⑥ ص = س جتا (٣ س − π) عندما س = π يساوي ....

[١ ، −١ ، صفر ، ٢]

⑦ ص = جتا س ظا س عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوي ....

[١ ، −١ ، صفر ، ٢]

⑧ ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما س = π يساوي ....

[π ، −π ، $\frac{١}{\pi}$ ، $\frac{-١}{\pi}$]





(٩) ص = $\sqrt{\text{جا س + جتا س}}$ عندما س = ٠ يساوي ....

[٢ أ، -٢ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $-\frac{١}{٢}$]

(١٠) ص = س $\sqrt{\text{جا س}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوي ....

[١ أ، -١ أ، صفر أ، ٢]

(١١) قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى كل من الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة:

(١) ص = س جا ٢ س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤}\right)$ يساوي ....

[٣٠° أ، ٤٥° أ، ٦٠° أ، ٩٠°]

(٢) ص = جتا س طا س عند النقطة (π ، π) يساوي ....

[٣٠° أ، ٤٥° أ، ١٥٠° أ، ١٣٥°]

(٣) ص قتا س = س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right)$ يساوي ....

[٤٥° أ، ١٣٥° أ، ١٢٠° أ، ١٥٠°]

(٤) ص = $\frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا س + جا س}}$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، -١\right)$ يساوي ....

[٤٥° أ، ١٣٥° أ، ١٢٠° أ، ١٥٠°]

(١٢) أثبت أن المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$

(١٣) إذا كانت ص = (جا ٢ س + جتا ٤ س)^{٣} فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(١٤) إذا كانت ص = جتا^{٥} (٢ − ٣ س) + ٣ س^{٢} فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(١٥) إذا كانت ص = $\sqrt{\text{١ + جتا ٢ س}}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ [-١]

(١٦) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت ص = $\frac{\text{٢ س + جا س}}{\text{جتا س}}$ عندما س = ٠ [٣]

(١٧) إذا كانت ص = جتا (π − ٣ س)^{٢} فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{٣}$ [صفر]



١٨ إذا كانت د (س) = $\frac{\text{جا س}}{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}$ أوجد : د′ (صفر) $[\frac{\sqrt{٢}}{٢}]$

١٩ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي :

① ص = $\sqrt{٢ (١ - ع)}$ ، ع = جا ٢ س عند س = π [$-\sqrt{٢}$]

② ص = (٢ ع + ١)^٢ ، ع = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س عند س = $\frac{π}{٤}$ [-٤]

٢٠ إذا كانت ص = جا^٢ س - جتا^٢ س أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جا ٢ س

٢١ إذا كانت ص = (جا س + جتا س)^٢ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جتا ٢ س

٢٢ إذا كانت ص = ٢ س جا س جتا س

فأثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

٢٣ إذا كانت ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{جا س + جتا س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{١ + \text{جا ٢ س}}$

٢٤ إذا كانت ص = $\frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$ أثبت أن : (١ + جتا س) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

٢٥ إذا كانت ص = قتا ٣ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{π}{٢}$

٢٦ إذا كانت ص = قا ٤ س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{π}{٤}$

٢٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان ص = $\frac{\text{٢ ظا س}}{١ - \text{ظا}^٢ \text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

[ظا ٢ س ، ٢ قا^٢ س ، قا^٢ س ، ٢ قا^٢ ٢ س]

② $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٢ جا س جتا س) = ...

[٢ جتا ٢ س ، جتا ٢ س ، ٢ جا ٢ س ، جا ٢ س]



③ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (جا^{٢} س) = ...

[جا ٢ س أو جتا ٢ س أو $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س أو $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س]

④ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (قا س) = ...

[قتا س أو − قتا س أو قا س طا س أو $\frac{١}{\text{جتا س}}$]

⑤ إذا كان ص = جتا^{٢} س − جا^{٢} س فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

[−٢ جا ٢ س أو ٢ جا ٢ س أو − جا ٢ س أو −٢ جا س]

⑥ إذا كانت ص = قا س (جا س + جتا س) فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

[طا^{٢} س أو − طا^{٢} س أو ١ − طا^{٢} س أو قا^{٢} س]

⑦ إذا كانت ص = (قتا س − ظتا س) (قتا س + ظتا س) فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

[صفر أو ١ أو −١ أو طا^{٢} س]

⑧ إذا كانت ص = $\frac{\text{جا س + جتا س}}{\text{جتا س}}$ فإن: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

[قا^{٢} س أو قتا^{٢} س أو طا^{٢} س أو ظتا^{٢} س]

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢٨ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت د (س) = $\frac{\text{٢ + جا}^{٢}\text{ س}}{\text{٢ − جا}^{٢}\text{ ش}}$

٢٩ إذا كانت ص = $\sqrt{\text{٢ ع + ٣}}$ ، ع = جتا س أوجد ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

٣٠ إذا كانت ص = $\frac{\text{جا س − جتا س}}{\text{جا س + جتا س}}$ فأثبت أن ، (١ + جا ٢ س) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ − ٢ = ٠

٣١ إذا كانت $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٣\right)$ تقع على منحنى الدالة ص = أ جا س جتا س + ب وكانت معادلة المماس له عند هذه النقطة هي ٢ ص + ٤ س + ٣ = ، فأوجد قيمتي أ ، ب [٢٠٢]

٣٢ إذا كان ص = جا س − $\frac{١}{٣}$ جا^{٣} س أثبت أن ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جتا^{٣} س



الدرس ٦

تطبيقات على المشتقات

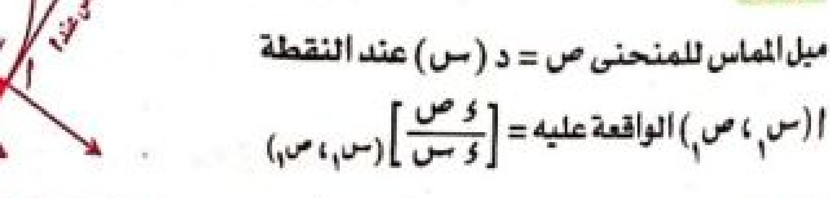
تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله ونقطة تقع عليه لذلك يجب أن نتذكر العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

ميل المماس والعمودى على منحنى

ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) الواقعة عليه هو المشتقة الأولى لدالة هذا المنحنى حيث ص = د (س)



أى أن



ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة

ا (س$_1$ ، ص$_1$) الواقعة عليه = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

ويكون ظا هـ = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

حيث هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات.



ملاحظات هامة

إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلي مستقيمين معلومين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن :

- $ل_١ // ل_٢$ إذا وفقط إذا كان $م_١ = م_٢$ (شرط التـوازي)
- $ل_١ \perp ل_٢$ إذا وفقط إذا كان $م_١ م_٢ = -١$ (شرط التعامد)

ونستنتج من ذلك أن

ميل العمودي على المنحنى ص = د (س) عند النقطة الواقعة عليه $= \frac{-١}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

معادلتا المماس والعمودي لمنحنى

إذا كانت ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د (س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة فإن :

١ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

هي : $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

٢ معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$)

هي : $ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)$

ملاحظات هامة

- إذا كان المماس يصنع زاوية موجبة قياسها هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المماس = ظا هـ
- إذا كان المماس يوازي المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

  فإن ميل المماس = ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ أي أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ}{ب}$

  أما إذا كان المماس عمودي على هذه المستقيم فإن ميل المماس = $\frac{\text{معامل ص}}{\text{معامل س}} = \frac{ب}{أ}$
- إذا كان المماس يوازي محور السينات فإن ميل المماس = صفر
- إذا كان المماس يوازي محور الصادات فإن ميل المماس غير معرف أي أن مقام ميل المماس = صفر



- المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ ميله $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$
- إذا كان ميل المماس موجبًا فإن المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات.
- إذا كان ميل المماس سالبًا فإنه يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات.
- لتحديد نقطة تقاطع منحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س ولتحديد نقط تقاطع منحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص لتحديد نقط تقاطع منحنيين أو مستقيمين تحل معادلتهما جبريًا (معادلتين آنيتين).

مثال (١)

أوجد النقط التى تقع على المنحنى $ص = س^٣ - ٤ س + ٢$ والتى عندها ميل المماس للمنحنى يساوى -١

الحل

$\because ص = س^٣ - ٤ س + ٢$ $\quad \therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢ - ٤$

$\because$ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = -١$ $\quad \therefore ٣ س^٢ - ٤ = -١$

$\therefore ٣ س^٢ = ٣$ $\quad \therefore س^٢ = ١$ $\quad \therefore س = \pm ١$

عندما $س = -١$ $\quad \therefore ص = (-١)^٣ - ٤(-١) + ٢ = ٥$

عندما $س = ١$ $\quad \therefore ص = (١)^٣ - ٤(١) + ٢ = -١$

$\therefore$ النقط هى $(-١ ، ٥)$ ، $(١ ، -١)$

مثال (٢)

أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة $ص = س^٣ - ٣ س^٢ - ٩ س$ والتى يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات.

الحل

$ص = س^٣ - ٣ س^٢ - ٩ س$ $\quad \therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢ - ٦ س - ٩$

$\because$ المماس يوازى محور السينات $\quad \therefore \frac{ءص}{ءس} =$ صفر



$\therefore$ ٣ $س^٢$ − ٦ س − ٩ = ٠ $\quad\quad$ $\therefore$ $س^٢$ − ٢ س − ٣ = ٠

$\therefore$ (س + ١) (س − ٣) = ٠ $\quad\quad$ $\therefore$ س = −١ أو س = ٣

(وبالتعويض في معادلة المنحنى)

عندما س = −١ $\quad\quad$ $\therefore$ ص = $(-١)^٣$ − ٣ $(-١)^٢$ − ٩ (−١) = ٥

عندما س = ٣ $\quad\quad$ $\therefore$ ص = $(٣)^٣$ − ٣ $(٣)^٢$ − ٩ (٣) = −٢٧

$\therefore$ النقط هي (−١ ، ٥) ، (٣ ، −٢٧)

مثال (٢)

أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = $س^٣$ + ٣ س − ١ والتي يكون عندها المماس:

١ موازيًا للمستقيم ٦ س − ص − ٧ = ٠

٢ عموديًا على المستقيم س + ٣ ص = ٨

الحل

ص = $س^٣$ + ٣ س − ١ $\quad$ ، $\quad$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $س^٢$ + ٣

(١) $\because$ المماس موازيًا للمستقيم ٦ س − ص − ٧ = ٠

$\therefore$ ميل المماس = ميل المستقيم ،

$\because$ ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٦}{-١}$ = ٦

$\therefore$ ٣ $س^٢$ + ٣ = ٦ $\quad\quad$ $\therefore$ ٣ $س^٢$ = ٣

$\therefore$ $س^٢$ = ١ $\quad\quad$ $\therefore$ س = ±١

عندما س = ١ $\quad\quad$ $\therefore$ ص = ١ + ٣ − ١ = ٣

عندما س = −١ $\quad\quad$ $\therefore$ ص = −١ − ٣ − ١ = −٥

$\therefore$ النقط هي (١ ، ٣) ، (−١ ، −٥)

(٢) $\because$ المماس عمودي على المستقيم س + ٣ ص = ٨ ، ميل المستقيم = $\frac{-١}{٣}$

$\therefore$ ميل العمود = ٣ $\quad\quad$ $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣

$\therefore$ ٣ $س^٢$ + ٣ = ٣ $\quad\quad$ $\therefore$ ٣ $س^٢$ = ٠

$\therefore$ س^2 = ٠ $\qquad$ $\therefore$ س = ٠ (بالتعويض فى معادلة المنحنى)

عندما س = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ص = ٠ + ٠ − ١ = −١

$\therefore$ النقط هى (٠، −١)

مثال (٤)

أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $\frac{\text{س} - 2}{\text{س} - 1}$ والتى عندها المماس للمنحنى موازيًا للمستقيم ص = س + ٤

الحل

$\because$ ص = $\frac{\text{س} - 2}{\text{س} - 1}$ $\qquad$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 1) \times 1 - (\text{س} - 2) \times 1}{(\text{س} - 1)^2}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} - 1 - \text{س} + 2}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{1}{(\text{س} - 1)^2}$

$\because$ المماس يوازى المستقيم ص = س + ٤

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى = ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ بعد ترتيب المعادلة

$\frac{1}{(\text{س} - 1)^2} = 1$ $\qquad$ $\therefore (\text{س} - 1)^2 = 1$ $\qquad$ $\therefore$ س − ١ = ±١

إما س − ١ = −١ $\qquad$ $\therefore$ س = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ص = $\frac{0 - 2}{0 - 1} = 2$

إما س − ١ = ١ $\qquad$ $\therefore$ س = ٢ $\qquad$ $\therefore$ ص = $\frac{2 - 2}{2 - 1} = 0$

$\therefore$ النقط هى (٠، ٢)، (٢، ٠)

مثال (٥)

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = $\frac{\text{س} + 3}{\text{س} + 1}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١، هل النقطة أ (−٣، ٤) تقع على المماس؟

الحل

$\because$ ص = $\frac{\text{س} + 3}{\text{س} + 1}$ $\qquad$ $\therefore$ عند س = ١ $\qquad$ $\therefore$ ص = $\frac{1 + 3}{1 + 1} = 2$

$\therefore$ النقطة (١، ٢) تقع على المنحنى

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + ١) \times ١ - (\text{س} + ٣) \times ١}{(\text{س} + ١)^{٢}} = \frac{\text{س} + ١ - \text{س} - ٣}{(\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(١ ، ٢)} = \frac{-٢}{(١ + ١)^{٢}} = \frac{-١}{٢} = \text{م}$$ (ميل المماس)

معادلة المماس هى $(\text{ص} - \text{ص}_{١}) = \text{م} (\text{س} - \text{س}_{١})$

$(\text{ص} - ٢) = -\frac{١}{٢} (\text{س} - ١)$

$٢\text{ص} - ٤ = -\text{س} + ١$

$\therefore \text{س} + ٢\text{ص} - ٥ = ٠$

معادلة العمودى هى $(\text{ص} - \text{ص}_{١}) = \frac{-١}{\text{م}} (\text{س} - \text{س}_{١})$

$(\text{ص} - ٢) = \frac{-١}{\frac{-١}{٢}} (\text{س} - ١)$

$\therefore \text{ص} - ٢ = ٢ (\text{س} - ١)$

$\therefore \text{ص} - ٢ = ٢\text{س} - ٢$

$\therefore ٢\text{س} - \text{ص} = ٠$

بالتعويض بالنقطة $(-٣ ، ٤)$ فى معادلة المماس

$\therefore (-٣) + ٢(٤) - ٥ = ٠$ $\therefore$ النقطة $(-٣ ، ٤)$ تنتمى لمعادلة المماس

مثال ٦

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $\text{ص} = \text{س جا ٢س}$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}\right)$

الحل

$\because \text{ص} = \text{س جا ٢س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times ٢ \text{ جتا ٢س} + \text{جا ٢س} \times ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س جتا ٢س} + \text{جا ٢س}$

$$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}\right)} = ٢ \times \frac{\pi}{٤} \text{ جتا } \left(٢ \times \frac{\pi}{٤}\right) + \text{جا } ٢\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١$$

ميل المماس $(\text{م}) = ١$

معادلة المماس هى $(\text{ص} - \text{ص}_{١}) = \text{م} (\text{س} - \text{س}_{١})$



$ص - \frac{\pi}{٤} = ١ \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ ∴ $ص = س$

معادلة العمودى هى $(ص - ص_١) = \frac{-١}{م}(س - س_١)$

$ص - \frac{\pi}{٤} = \frac{-١}{١}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ ∴ $س + ص = \frac{\pi}{٢}$

مثال ٧

أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = س^٢ + أ س + ب$ عند النقطة (١ ، ٣) الواقعة عليه يساوى ٥

الحل

∵ النقطة (١ ، ٣) تقع على المنحنى $ص = س^٢ + أ س + ب$

∴ $٣ = (١)^٢ + أ \times ١ + ب$ ∴ $أ + ب = ٢$ ← (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه $= \frac{دص}{دس} = ٢ س + أ$

∵ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(١ ، ٣)} = ٥$ ∴ $٢ \times ١ + أ = ٥$ ∴ $أ = ٣$

بالتعويض فى المعادلة (١) عن قيمة أ ∴ $٣ + ب = ٢$ ∴ $ب = -١$

مثال ٨

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ (حيث $س > ٠$) عند أى نقطة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوى ٢ وحدة مربعة

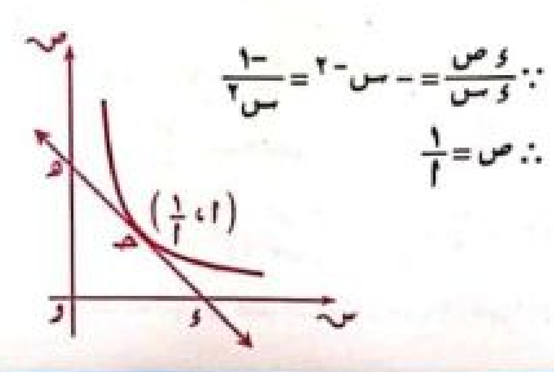
الحل

∵ $ص = \frac{١}{س} = س^{-١}$ ∵ $\frac{دص}{دس} = -س^{-٢} = \frac{-١}{س^٢}$

نفرض أن: $س = أ$ ∴ $ص = \frac{١}{أ}$

∴ النقطة جـ $\left(أ ، \frac{١}{أ}\right)$ ∈ للمنحنى

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{\left(أ ، \frac{١}{أ}\right)} = \frac{-١}{أ^٢}$



معادلة المماس عند ﺟ هى : (ص − ص$_1$) = م (س − س$_1$)

ص − $\frac{1}{أ}$ = $\frac{-1}{أ^2}$ (س − أ) (× أ^2)

أ^2 ص − أ = − س + أ

∴ س + أ^2 ص − ٢أ = ٠ (معادلة المماس $\overleftrightarrow{ءهـ}$)

لإيجاد نقطة تقاطع المماس $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ٠ + أ^2 ص − ٢أ = ٠ ∴ أ^2 ص = ٢أ

∴ ص = $\frac{2}{أ}$

∴ نقطة التقاطع مع محور الصادات هى $\left(0 ، \frac{2}{أ}\right)$

∴ و هـ = $\frac{2}{أ}$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س + ٠ − ٢أ = ٠ ∴ س = ٢أ

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (٢أ ، ٠)

و ء = ٢أ

مساحة △ المطلوب = $\frac{1}{2}$ × و هـ × و ء = $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{أ}$ × ٢أ = ٢ وحدة مربعة

مثال

أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى ٤ ص = ٩ − س^2 عند النقطة (−١ ، ٢)

الحل



∵ ٤ ص = ٩ − س^2

∴ ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-1}{2}$ س

ميل المماس = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-1 ، 2)}$ = $\frac{-1}{2}$ × −١ = $\frac{1}{2}$

معادلة المماس عند النقطة (−١ ، ٢) هى (ص − ٢) = $\frac{1}{2}$(س + ١)

2 ص $- 4 =$ س $+ 1$ $\qquad$ $\therefore$ س $- 2$ ص $+ 5 = 0$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص $= 0$

س $- 2 \times 0 + 5 = 0$ $\qquad$ $\therefore$ س $= -5$

معادلة العمودي عند النقطة $(-1 ، 2)$ هي :

(ص $- 2$) $= -2$ (س $+ 1$)

ص $- 2 = -2$ س $- 2$ $\qquad$ $\therefore 2$ س $+$ ص $= 0$

لإيجاد نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات نضع ص $= 0$

$2 \times$ س $+ 0 = 0$ $\qquad$ $\therefore$ س $= 0$

مساحة $\triangle$ المطلوب $= \frac{1}{2} \times$ و ؤ $\times$ أ هـ $= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$ وحدات مربعة

مثال (١٠)

إذا كان المماس للمنحنى ص $=$ س$^4 - 2$ س$^2 -$ س عند النقطة أ $= (-1 ، 0)$ يمس المنحنى عند نقطة أخرى ب فأوجد معادلة العمودي على المنحنى عند ب

الحل

$\because$ ص $=$ س$^4 - 2$ س$^2 -$ س $\qquad$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = 4$ س$^3 - 4$ س $- 1$

ميل المماس $= \left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(-1 ، 0)} = 4(-1)^3 - 4(-1) - 1 = -1$

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(-1 ، 0)$ هي :

$\frac{ص - 0}{س + 1} = -1$ $\Leftarrow$ ص $= -$ س $- 1$

لإيجاد نقط تقاطع المماس مع المنحنى :

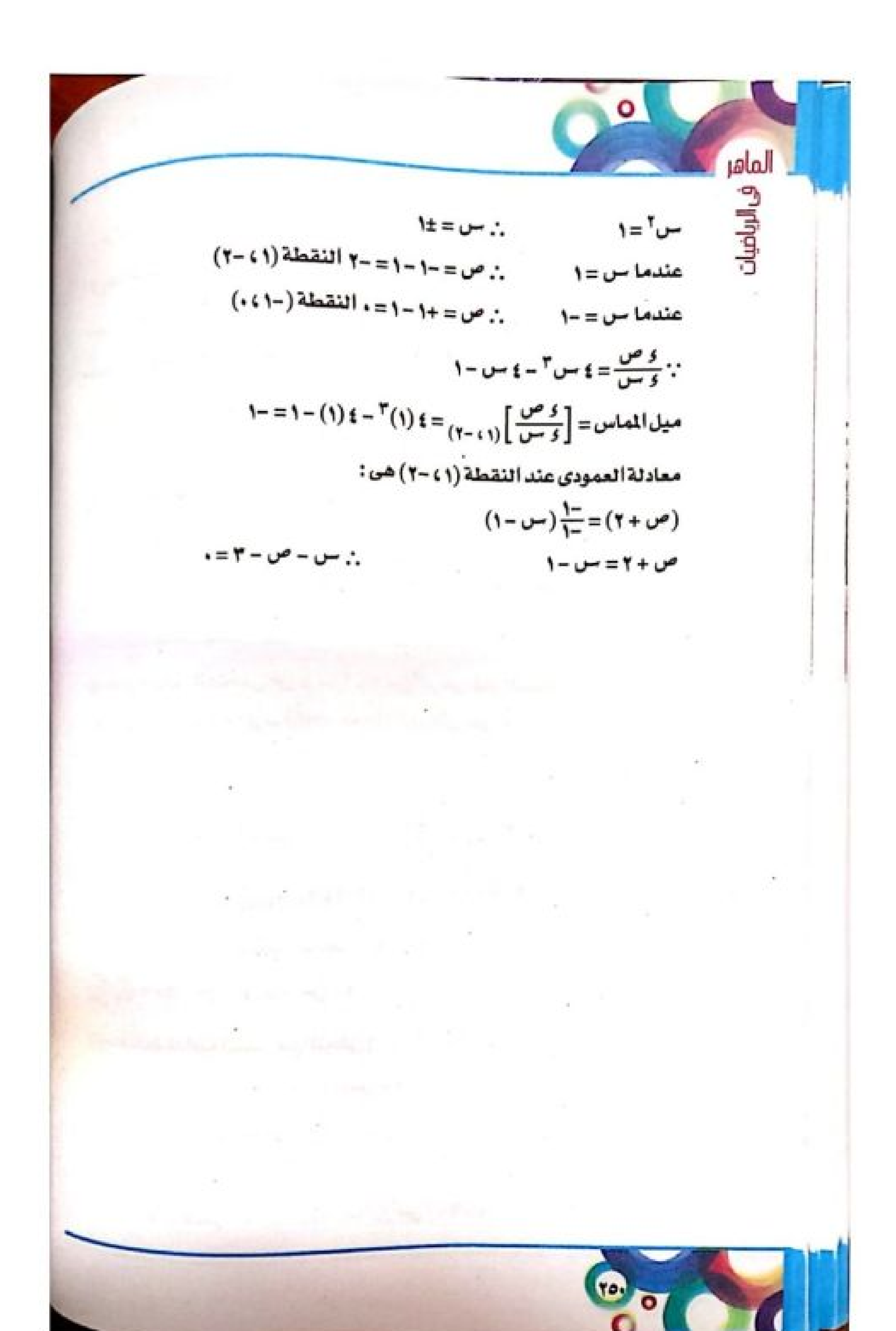
ص $=$ س$^4 - 2$ س$^2 -$ س ، ص $= -$س $- 1$

س$^4 - 2$ س$^2 -$ س $= -$س $- 1$

س$^4 - 2$ س$^2 + 1 = 0$

(س$^2 - 1$)$^2 =$ صفر $\qquad$ $\therefore$ س$^2 - 1 = 0$





$س^2 = 1$ $\therefore$ $س = \pm 1$

عندما $س = 1$ $\therefore$ $ص = -1 - 1 = -2$ النقطة $(1 ، -2)$

عندما $س = -1$ $\therefore$ $ص = +1 - 1 = 0$ النقطة $(-1 ، 0)$

$\because \frac{دص}{دس} = 4س^3 - 4س - 1$

ميل المماس $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{(1 ، -2)} = 4(1)^3 - 4(1) - 1 = -1$

معادلة العمودى عند النقطة $(1 ، -2)$ هى:

$(ص + 2) = \frac{-1}{-1}(س - 1)$

$ص + 2 = س - 1$ $\therefore$ $س - ص - 3 = 0$




تمرين ٦ على تطبيقات على المشتقات

الأسئلة التى أمامها علامة يوجد لها نفس أفكار كتاب المدرسة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمى ١٤

$\frac{1}{2}$ ساعة امتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{......}{١٠}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① $\frac{ء}{ءس}$ (جتا س − جا س) = ...

[جا س − جتا س ، جتا س − جا س ،
جا س + جتا س ، − جا س − جتا س]

② $\frac{ء}{ءس}$ (جتا ٢π) = ... [صفر ، ١ ، −١ ، ٢]

③ $\frac{ء}{ءس}$ (٥س + ظا ٢س) = ...

[٥ + ظا ٢س ، ٥ + ٢قا^{٢} ٢س ، ٥ + قا^{٢} ٢س ، ٥ + ٢قا^{٢} س]

④ معدل تغير س^{٣} + ٤ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ ....

[٧ ، ٤ ، ٣س^{٢} ، ١٢]

---

⑤ إذا كانت ص = ع^{٢} + ٣ع + ٥ ، ع = $\frac{1}{2}$س^{٢} + ٢

فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ − ٧ $\frac{ءع}{ءس}$ − س^{٣}

....

....

---

⑥ صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع
أحسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨ سم

....

....

ثانياً مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) عند أى نقطة عليه هو ....

[$\frac{ء س}{ء ص}$ أ، ء س أ، ء ص أ، $\frac{ء ص}{ء س}$]

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = $(٢ س - ٣)^{٥}$ عندما س = ١ هو ....

[٥ أ، -١٠ أ، ١٠ أ، ٢]

(٣) ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٥}{٢ س - ١}$ عندما س = ٠ هو ....

[-١٠ أ، ١٠ أ، $\frac{٥}{٢}$ أ، صفر]

(٤) ميل المماس للمنحنى ص = جتا س عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ يساوى ....

[$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{-١}{٢}$]

(٥) ميل العمودى للمنحنى ص = ظا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ يساوى ....

[$\frac{١}{٢}$ أ، -٢ أ، $\frac{-١}{٢}$ أ، ٢]

(٦) ميل العمودى للمنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٩}$ يساوى ....

[-١ أ، ١ أ، صفر أ، غير معرف]

(٧) إذا كان المستقيم ٤ ص - ٢ س + ٥ = ٠ مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة التى إحداثيها السينى ٢ فإن د′(٢) = ...

[$\frac{١}{٢}$ أ، ٢ أ، $\frac{-١}{٢}$ أ، صفر]

(٨) إذا كان المستقيم ص = ٨ - ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣، -١) فإن د′(٣) = ...

[٣ أ، صفر أ، -٣ أ، ١]

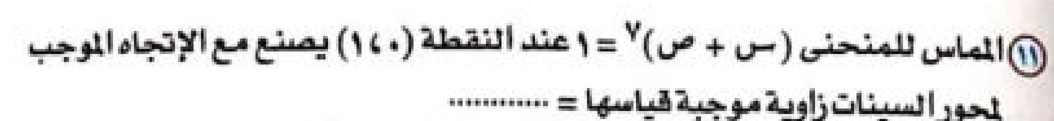
(٩) إذا كان المستقيم ٢ س - ص + ٧ = ٠ عموديًا على منحنى الدالة د عند النقطة (-١، ٢) فإن د′(-١) = ...

[-٢ أ، ٢ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{-١}{٢}$]

(١٠) المماس للمنحنى ص = $(٣ س - ٥)^{٣}$ عند النقطة (٢، ١) يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها = ...

[-٩ أ، ٩ أ، ١ أ، صفر]





(١١) المماس للمنحنى $(س + ص)^٧ = ١$ عند النقطة (٠ ، ١) يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها = ...

[٤٥° ، ٦٠° ، ١٣٥° ، ١٥٠°]

(١٢) ميل المماس للمنحنى ص = س |س| عند س = ٣ هو ....

[-٦ ، ٦ ، ٣ ، -٣]

(١٣) ميل العمودى للمنحنى ص = س |س - ٢| عند س = -٢ هو ....

[$١ ، -\frac{١}{٦} ، -٦ ، ٦$]

(١٤) معادلة المماس للمنحنى ص = $(س - ١)^٢$ عند النقطة (٢ ، ١) هى ....

[ص = ٢ س - ٣ ، ص = س - ٢ ، س = ٢ ص - ٣ ، ص = ٢ س]

ثالثًا مسائل المستوى الثانى

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^٢ + \frac{١}{س} - ١$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ [٤٥°]

٤ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣ ، ٦) [١٠١° ١٨َ ٣٥ً]

٥ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س (س - ١) (س + ١) مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند نقطة الأصل. [١٣٥°]

٦ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها العمودى على المنحنى ص = $\sqrt{٢ س^٢ + ٧}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (-٣ ، ٥) لأقرب دقيقة. [٣٩° ٤٨َ]

٧ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = جا ٢ س مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (π ، ٠) [٦٣° ٢٦َ]

٨ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = $س^٣ + ٣$ س - ١ والتى يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوى ٦ [(١ ، ٣) ، (-١ ، -٥)]

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^٣ - ٦ س^٢ - ١٥$ س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات. [(٥ ، -٨٠) ، (-١ ، ٢٨)]



١٠ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^٣$ - ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° [(١-،٦)،(١،٠)]

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = ٣ $س^٢$ - ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس:

① موازيًا للمستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠ [($\frac{٣}{٢}$، $\frac{-١٩}{٤}$)]

② عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦ [(٦،٤٧)]

③ يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = -١١ [(٠،٥)]

١٢ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = $(س - ٣)^٢$ - ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص - ٣ = ٠ [(٢،٠)]

١٣ أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $\frac{س - ٢}{س - ١}$ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا للمستقيم ص = س + ٤ [(٠،٢)،(٢،٠)]

١٤ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{س - ٢}{س - ١}$ والتى يكون عندها المماس عموديًا على المستقيم ص + س = ٧ [(٢،٠)،(٠،٢)]

١٥ إذا كان س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = جا ٢ س ويكون المماس عندها يوازى المستقيم ص + س = ٠ [($\frac{\pi}{٣}$، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)]

١٦ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = جا س + جتا س والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات حيث س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] [($\frac{\pi}{٤}$، $\sqrt{٢}$)]

١٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة:

① ص = ٢ $س^٣$ - ٤ $س^٢$ + ٣ عند النقطة التى إحداثيها السينى = ٢

② ص = س + $\frac{١}{س}$ عند النقطة (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

③ ص = $\sqrt{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤ ، ٤)

④ ص = $(س^٢ + س)(س^٣ + ٥)$ عند النقطة (-٢ ، -٦)

⑤ ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة (١ ، ٢)

⑥ ص = $(س^٢ - ٣)^٤$ عند النقطة (٢ ، ١)

(٧) ص = ٤ س − طا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤}، د\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

(٨) ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة (٠، ١)

(٩) ص = $\frac{١ + جا س}{١ - جا س}$ عند النقطة (π، ١)

١٨ أوجد معادلة العمودى على المنحنى فى كل مما يأتى عند النقط المعطاة :

(١) ص = $س^{٢} - س^{٣}$ عند النقطة (٢، −٤)

(٢) ص = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ عند النقطة (١، ٠)

(٣) ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$ عند النقطة (٣، ٥)

(٤) ص = $(س - ٣)^{٣} + ٣$ عند النقطة (٤، ٤)

(٥) ص = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ - س^{٢}}$ عند النقطة $\left(٠، \frac{-١}{٢}\right)$

(٦) ص = طا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤}، ١\right)$

(٧) ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤}، \frac{٣\sqrt{٢}}{٤}\right)$

١٩ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (س − ٢) (س + ١) عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات. [٣ س + ص + ٣ = ٠]

٢٠ أوجد معادلة المماس للمنحنى الذى معادلته ص = $\sqrt{٦ - س}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س [س + ٤ ص − ١٠ = ٠]

٢١ أوجد معادلة العمودى على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ + ٦ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س [٦ س + ص − ٦٣ = ٠]

٢٢ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى ص = $س^{٢}$ + س − ١ عند النقطة (١، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ − $\sqrt[٣]{س}$ عند نفس النقطة.

٢٣ برهن أن المماسات لمنحنى الدالة ص = $س^{٣}$ + س + ٢ عند أى نقطة عليه تميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى عند النقطة س = −١

٢٤ **أثبت** أن المماس للمنحنى ص = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ عند أى نقطة على المنحنى يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات.

٢٥ **أوجد** معادلة المماس والعمودى لمنحنى الدالة ص = ٢ حا س + ٣ حتا س عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات. [س + ٢ص = ٦ ، ٢س - ص = ٣]

٢٦ إذا كان المنحنى ص = ٣ $\text{س}^{٢}$ - ٧ س + ٤ يقطع محور السينات فى النقطتين أ ، ب
أثبت أن المماسين عند أ ، ب متعامدين.

٢٧ **أوجد** النقط الواقعة على المنحنى ص = $\text{س}^{٣}$ والتى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠) [(٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)]

٢٨ **أوجد** مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى ص = $\text{س}^{٢}$ - ٦ س + ١٣ عند النقطة (٤ ، ٥) الواقعة عليه [٣١٫٢٥ وحدة مربعة]

٢٩ إذا كان منحنى الدالة د هو ص = $(\text{س} - ٣)^{٢}$ + ٣ **أوجد** :

① معادلة المماس عند نقطة تقاطعه مع المحور الصادى. [٦س + ص = ١٢]

② إحداثيى نقطة تقاطع هذا المماس مع المحور السينى. [(٢ ، ٠)]

③ مساحة المثلث المحدد بهذا المماس ومحورى الإحداثيات. [١٢ وحدة مربعة]

٣٠ إذا كان المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{\text{س}}$ عند النقطة حـ فى الربع الأول يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين م ، ں **فأثبت** أن مساحة △ م و ں ثابتة ولا تعتمد على موضع النقطة حـ الواقعة على منحنى الدالة.

٣١ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{\text{أ س} + \text{ب}}$ يساوى -٨ عند النقطة (١ ، -٤)
أوجد قيمتى أ ، ب [٢ ، -٣]

٣٢ إذا كان المنحنى ص = أ $\text{س}^{٣}$ + ب $\text{س}^{٢}$ يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (-١ ، -٣) **فأوجد** قيمتى أ ، ب [٢ ، -١]

٣٣ إذا كان المنحنى ص = ($\text{س}^{٢}$ - ٢ س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠) ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل **فأوجد** قيمتى أ ، ب [$\frac{١}{٢}$ ، -١]





٣٤ إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + ٥ عند النقطة (−١، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° **فأوجد** قيمتى أ ، ب

[٣ ، ١]

رابعًا مسائل تقيس مستويات عليا فى التفكير

٣٥ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ س & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س = ١ **أوجد** معادلة المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة [ص = ٣ س]

٣٦ **عين** قيمة أ ∈ ح التى تجعل محور السينات مماسًا للمنحنى :

ص = $س^{٢}$ − أ س + أ − ١ ثم **عين** نقطة التماس. [(١ ، ٠)]

٣٧ **أوجد** معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٣}}{|س|}$ عند س = ٢ [٤ س − ص − ٤ = ٠]

٣٨ **أثبت** أن المماس لمنحنى الدالة ص = س | س | − ٣ س عند النقطة س = ٢

يوازى العمودى على منحنى الدالة عند النقطة س = −١

٣٩ **أثبت** أن معادلة المماس للمنحنى $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}}$ = ١ عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$)

الواقعة عليه هى $\frac{س\,س_{١}}{أ^{٢}} + \frac{ص\,ص_{١}}{ب^{٢}}$ = ١

٤٠ **أوجد** معادلة العمودى للمنحنى ص = $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ عند كل من نقطتى تقاطع

مع الدائرة $س^{٢}$ − ٣ س + $ص^{٢}$ = ٢٥ [س + ٣ ص = ١٨ ، س − ٣ ص + ١٥ = ٠]

٤١ **أوجد** قيمة أ التى تجعل المستقيم ص = ٤ س + أ مماسًا للمنحنى ص = $س^{٢}$ + ٥ [١]

٤٢ **أوجد** معادلة المماس للمنحنى :

$ص^{٢}$ + ٢ $\sqrt{س\,ص}$ = ٢١ − $س^{٢}$ عند النقطة (١ ، ٤) [٨ س + ١٧ ص − ٧٦ = ٠]

٤٣ إذا كانت ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٣) تقع على منحنى الدالة ص = أ جا س جتا س + ب

وكانت معادلة المماس له عند هذه النقطة هى ٢ ص + ٤ س + ٣ = ٠

فأوجد قيمتى أ ، ب

[٣ ، ٢]





الدرس ٧ التكامــــل



علمنا فيما سبق كيفية إيجاد المشتقة د′ إذا علمت الدالة د حيث: د′(س) = $\frac{ء}{ءس}$ د(س)

وسوف نتناول فى هذا الدرس العملية العكسية لعملية الإشتقاق وهى المشتقة العكسية.

المشتقة العكسية

إذا كانت الدالة المشتقة للدالة ص هى $\frac{ءص}{ءس}$ فإن العملية العكسية لها وهى إيجاد ص

إذا علم $\frac{ءص}{ءس}$ تسمى «المشتقة العكسية» أو «عملية التكامل»

فمثلاً إذا كانت ص = $س^٦$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ $س^٥$ وإذا كانت $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ $س^٥$

فإن المشتقة العكسية هى: $س^٦$ أو $س^٦$ + ١ أو $س^٦$ + ٢ أو $س^٦$ − ٣ أو .....

لأن جميع هذه الدوال «مجموعة المشتقات العكسية للدالة» تكون مشتقتها ٦ $س^٥$ لذلك

فإذا رمزنا للعدد الموجود بعد $س^٦$ بالرمز ث ليدل على هذا العدد الثابت فإن ص = $س^٦$ + ث

تكون مشتقتها $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ $س^٥$





ومن ذلك يمكن أن نصل للتعريف التالي :

تعريف

يقال أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت ت′ (س) = د (س) لكل س في مجال د

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز ∫ د (س) ء س [ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف

إذا كانت ت′ (س) = د (س) فإن ∫ د (س) ء س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت إختيارى (ثابت التكامل)

فمثلاً

$\frac{ء}{ء س}$ (س^{٣} + ٥) = ٣ س^{٢} ∴ ∫ ٣ س^{٢} ء س = س^{٣} + ث

$\frac{ء}{ء س}$ (س^{٥} − ٣) = ٥ س^{٤} ∴ ∫ ٥ س^{٤} ء س = س^{٥} + ث

$\frac{ء}{ء س}$ (٢ س^{٧}) = ١٤ س^{٦} ∴ ∫ ١٤ س^{٦} ء س = ٢ س^{٧} + ث

ولتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال ١

أثبت أن الدالة ت حيث ت (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٩} هى مشتقة عكسية للدالة د حيث د (س) = ٣ س^{٨}

الحل

نوجد مشتقة الدالة ت فيكون ت′ (س) = $\frac{١}{٣}$ × ٩ س^{٨} = ٣ س^{٨}

∴ ت′ (س) = د (س)   أى أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د



قاعدة

$\int س^{ن} \, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ث ثابت ، ن عدد نسبى ، $ن \neq -١$

أى إننا نضيف للأس واحد ثم نقسم على الأس الجديد + ث

فمثلاً $\int س^{٥} \, ء س = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

وأيضاً $\int س^{-٣} \, ء س = \frac{س^{-٣+١}}{-٢} + ث = \frac{-١}{٢} س^{-٢} + ث$

نتيجة

$\int أ \, ء س = أ س + ث$ حيث أ عدد حقيقى ثابت

فمثلاً $\int ٥ \, ء س = ٥ س + ث$ ، $\int -٣ \, ء س = -٣ س + ث$

مثال (٢)

تحقق من صحة كل مما يأتى :

(١) $\int س^{٥} \, ء س = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

(٢) $\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}} \, ء س = \sqrt{س^{٢} + ٥} + ث$

الحل

(١) $\because \frac{ء}{ء س} \left(\frac{١}{٦} س^{٦} + ث \right) = \frac{١}{٦} \times ٦ س^{٥} = س^{٥}$

$\therefore \int س^{٥} \, ء س = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

(٢) $\frac{ء}{ء س} \left(\sqrt{س^{٢} + ٥} + ث \right) = \frac{١}{٢\sqrt{س^{٢} + ٥}} \times ٢ س = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}}$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}} \, ء س = \sqrt{س^{٢} + ٥} + ث$





مثال (٣)

أوجد: (١) $\int$ س^٤ ء س (٢) $\int$ س^-٥ ء س

(٣) $\int$ س^(٢/٣) ء س (٤) $\int$ ٤ $\sqrt[3]{س}$ ء س

الحل

(١) $\int$ س^٤ ء س = $\frac{س^{٤+١}}{٤+١}$ + ث = $\frac{١}{٥}$ س^٥ + ث

(٢) $\int$ س^-٥ ء س = $\frac{س^{-٥+١}}{-٥+١}$ + ث = $\frac{-١}{٤}$ س^-٤ + ث

(٣) $\int$ س^(٢/٣) ء س = $\frac{س^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١}$ + ث = $\frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}}$ + ث = $\frac{٣}{٥}$ س^(٥/٣) + ث

(٤) $\int$ ٤ $\sqrt[3]{س}$ ء س = ٤ $\int$ س^(١/٣) ء س

= ٤ $\frac{س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١}$ + ث = ٤ $\frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}$ + ث = ٣ س^(٤/٣) + ث

خواص التكامل

إذا كان كل من د ، ر دالة قابلة للإشتقاق على فترة ما فإن :

(١) $\int$ أ د(س) ء س = أ $\int$ د(س) ء س حيث أ $\in$ ح*

(٢) $\int$ [د(س) ± ر(س)] ء س = $\int$ د(س) ء س ± $\int$ ر(س) ء س

فمثلاً $\int$ ٤ س^٢ ء س = ٤ $\int$ س^٢ ء س = ٤ × $\frac{س^٣}{٣}$ + ث = $\frac{٤}{٣}$ س^٣ + ث

وأيضاً $\int$ (٤ س + ٣ س^٢) ء س = $\int$ ٤ س ء س + $\int$ ٣ س^٢ ء س

= ٤ $\int$ س ء س + ٣ $\int$ س^٢ ء س = ٤ × $\frac{س^٢}{٢}$ + ٣ × $\frac{س^٣}{٣}$ + ث

= ٢ س^٢ + س^٣ + ث





مثال ٤

أوجد: ① $\int (٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥)\,\text{ء س}$ ② $\int (\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

③ $\int \text{س}^{٢}\left(٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}}\right)\text{ء س}$ ④ $\int (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

الحل

① $\int (٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥)\,\text{ء س}$

$= \int ٣\text{س}^{٢}\,\text{ء س} + \int \text{س}\,\text{ء س} - \int ٥\,\text{ء س}$

$= \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٥\text{س} + \text{ث} = \text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \text{ث}$

② $\int (\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

$= \int \text{أ}\,\text{س}^{٢}\,\text{ء س} + \int ٤\text{س}\,\text{ء س} + \int ٣\,\text{ء س}$

$= \text{أ}\int \text{س}^{٢}\,\text{ء س} + ٤\int \text{س}\,\text{ء س} + ٣\int \text{ء س}$

$= \text{أ} \times \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٤ \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٣\text{س} + \text{ث}$

$= \frac{\text{أ}}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{ث}$

③ $\int \text{س}^{٢}\left(٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}}\right)\text{ء س}$

$= \int (٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س})\,\text{ء س} = ٢\int \text{س}^{٣}\,\text{ء س} - ٣\int \text{س}\,\text{ء س}$

$= ٢\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٣\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٤} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

④ $\int (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}^{٢} - ٩)\,\text{ء س} = \int \text{س}^{٢}\,\text{ء س} - \int ٩\,\text{ء س}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٩\text{س} + \text{ث} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٩\text{س} + \text{ث}$

بعض قواعد التكامل

① $\int (\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء}\,\text{س} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} ، \text{ن} \neq -1$

أى أن تكامل (دالة من الدرجة الأولى فى س)^{ن} $= \frac{1}{\text{معامل س}} \times \frac{(\text{الدالة})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

② $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، حيث ث ثابت ،

ن عدد نسبى $\neq -1$

أى أن تكامل (دالة)^{ن} × مشتقتها $= \frac{(\text{الدالة})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

فمثلاً $\int \left((3-2\text{س})^5 + 3\right)\text{ء}\,\text{س} = \int (3-2\text{س})^5\,\text{ء}\,\text{س} + \int 3\,\text{ء}\,\text{س}$

$= \frac{(3-2\text{س})^6}{6 \times -2} + 3\text{س} + \text{ث} = \frac{-1}{12}(3-2\text{س})^6 + 3\text{س} + \text{ث}$

ولإيجاد (دالة)^{ن} × مشتقتها مثل: $\int (\text{س}^2 - 3\text{س} + 5)^{-7}(2\text{س} - 3)\,\text{ء}\,\text{س}$

فإننا نلاحظ أن:

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - 3\text{س} + 5 ، \text{د}'(\text{س}) = 2\text{س} - 3$

$\therefore \int (\text{س}^2 - 3\text{س} + 5)^{-7}(2\text{س} - 3)\,\text{ء}\,\text{س}$

$= \frac{(\text{س}^2 - 3\text{س} + 5)^{-6}}{-6} + \text{ث} = \frac{-1}{6}(\text{س}^2 - 3\text{س} + 5)^{-6} + \text{ث}$

مثال

أوجد: ① $\int (\sqrt{\text{س}} - 2)^2\,\text{ء}\,\text{س}$ ② $\int \left(\text{س} + \frac{3}{\text{س}}\right)^2 \text{ء}\,\text{س}$

③ $\int \frac{\text{س}^5 - 4\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^3}\,\text{ء}\,\text{س}$ ④ $\int \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س} + 2}\,\text{ء}\,\text{س}$

الحل

① $\int (\sqrt{\text{س}} - 2)^2\,\text{ء}\,\text{س} = \int (\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 4)\,\text{ء}\,\text{س}$

$= \int \text{س}\,\text{ء}\,\text{س} - 4\int \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}\,\text{س} + \int 4\,\text{ء}\,\text{س}$



$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 4\,\frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4\text{س} + \text{ث} = \frac{1}{2}\text{س}^{2} - \frac{8}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 4\text{س} + \text{ث}$$

② $\int \left(\text{س} + \frac{3}{\text{س}}\right)^{2} \text{ء س} = \int \left(\text{س}^{2} + 6 + \frac{9}{\text{س}^{2}}\right) \text{ء س}$

$$= \int \text{س}^{2}\,\text{ء س} + 6\int \text{ء س} + 9\int \text{س}^{-2}\,\text{ء س}$$

$$= \frac{\text{س}^{3}}{3} + \frac{6\,\text{س}}{1} + \frac{9\,\text{س}^{-1}}{-1} + \text{ث} = \frac{1}{3}\text{س}^{3} + 6\text{س} - \frac{9}{\text{س}} + \text{ث}$$

③ $\int \frac{\text{س}^{5} - 4\text{س}^{3} + \text{س}}{\text{س}^{3}} \text{ء س} = \int \text{س}^{2}\,\text{ء س} - \int 4\,\text{ء س} + \int \text{س}^{-2}\,\text{ء س}$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} - 4\text{س} - \text{س}^{-1} + \text{ث}$$

④ $\int \frac{\text{س}^{3} + 8}{\text{س} + 2} \text{ء س} = \int \frac{(\text{س} + 2)(\text{س}^{2} - 2\text{س} + 4)}{(\text{س} + 2)} \text{ء س}$

$$= \int (\text{س}^{2} - 2\text{س} + 4)\,\text{ء س}$$

$$= \int \text{س}^{2}\,\text{ء س} - 2\int \text{س}\,\text{ء س} + \int 4\,\text{ء س}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} - \text{س}^{2} + 4\text{س} + \text{ث}$$

مثال (٦)

أوجد: ① $\int (4\text{س} - 3)^{3}\,\text{ء س}$ ② $\int \left[4(2\text{س} + 7)^{5} + 6\right] \text{ء س}$

③ $\int \frac{10}{(2\text{س} + 9)^{6}}\,\text{ء س}$ ④ $\int (\text{س} - 3)(\text{س}^{2} - 6\text{س} + 9)\,\text{ء س}$

الحل

① $\int (4\text{س} - 3)^{3}\,\text{ء س} = \frac{1}{4}\,\frac{(4\text{س} - 3)^{3+1}}{3+1} + \text{ث}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(4\text{س} - 3)^{4}}{4} + \text{ث} = \frac{1}{16}(4\text{س} - 3)^{4} + \text{ث}$$

② $\int \left[٤(٢\text{س} + ٧)^{٥} + ٦ \right] \text{ءس}$

$= ٤ \int (٢\text{س} + ٧)^{٥} \,\text{ءس} + \int ٦ \,\text{ءس}$

$= ٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{(٢\text{س} + ٧)^{٦}}{٦} + ٦\text{س} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣} (٢\text{س} + ٧)^{٦} + ٦\text{س} + \text{ث}$

③ $\int \frac{١٠}{(٢\text{س} + ٩)^{٦}} \,\text{ءس}$

$= ١٠ \int (٢\text{س} + ٩)^{-٦} \,\text{ءس} = ١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{(٢\text{س} + ٩)^{-٥}}{-٥} + \text{ث}$

$= -(٢\text{س} + ٩)^{-٥} + \text{ث} = \frac{-١}{(٢\text{س} + ٩)^{٥}} + \text{ث}$

④ $\int (\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩) \,\text{ءس}$

$= \int \left[(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)^{٢} \right] \text{ءس}$

$= \int (\text{س} - ٣)^{٣} \,\text{ءس} = \frac{١}{٤} (\text{س} - ٣)^{٤} + \text{ث}$

مثال ⑦

أوجد: ① $\int \text{س}^{٥} \left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥} \text{ءس}$ ② $\int \text{س} \sqrt[٥]{\frac{٦}{\text{س}^{٤}} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}}} \,\text{ءس}$

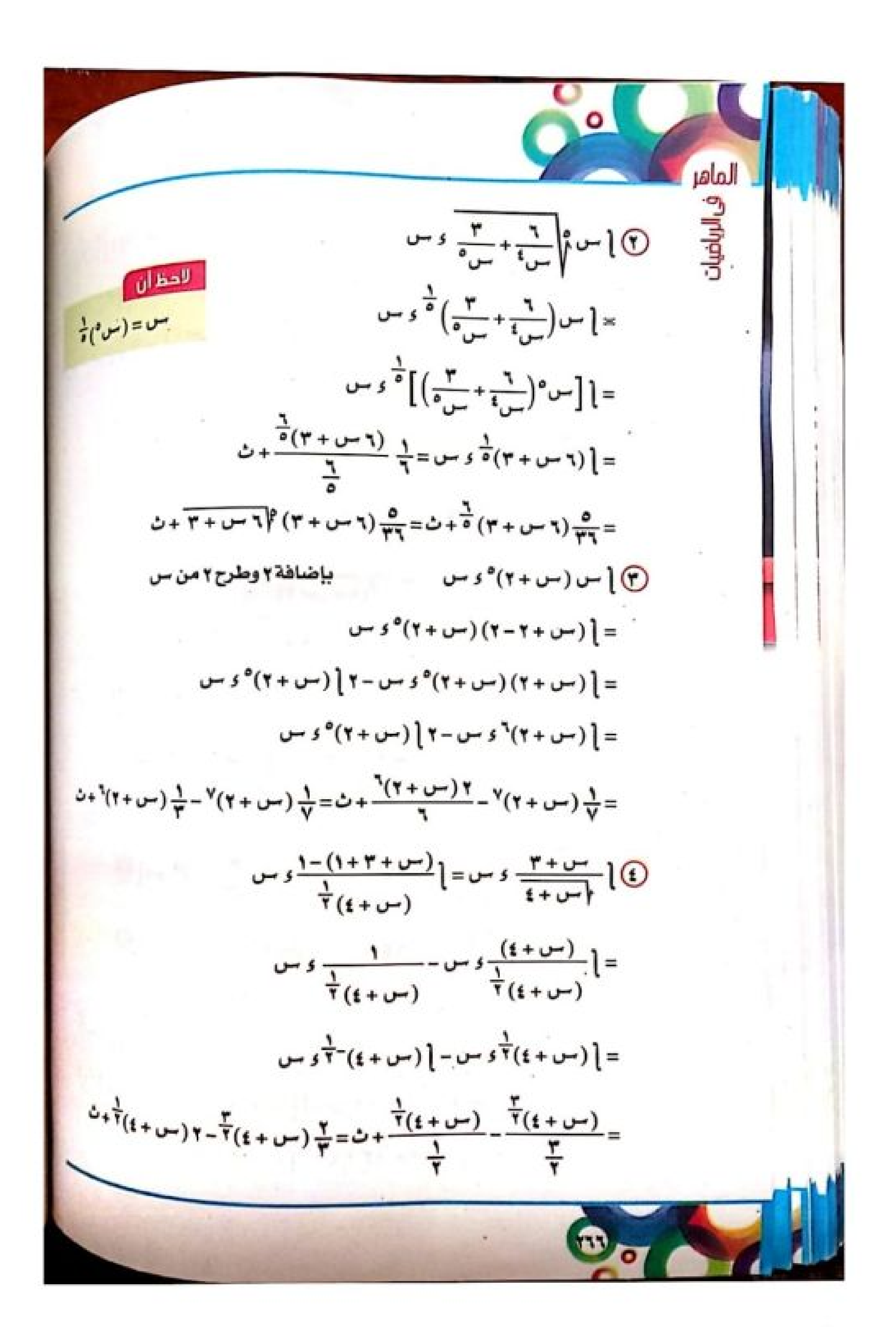
③ $\int \text{س} (\text{س} + ٢)^{٥} \,\text{ءس}$ ④ $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٤}} \,\text{ءس}$

الحل

① $\int \text{س}^{٥} \left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥} \text{ءس} = \int \left[\text{س} \left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right) \right]^{٥} \text{ءس}$

$= \int (\text{س} + ٣)^{٥} \,\text{ءس} = \frac{١}{٦} (\text{س} + ٣)^{٦} + \text{ث}$





(٢) $\int س \sqrt[٥]{\frac{٦}{س^{٤}} + \frac{٣}{س^{٥}}}\ ءس$

$$= \int س \left(\frac{٦}{س^{٤}} + \frac{٣}{س^{٥}}\right)^{\frac{١}{٥}} ءس$$

$$= \int \left[س^{٥}\left(\frac{٦}{س^{٤}} + \frac{٣}{س^{٥}}\right)\right]^{\frac{١}{٥}} ءس$$

$$= \int (٦س + ٣)^{\frac{١}{٥}} ءس = \frac{١}{٦} \frac{(٦س + ٣)^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + ث$$

$$= \frac{٥}{٣٦}(٦س + ٣)^{\frac{٦}{٥}} + ث = \frac{٥}{٣٦}(٦س + ٣)\sqrt[٥]{٦س + ٣} + ث$$

لاحظ أن

$س = (س^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

(٣) $\int س (س + ٢)^{٥} ءس$ باضافة ٢ وطرح ٢ من س

$$= \int (س + ٢ - ٢)(س + ٢)^{٥} ءس$$

$$= \int (س + ٢)(س + ٢)^{٥} ءس - ٢\int (س + ٢)^{٥} ءس$$

$$= \int (س + ٢)^{٦} ءس - ٢\int (س + ٢)^{٥} ءس$$

$$= \frac{١}{٧}(س + ٢)^{٧} - \frac{٢(س + ٢)^{٦}}{٦} + ث = \frac{١}{٧}(س + ٢)^{٧} - \frac{١}{٣}(س + ٢)^{٦} + ث$$

(٤) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س + ٤}} ءس = \int \frac{(س + ٣ + ١) - ١}{(س + ٤)^{\frac{١}{٢}}} ءس$

$$= \int \frac{(س + ٤)}{(س + ٤)^{\frac{١}{٢}}} ءس - \int \frac{١}{(س + ٤)^{\frac{١}{٢}}} ءس$$

$$= \int (س + ٤)^{\frac{١}{٢}} ءس - \int (س + ٤)^{-\frac{١}{٢}} ءس$$

$$= \frac{(س + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{(س + ٤)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث = \frac{٢}{٣}(س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - ٢(س + ٤)^{\frac{١}{٢}} + ث$$

مثال ٨

أوجد :

① $\int ٦ س (٣ س^{٢} + ٤)^{٣} \, ء س$

② $\int \frac{٤ س^{٣}}{(س^{٤} + ١)^{٦}} \, ء س$

③ $\int (٢ س - ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٥)^{٧} \, ء س$

④ $\int س \sqrt{٥ س^{٢} + ٩} \, ء س$

الحل

① $\int ٦ س (٣ س^{٢} + ٤)^{٣} \, ء س$

$\because$ د (س) = ٣ س^{٢} + ٤ ، د$'$(س) = ٦ س

$$\therefore \int ٦ س (٣ س^{٢} + ٤)^{٣} \, ء س = \frac{(٣ س^{٢} + ٤)^{٤}}{٤} + ث = \frac{١}{٤} (٣ س^{٢} + ٤)^{٤} + ث$$

② $\int \frac{٤ س^{٣}}{(س^{٤} + ١)^{٦}} \, ء س = \int ٤ س^{٣} (س^{٤} + ١)^{-٦} \, ء س$

$\because$ د (س) = س^{٤} + ١ ، د$'$(س) = ٤ س^{٣}

$$\therefore \int ٤ س^{٣} (س^{٤} + ١)^{-٦} \, ء س = \frac{(س^{٤} + ١)^{-٥}}{-٥} + ث = \frac{-١}{٥} (س^{٤} + ١)^{-٥} + ث$$

③ $\int (٢ س - ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٥)^{٧} \, ء س$

$\because$ د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٥ ، د$'$(س) = ٢ س − ٣

$$\therefore \int (٢ س - ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٥)^{٧} \, ء س = \frac{١}{٨} (س^{٢} - ٣ س + ٥)^{٨} + ث$$

④ $\int س \sqrt{٥ س^{٢} + ٩} \, ء س$

$\because$ د (س) = ٥ س^{٢} + ٩ ، د$'$(س) = ١٠ س

$$\therefore \int س (٥ س^{٢} + ٩)^{\frac{١}{٢}} \, ء س = \frac{١}{١٠} \int ١٠ س (٥ س^{٢} + ٩)^{\frac{١}{٢}} \, ء س$$

$$= \frac{١}{١٠} \cdot \frac{(٥ س^{٢} + ٩)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{١٥} (٥ س^{٢} + ٩)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$



تكامل بعض الدوال المثلثية

١ ∫ جا س ء س = - جتا س + ث

٢ ∫ جتا س ء س = جا س + ث

٣ ∫ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث

حيث ث ثابت إختيارى

نتائج هامة

١ ∫ جا (أ س + ب) ء س = - $\frac{١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

٢ ∫ جتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

٣ ∫ قا^{٢} (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث حيث ث ثابت إختيارى

فمثلاً ∫ (س - جا س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + جتا س + ث

وأيضًا ∫ (٤ جتا س + $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ + ١) ء س

= ∫ (٤ جتا س + قا^{٢} س + ١) ء س = ٤ جا س + ظا س + س + ث

كما أن ∫ جتا (٢ س + ٣) ء س = $\frac{١}{٢}$ جا (٢ س + ٣) + ث

تذكر بعض العلاقات المثلثية

١ جتا^{٢} س + جا^{٢} س = ١

٢ ١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

٣ جتا^{٢} س - جا^{٢} س = جتا ٢ س

٤ ٢ جتا^{٢} س - ١ = جتا ٢ س

٥ ١ - ٢ جا^{٢} س = جتا ٢ س

٦ ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

٧ جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

٨ جتا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

ملاحظة هامة

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ ∫ د(س) ء س = د(س)

∫ $\frac{ء}{ء\text{س}}$ [د(س)] ء س = د(س) + ث

مثال ٩

أوجد:

❶ ∫ (س^{٢} + جتا س) ء س　　❷ ∫ (٥ جا س + ٣) ء س

❸ ∫ (٣ س − قا^{٢} س) ء س　　❹ ∫ (جا ٢ س + قا^{٢} ٣ س) ء س

الحل

① ∫ (س^{٢} + جتا س) ء س = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + جا س + ث

② ∫ (٥ جا س + ٣) ء س = −٥ جتا س + ٣ س + ث

③ ∫ (٣ س − قا^{٢} س) ء س = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − طا س + ث

④ ∫ (جا ٢ س + قا^{٢} ٣ س) ء س = − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + $\frac{١}{٣}$ طا ٣ س + ث

مثال ١٠

أوجد:

❶ ∫ جتا ($\frac{س}{٢}$ + ١) ء س　　❷ ∫ جا (٥ س − ٣) ء س

❸ ∫ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) ء س　　❹ ∫ (١ + طا^{٢} س) ء س

الحل

① ∫ جتا ($\frac{س}{٢}$ + ١) ء س = ٢ جا ($\frac{س}{٢}$ + ١) + ث

② ∫ جا (٥ س − ٣) ء س = $\frac{-١}{٥}$ جتا (٥ س − ٣) + ث

③ ∫ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) ء س = ∫ ١ ء س = س + ث

④ ∫ (١ + طا^{٢} س) ء س = ∫ قا^{٢} س ء س = طا س + ث

ملاحظة

١ + طا^{٢} س = قا^{٢} س

١ + ظتا س = قتا^{٢} س



مثال (١١)

أوجد :

(١) $\int (\text{جا } س + \text{جتا } س)^2 \, ء س$ (٢) $\int \frac{\text{جتا } ٢س}{\text{جتا } س + \text{جا } س} \, ء س$

(٣) $\int (\text{جتا}^2 س + \text{جتا } س) \, ء س$ (٤) $\int (\text{قا}^2 \frac{\pi}{٤} + \text{جتا } ٢س \text{ ظا } ٢س) \, ء س$

الحل

(١) $\int (\text{جا } س + \text{جتا } س)^2 \, ء س$

$= \int (\text{جا}^2 س + ٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س + \text{جتا}^2 س) \, ء س$

$= \int (١ + \text{جا } ٢س) \, ء س = س - \frac{١}{٢} \text{جتا } ٢س + ث$

ملاحظة

$٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س = \text{جا } ٢س$

$\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = ١$

(٢) $\int \frac{\text{جتا } ٢س}{\text{جتا } س + \text{جا } س} \, ء س = \int \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جتا } س + \text{جا } س} \, ء س$

$= \int \frac{(\text{جتا } س - \text{جا } س)(\text{جتا } س + \text{جا } س)}{(\text{جتا } س + \text{جا } س)} \, ء س$

$= \int (\text{جتا } س - \text{جا } س) \, ء س = \text{جا } س + \text{جتا } س + ث$

(٣) $\int (\text{جتا}^2 س + \text{جتا } س) \, ء س$

$= \int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا } ٢س + \text{جتا } س\right) \, ء س$

$= \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤} \text{جا } ٢س + \text{جا } س + ث$

ملاحظة

$\text{جتا } ٢س = ١ - ٢ \text{ جا}^2 س$

$\therefore \text{جا}^2 س = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{جتا } ٢س$

$\text{جتا } ٢س = ٢ \text{ جتا}^2 س - ١$

$\therefore \text{جتا}^2 س = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا } ٢س$

(٤) $\int (\text{قا}^2 \frac{\pi}{٤} + \text{جتا } ٢س \text{ ظا } ٢س) \, ء س$

$= \int \left(٢ + \text{جتا } ٢س \times \frac{\text{جا } ٢س}{\text{جتا } ٢س}\right) \, ء س$

$= \int (٢ + \text{جا } ٢س) \, ء س$

$= ٢س - \frac{١}{٢} \text{جتا } ٢س + ث$

ملاحظة

$\text{قا}^2 \frac{\pi}{٤} = \text{قا}^2 ٤٥° = (\sqrt{٢})^2$

$= ٢$ (مقدار ثابت)







تمرين ٧ على التكامل







أولا راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ١٥

$\frac{1}{2}$ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{\cdots\cdots}{10}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) المماس للمنحنى ص = (٣ س − ٥)^{3} عند النقطة (٢ ، ١) يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجب ظلها = ...

[−٩ أ، ٩ أ، ١ أ، صفر]

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = س | س | عند س = ٣ هو ....

[−٦ أ، −٣ أ، ٦ أ، ٩]

(٣) ميل العمودى للمنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى = $\frac{\pi}{6}$ يساوى ....

[$\frac{-1}{\sqrt{3}}$ أ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ أ، −١ أ، ١]

(٤) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

[٩٠١ أ، ٨ أ، ٢ أ، ١٠٩]

---

(٥) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = ٣ س^{2} − ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠

....

....

---

(٦) أوجد معادلة المماس والعمودى على المنحنى ص = (س^{2} + س) (س^{3} + ٥) عند النقطة (−٢ ، −٦)

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المشتقة العكسية للدالة (٢ س − ٣) هي ....

[$س^{٢} - ٣س + ث$ أو $س^{٢} - ٣س$ أو $س^{٢} + ث$ أو $٣س^{٣} - ٢س$]

(٢) المشتقة العكسية للدالة ($٣س^{٢} - ٢س + ٥$) هي ....

[$٣س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س$ أو $٣س^{٣} - س^{٢} + ٥س$ أو $س^{٣} - س^{٢} + ٥س$ أو $س^{٣} - س^{٢} + ٥س + ث$]

(٣) $\int \frac{ءس}{٥} = ...$

[$٥س + ث$ أو $\frac{١}{٥}س + ث$ أو $\frac{١}{٥}س$ أو $\frac{١}{٥}س^{٢} + ث$]

(٤) $\int \frac{-٦}{س^{٤}} ءس = ...$

[$\frac{٢}{س^{٣}} + ث$ أو $\frac{٢}{س^{٣}}$ أو $\frac{-٢}{س^{٣}} + ث$ أو $\frac{٢}{س^{٤}} + ث$]

(٥) $\int \left(\frac{٥}{\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}}{٥}\right) ءس = ...$

[$١٠س^{٢} + \frac{٢}{١٥}س^{\frac{٣}{٢}} + ث$ أو $١٠س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{١٥}س^{\frac{٣}{٢}}$ أو $\frac{٥}{س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{٥}$ أو $\frac{١}{١٠}س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{١٥}س^{\frac{٣}{٢}} + ث$]

(٦) $\int \left(حتا^{٢}\frac{\pi}{٤} + حا ٥س\right) ءس = ...$

[$\frac{١}{٢}س + \frac{١}{٥}حتا ٥س$ أو $\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٥}حتا ٥س + ث$ أو $س - ٥ حتا ٥س$ أو $٢س - ٥ حتا ٥س$]

(٧) $\int \left(٤س - حا\frac{\pi}{٤}\right) ءس = ...$

[$٢س^{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}س$ أو $٢س^{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}س + ث$ أو $س^{٢} - \sqrt{٢} + ث$ أو $س^{٢} - \sqrt{٢}س$]



٨) $\int (س + ٥)^{٣} \, ء س = $ ....

[$(س + ٥)^{٤} + ث$ ، $(س + ٥)^{٣} + ث$ ، $\frac{١}{٤}(س + ٥)^{٤} + ث$ ، $\frac{١}{٤}(س + ٥)^{٤}$]

٩) $\int (س^{٢} - ٢س + ١)^{٥} \, ء س = $ ....

[$\frac{١}{١١}(س - ١)^{١١} + ث$ ، $\frac{١}{١١}(س - ١)^{١١}$ ، $\frac{١}{١٠}(س - ١)^{١١} + ث$ ، $(س - ١)^{١١} + ث$]

١٠) $\int (س + ٢)(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١١} \, ء س = $ ....

[$\frac{١}{٢٤}(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١٢} + ث$ ، $(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١٢} + ث$ ، $\frac{١}{١٢}(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١٢} + ث$ ، $(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١٢}$]

١١) $\int \frac{٨س - ٤}{(٤س^{٢} - ٤س + ١)^{٥}} \, ء س = $ ....

[$\frac{-١}{٤(٢س - ١)^{٨}} + ث$ ، $\frac{١}{٤(٢س - ١)^{٨}} + ث$ ، $\frac{-١}{٤(٢س - ١)^{٨}}$ ، $\frac{-١}{(٢س - ١)^{٨}} + ث$]

١٢) $\int س^{٥}(١ - \frac{١}{س})^{٥} \, ء س = $ ....

[$(س - ١)^{٦} + ث$ ، $\frac{١}{٦}(س - ١)^{٦}$ ، $\frac{١}{٦}(س - ١)^{٦} + ث$ ، $(س - ١)^{٦}$]

١٣) $\int (س - \frac{١}{س})(س + \frac{١}{س})(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) \, ء س = $ ....

[$\frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{-٣} + ث$ ، $\frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{-٣}$ ، $س^{٥} + س^{-٣} + ث$ ، $\frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{-٢} + ث$]

١٤) $\int \frac{(س + ١)^{٢}}{\sqrt{س}} \, ء س = $ ....

[$\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$ ، $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$]





(١٥) $\int \left(\text{جتا س جتا } \frac{\pi}{4} - \text{جا س جا } \frac{\pi}{4}\right)$ ءس = ...

[جتا (س + $\frac{\pi}{4}$) + ث ، − جا (س + $\frac{\pi}{4}$) + ث ، − جتا (س + $\frac{\pi}{4}$) + ث ، جا (س + $\frac{\pi}{4}$) + ث]

(١٦) $\int$ (قا^{2}س − طا^{2}س) ءس = ...

[س + ث ، ١ + ث ، س^2 + ث ، ث]

(١٧) $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{1 + \text{جا س}}$ ءس = ... [س + جا س ، س + جتا س ، س + جتا س + ث ، س − جتا س + ث]

(١٨) $\int \sqrt{1 - \text{جتا}^2\text{س}}$ ءس = ... حيث س ∈]٠ ، π[

[− جتا س + ث ، جتا س + ث ، جا س + ث ، جا س]

(١٩) $\int$ ٢ طا س قا^{2}س ءس = ...

[قا^{2}س + ث ، قا^{2}س ، طا^{2}س ، طا^{2}س + ث]

(٢٠) $\int$ ٢ جا س جتا س ءس = ...

[$\frac{1}{2}$ جتا ٢س + ث ، − $\frac{1}{2}$ جتا ٢س + ث ، $\frac{1}{2}$ جا ٢س ، $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث]

(٢١) $\int \frac{ء}{ءس}$ (س^2 + ٥س) ءس = ...

[س^2 + ٥س + ث ، س^2 + ٥س ، س^2 + ٥ ، ٢س + ٥]

(٢٢) $\int \frac{ء}{ءس}$ (س^2) ءس = ...

[س^2 ، ٢س ، س^2 + ث ، س + ث]

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د (س) = $\int$ جا س ءس فإن د (٠) − د (π) = ...

[٠ ، ٢ ، −٢ ، −١]

(٢) $\int$ جتا^{3}س قا^{2}س ءس = ...

[جا س ، طا س + ث ، جا س + ث ، جا^{3}س طا س + ث]



③ $\int$ جا $\frac{\pi}{2}$ ء س = ...

[جتا $\frac{\pi}{2}$ + ث ، $\frac{-2}{\pi}$ جتا $\frac{\pi}{2}$ + ث ، س + ث ، 1 + ث]

④ $\int$ (جا² س + جتا² س)⁵ ء س = ...

[جا¹⁰ س + جتا¹⁰ س + ث ، 1 + ث ،

س + ث ، جا س + جتا س + ث]

⑤ $\frac{ء}{ء س}$ $\int$ (جا س + جتا س) ء س = ...

[جا س + جتا س + ث ، جا س + جتا س ،

جتا س − جا س ، جتا س − جا س + ث]

⑥ $\int$ (جا س + جتا س) ء س = ...

[جا س − جتا س + ث ، جا س + جتا س ،

جتا س − جا س ، جتا س − جا س + ث]

⑦ $\int$ ٦س⁵ $(1 - \frac{1}{س})^5$ ء س = ...

[(س − 1)⁵ ، (س − 1)⁵ + ث ، (س − 1)⁶ ، (س − 1)⁶ + ث]

⑧ $\int \frac{س - \frac{1}{2}}{\sqrt{2س - 1}}$ ء س = ... + ث

[$\frac{1}{9}\sqrt{2س - 1}$ ، $\frac{1}{9}\sqrt{(2س - 1)^3}$ ،

$\frac{1}{6\sqrt{2س - 1}}$ ، $\frac{1}{2}\sqrt{(2س - 1)^3}$]

⑨ $\int$ س⁴ $\sqrt[5]{\frac{5}{س^4} + \frac{3}{س^5}}$ ء س = ... + ث

[$\frac{1}{9}(5س + 3)^{\frac{1}{5}}$ ، $\frac{1}{9}(5س + 3)^{\frac{6}{5}}$ ،

$\frac{1}{5}(5س + 3)^{\frac{1}{5}}$ ، $\frac{1}{2}(5س + 3)^{\frac{1}{5}}$]

⑩ إذا كانت د (س) = $\int \frac{1}{س}$ ء س فإن د′ (2) = ...

[غير موجود ، $\frac{1}{س}$ + ث ، 2 ، $\frac{1}{2}$]

ثالثًا مسائل المستوى الثاني

٤ أوجد التكاملات الآتية :

① $\int ٩ س^{٢} \, ءس$

② $\int ١٢ س^{-٢} \, ءس$

③ $\int ٥ \sqrt{س^{٣}} \, ءس$

④ $\int \sqrt[٣]{س} \, ءس$

⑤ $\int \frac{-٨}{٥} ف^{-٣} \, ءف$

⑥ $\int ٢ (٣ ع^{٢} - ٥) \, ءع$

⑦ $\int (٤ س^{٢} + ٥ س - ٢) \, ءس$

⑧ $\int \left(٣ \sqrt{س} - \frac{٢}{س^{٢}}\right) ءس$

⑨ $\int (أ س^{٢} + ٥ س + جـ) \, ءس$

⑩ $\int س (س - ٤) \, ءس$

⑪ $\int س^{٢} \left(٣ س - \frac{٥}{س}\right) ءس$

⑫ $\int (س - ٣)(س + ٣) \, ءس$

٥ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\int (س - ٥)(س + ١) \, ءس$

② $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} \, ءس$

③ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس$

④ $\int \left(\frac{٢ س^{٢} + ٣}{س^{٢}}\right) ءس$

⑤ $\int \left(\frac{س^{٦} + ٣ س^{٤} + س^{٢}}{س^{٢}}\right) ءس$

⑥ $\int \left(\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}\right) ءس$

⑦ $\int \left(\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\right) ءس$

⑧ $\int \left(\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}\right) ءس$

⑨ $\int \left(\frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س - ٢}\right) ءس$

⑩ $\int ٦ (س - ٢)^{[illegible]} \, ءس$

⑪ $\int ٣ (س + ٣)^{-٤} \, ءس$

⑫ $\int (٨ - ٣ س)^{٤} \, ءس$

⑬ $\int (٢ ع - ٣)^{\frac{٧}{٣}} \, ءع$

⑭ $\int \frac{١٢}{(٢ س - ٥)^{٤}} \, ءس$

⑮ $\int \frac{٧}{\sqrt{س + ٤}} \, ءس$

⑯ $\int س^{٢} \left(٣ + \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس$

⑰ $\int س^{٦} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} ءس$

⑱ $\int س \sqrt{\frac{٤}{س} - \frac{٥}{س^{٢}}} \, ءس$

⑲ $\int (س - ١)(س^{٢} - ٢س + ١)\, ءس$

⑳ $\int \sqrt{س - ٣}\,(س - ٣)^{٤}\, ءس$

㉑ $\int \frac{(٤س^{٢} - ٤س + ١)^{٧}}{(٢س - ١)^{٢}}\, ءس$

㉒ $\int \frac{س}{(س + ٢)^{٣}}\, ءس$

㉓ $\int س(س + ٢)^{٥}\, ءس$

㉔ $\int \sqrt[٥]{س^{٢} + ٢س + ١}\, ءس$

㉕ $\int (س^{٢} - ٢)^{٢}\, ءس$

㉖ $\int \frac{(٢س + ١)(س - ٢)}{\sqrt{س}}\, ءس$

㉗ $\int س(٣س^{٢} - ٥)^{٣}\, ءس$

㉘ $\int س(٥س^{٢} + ٢)^{-٧}\, ءس$

㉙ $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٤} + ١)^{٦}}\, ءس$

㉚ $\int (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥)\, ءس$

٦ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\int (٥\, جا\, س - ٣\, جتا\, س)\, ءس$

② $\int (جا\, ٢س + ٢\, جتا\, ٥س)\, ءس$

③ $\int (٩\, جتا\, س - قا^{٢}\, ٣س)\, ءس$

④ $\int (٣ + ٤\, قا^{٢}\, س)\, ءس$

⑤ $\int جا\, (٥س - ١)\, ءس$

⑥ $\int جتا\, (٢ - س)\, ءس$

⑦ $\int جا\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right) ءس$

⑧ $\int (جتا^{٢}\, س - جا^{٢}\, س)\, ءس$

⑨ $\int ٢\, جتا^{٢}\, س\, ءس$

⑩ $\int (٤ - جا^{٢}\, س)\, ءس$

⑪ $\int (جا\, س + جتا\, س)^{٢}\, ءس$

⑫ $\int (١ + جتا\, س)^{٢}\, ءس$

⑬ $\int (جتا^{٢}\, س + قا^{٢}\, س)\, ءس$

⑭ $\int (جا\, س\, جتا\, س)\, ءس$

⑮ $\int (جتا\, س + قا\, س)^{٢}\, ءس$

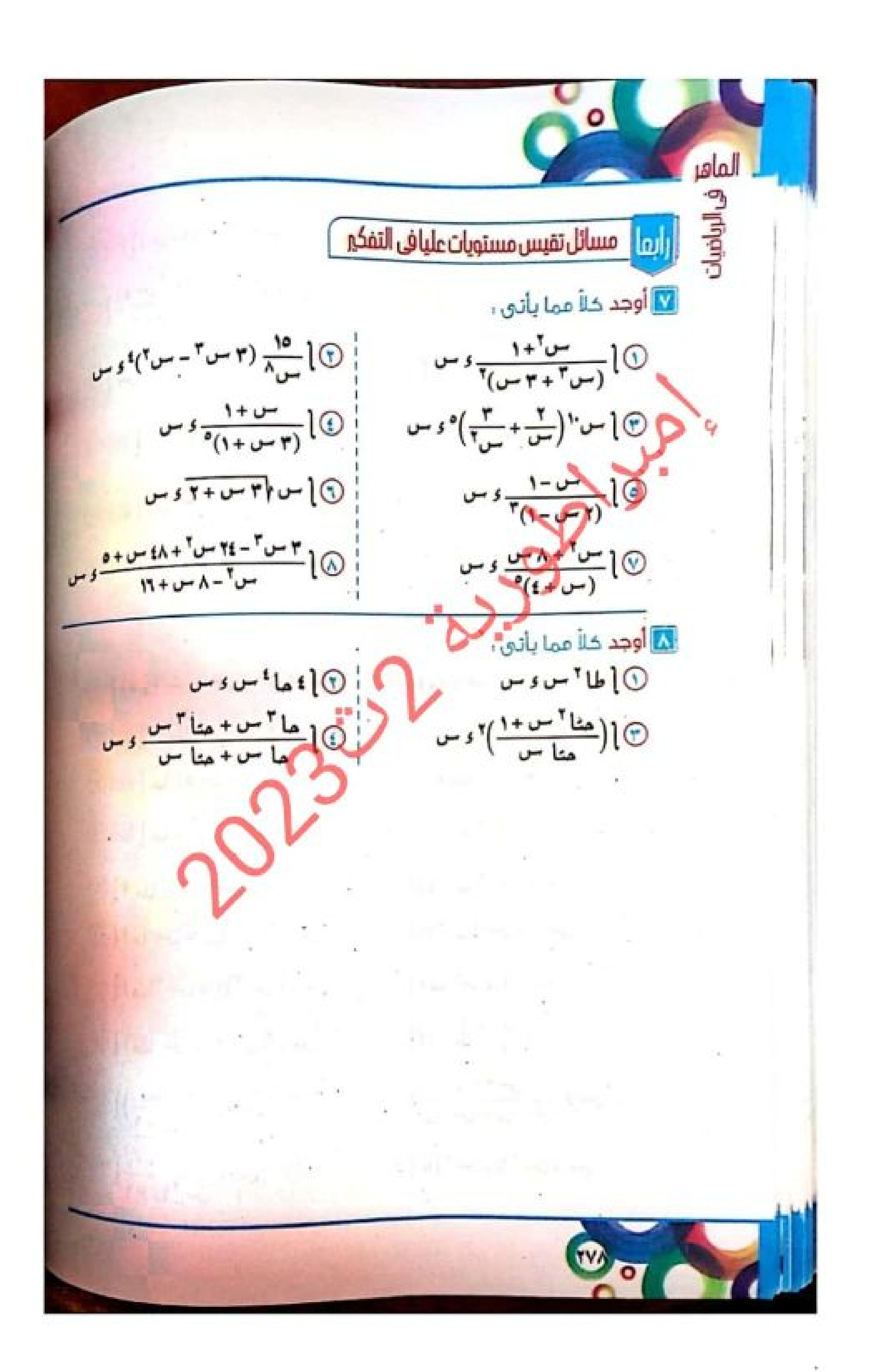
⑯ $\int \left(١ + ظا^{٢}\, \frac{س}{٢}\right) ءس$

⑰ $\int \left(\frac{جتا^{٢}\, س}{١ + جا\, س}\right) ءس$

⑱ $\int \frac{جتا\, ٢س}{جا\, س + جتا\, س}\, ءس$

⑲ $\int \frac{ءس}{١ - جا^{٢}\, س}$

⑳ $\int ظا^{٢}\, س\, قتا^{٢}\, س\, ءس$



رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٧ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\int \frac{س^{٢}+١}{(س^{٣}+٣س)^{٢}}\,ءس$

② $\int \frac{١٥}{س^{٨}}(٣س^{٣}-س^{٢})^{٤}\,ءس$

③ $\int س^{١٠}\left(\frac{٢}{س}+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥}\,ءس$

④ $\int \frac{س+١}{(٣س+١)^{٥}}\,ءس$

⑤ $\int \frac{س-١}{(٢س-١)^{٣}}\,ءس$

⑥ $\int س\sqrt{٣س+٢}\,ءس$

⑦ $\int \frac{س^{٢}+٨س}{(س+٤)^{٥}}\,ءس$

⑧ $\int \frac{٣س^{٣}-٢٤س^{٢}+٤٨س+٥}{س^{٢}-٨س+١٦}\,ءس$

٨ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\int طا^{٢}س\,ءس$

② $\int ٤\,جا^{٤}س\,ءس$

③ $\int \left(\frac{جتا^{٢}س+١}{جتا\,س}\right)^{٢}ءس$

④ $\int \frac{جا^{٣}س+جتا^{٣}س}{جا\,س+جتا\,س}\,ءس$

ثالثًا : حساب المثلثات

الوحدة الرابعة :

- الدرس ① : زوايا الارتفاع والانخفاض
- الدرس ② : الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين
- الدرس ③ : الدوال المثلثية لضعف الزاوية
- الدرس ④ : صيغة هيرون



الوحدة الرابعة

الدرس ١

زوايا الإرتفاع والإنخفاض
(تطبيقات على حل المثلث)

درسنا فى العام السابق زوايا الإرتفاع والإنخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية وأمكن إيجاد إرتفاع المبانى عن سطح الأرض دون أن نقوم بالقياس الفعلى لإرتفاع هذه المبانى وبعد دراستنا لقانونى الجيب وجيب التمام فإنه يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقًا على حل المثلث تشمل زوايا الإرتفاع والإنخفاض بوجه عام وسوف نتذكر فيما يلى مفهوم زاويتى الإرتفاع والإنخفاض.

زاوية الإرتفاع

إذا رصد شخص أ نقطة حـ أعلى من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ تسمى زاوية إرتفاع حـ عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ

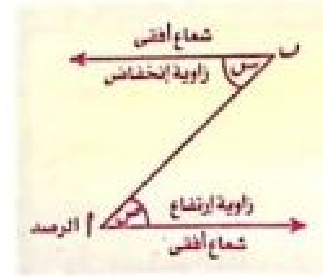
زاوية الإنخفاض

إذا رصد شخص أ نقطة ء أسفل من مستوى نظره الأفقى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن الزاوية بين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ تسمى زاوية إنخفاض ء عن المستوى الأفقى لنظر الشخص أ



لاحظ أن

إذا كان ص هو قياس زاوية إرتفاع ب بالنسبة إلى أ وكان س هو قياس زاوية إنخفاض أ بالنسبة إلى ب فإن س = ص وذلك لأنهما متبادلتان

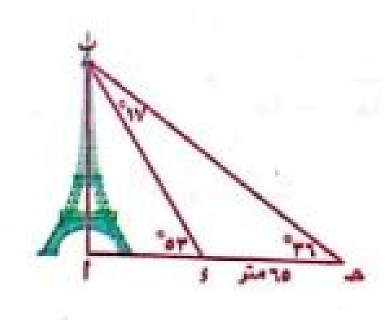


مثال (١)

من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٣٦° ثم سار الراصد مسافة ٦٥ مترًا فى خط مستقيم أفقى نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٥٣° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر.

الحل

بفرض أن أ ب هو إرتفاع البرج ، ق (∠ هـ ب ء) = ٥٣° - ٣٦° = ١٧°



فى △ هـ ء ب : $\frac{٦٥}{\text{حا } ١٧°} = \frac{\text{ء ب}}{\text{حا } ٣٦°}$

∴ ء ب = $\frac{٦٥ \text{ حا } ٣٦°}{\text{حا } ١٧°}$ = ١٣٠٫٦٨ متر

فى △ أ ب ء : $\frac{\text{أ ب}}{\text{حا } ٥٣°} = \frac{\text{ء ب}}{\text{حا } ٩٠°}$

∴ أ ب = ١٣٠٫٦٨ حا ٥٣° ≃ ١٠٤ متر

ملاحظة

عند حل المسألة إذا كان الشكل يحتوى على مثلثين فإننا نبدأ الحل من المثلث المعلوم طول أحد أضلاعه.



مثال (٢)

من طائرة هليكوبتر ثابتة على إرتفاع ١٠٠ متر من سطح الأرض قيست زاويتي إنخفاض سيارتين أ ، ب على سطح الأرض فكانتا ٤٥° ، ٣٠° أوجد لأقرب متر المسافة بين مقدمتي السيارتين. علمًا بأن الطائرة والسيارتين أ ، ب في مستوى رأسي واحد وأن مسقط الطائرة في مستوى سطح الأرض ∉ $\overline{أب}$

الحل



بفرض أن إرتفاع الطائرة هو جـ ء

في △ أ ء جـ : $\frac{أجـ}{جا ٩٠°} = \frac{١٠٠}{جا ٤٥°}$

∴ $أجـ = \frac{١٠٠ جا ٩٠°}{جا ٤٥°} = ١٤١٫٤٢$ متر

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ١٨٠° − (١٣٥° + ٣٠°) = ١٥°

في △ أ ب جـ : $\frac{أجـ}{جا ب} = \frac{أب}{جا جـ}$

∴ $\frac{١٤١٫٤٢}{جا ٣٠°} = \frac{أب}{جا ١٥°}$

∴ $أب = \frac{١٤١٫٤٢ \times جا ١٥°}{جا ٣٠°} \simeq ٧٣$ متر



برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة من نقطة على سطح الأرض في المستوى الأفقي المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٧٦°، ٤٦° على الترتيب **أوجد** ارتفاع الصخرة لأقرب متر.

الحل



ق(∠أ ء ب) = ٧٦° − ٤٦° = ٣٠°

ق(∠أ) = ٩٠° − ٧٦° = ١٤°

في المثلث أ ب ء: $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } 14^\circ} = \frac{100}{\text{جا } 30^\circ}$

$\text{ب ء} = \frac{100 \text{ جا } 14^\circ}{\text{جا } 30^\circ}$ ← (١)

في المثلث ب هـ ء: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } 46^\circ} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا } 90^\circ}$

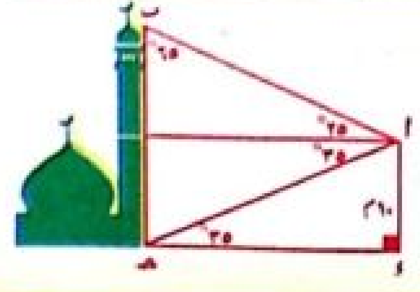
ب هـ = ب ء جا ٤٦° ← (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ينتج أن: $\text{ب هـ} = \frac{100 \text{ جا } 14^\circ}{\text{جا } 30^\circ} \times \text{جا } 46^\circ \simeq 35$ متر

مثال (٤)

من سطح مبنى يرتفع ١٠ متر عن سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع قمة مئذنة فكانت ٢٥° وقيست زاوية انخفاض قاعدة المئذنة فكانت ٣٥° **أوجد** ارتفاع المئذنة علمًا بأن قاعدة المئذنة والمبنى على مستوى أفقي واحد.

الحل



في △ أ هـ ء: ق(∠هـ) = ٣٥°

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا ء}}$

$$\therefore \frac{\text{١٠}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ٩٠°}}$$

$$\therefore \text{أ حـ} = \frac{\text{١٠ جا ٩٠°}}{\text{جا ٣٥°}} = \text{١٧,٤٣ متر}$$

$$\text{ق (∠ حـ ب أ)} = \text{١٨٠°} - (\text{٩٠°} + \text{٢٥°}) = \text{٦٥°}$$

$$\text{في } \Delta \text{ أ ب حـ}: \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ب}}$$

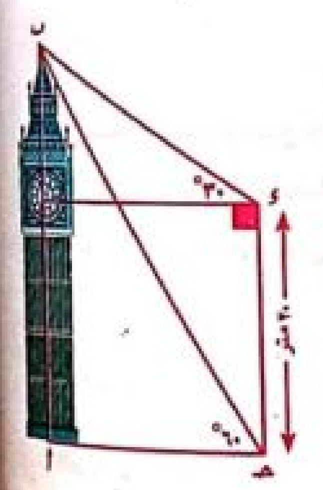
$$\therefore \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{١٧,٤٣}}{\text{جا ٦٥°}} \qquad \therefore \text{ب حـ} = \frac{\text{١٧,٤٣ جا ٦٠°}}{\text{جا ٦٥°}} = \text{١٦,٦٦ متر}$$

مثال

من نقطة على سطح الأرض وجد أن زاوية إرتفاع قمة برج هى ٦٠° ومن نقطة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار ٢٠ متر وتعلوا الأولى مباشرة وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٣٠° أوجد إرتفاع البرج إلى أقرب متر.

الحل

بفرض أن أ ب إرتفاع البرج



$$\text{في } \Delta \text{ ب ء حـ}: \text{ق (∠ حـ ء ب)} = \text{٩٠°} + \text{٣٠°} = \text{١٢٠°}$$

$$\therefore \text{ق (∠ ء حـ ب)} = \text{٣٠°}، \text{ق (∠ ء ب حـ)} = \text{٣٠°}$$

$$\therefore \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ١٢٠°}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٣٠°}}$$

$$\therefore \text{ب حـ} = \frac{\text{٢٠ جا ١٢٠°}}{\text{جا ٣٠°}} = \text{٣٤,٦٤ متر}$$

$$\text{في } \Delta \text{ أ ب حـ}: \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ٩٠°}}$$

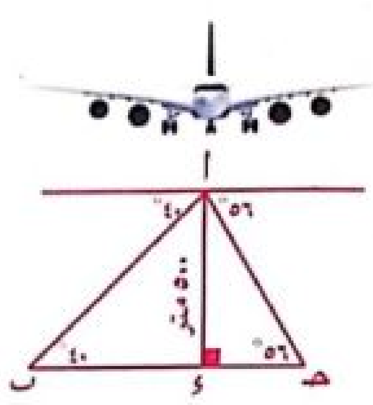
$$\therefore \text{أ ب} = \text{٣٤,٦٤ جا ٦٠°} \simeq \text{٣٠ متر}$$



مثال ٦

شاهد طيار محطتين للرصد على أرض أفقية وهو على إرتفاع ٥٠٠ متر فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضهما ٤٠° ، ٥٦° على الترتيب فإذا كانت الطائرة والمحطتين فى مستوى رأسى واحد وكان مسقط الطائرة يقع على الخط المستقيم الواصل بين المحطتين فأحسب المسافة بين المحطتين لأقرب متر .

الحل



بفرض أن أ موضع الطيار ، ب ، حـ موقع محطتى الرصد

ق ($\angle$ ب أ ء) = ٥٠° ، ق ($\angle$ حـ أ ء) = ٣٤°

فى $\triangle$ أ ب ء : $\frac{٥٠٠}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٥٠°}$

$\therefore$ ب ء = $\frac{٥٠٠ \text{ جا } ٥٠°}{\text{جا } ٤٠°}$ = ٥٩٥٫٨٨ متر

فى $\triangle$ أ حـ ء : $\frac{٥٠٠}{\text{جا } ٥٦°} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{جا } ٣٤°}$ $\therefore$ ء حـ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا } ٣٤°}{\text{جا } ٥٦°}$ = ٣٣٧٫٢٥ متر

$\therefore$ ب ء + ء حـ = ٥٩٥٫٨٨ + ٣٣٧٫٢٥ = ٩٣٣٫١٣

$\therefore$ المسافة بين محطتى الرصد لأقرب متر = ٩٣٣ متر

ملاحظات

١ فى المسائل التى تتعامل مع الإتجاهات الأصلية والفرعية يفضل رسم الإتجاهات الأصلية عند موضع نقطة الرصد ويحدد إتجاه الشئ المرصود بالنسبة لهذه النقطة ويلاحظ أن إتجاه الشمال الشرقى مثلاً يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع كل من الشرق والشمال.

٢ أما إتجاه ٦٠° غرب الشمال مثلاً فإنه يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الشمال من جهة الغرب ويكون إتجاه الشمال هو أحد ضلعى الزاوية ، ونلاحظ أن أ تقع شرق و ، ب تقع جنوب و



مثال ٧

تسير سفينة بسرعة ١٥ كم/ساعة فى إتجاه شرق الجنوب بزاوية قياسها ٦٠° رصد أحد ركابها هدف ثابت فى إتجاه الشمال الشرقى وبعد ساعتين وجد الراكب أن الهدف أصبح فى إتجاه ١٢° غرب الشمال أحسب بعد الهدف عن السفينة فى هذه اللحظة لأقرب كم.

الحل

بفرض أن الوضع الأول للسفينة هو أ

والوضع الثانى للسفينة هو ب وموقع الهدف جـ

∵ المسافة التى قطعتها السفينة فى ساعتين = ١٥ × ٢ = ٣٠ كم

ق (∠ب أ جـ) = ٤٥° + ٣٠° = ٧٥°،

ق (∠جـ ب أ) = ٩٠° − (١٢° + ٣٠°) = ٤٨°

ق (∠جـ) = ١٨٠° − (٧٥° + ٤٨°) = ٥٧°

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}}$ ∴ $\frac{٣٠}{\text{جا } ٥٧°} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٧٥°}$

∴ ب جـ = $\frac{٣٠ \text{ جا } ٧٥°}{\text{جا } ٥٧°}$ = ٣٤,٥٥ كم

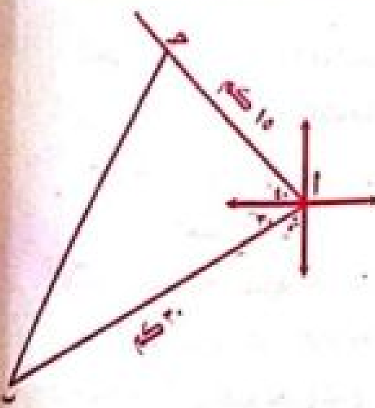
∴ بُعد السفينة عن الهدف لأقرب كم = ٣٥ كم



مثال ٨

تحركت سفينة من نقطة معينة فى إتجاه ٦٠° غرب الجنوب بسرعة ١٠كم/ساعة، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان فى إتجاه ٤٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم/ساعة أوجد البُعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات

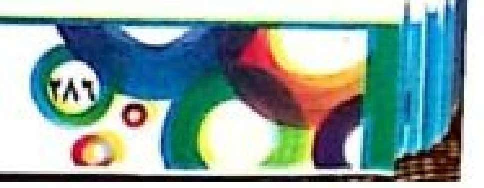
الحل



بفرض أن النقطة التى تحركت منها السفينة هى أ وتحركت إلى ب والسفينة الأخرى تحركت إلى جـ

∴ المسافة التى قطعتها السفينة الأولى فى ٣ ساعات = ١٠ × ٣ = ٣٠ كم

والمسافة التى قطعتها السفينة الثانية فى



٣ ساعات = ٥ × ٢ = ١٥ كم

ق (∠ جـ أ ب) = ٤٠° + ٣٠° = ٧٠°

∴ (ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} − ٢ أ ب × أ جـ × جتا ٧٠°

= (٣٠)^{٢} + (١٥)^{٢} − ٢ × ٣٠ × ١٥ × جتا ٧٠° = ٨١٧٫١٨٢

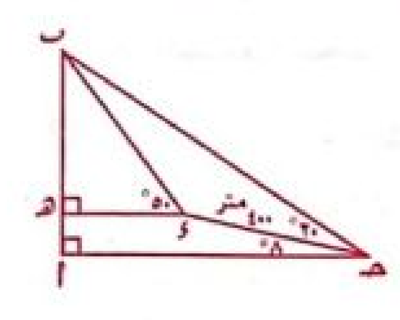
∴ ب جـ = ٢٨٫٥٩ كم

∴ البُعد بين السفينتين = ٢٨٫٥٩ كم

مثال ٩

رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية إرتفاع قمة التل فوجدها ٢٨° ثم تحرك الراصد جهة التل على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٨° مسافة ٤٠٠ متر ورصد قمة التل مرة أخرى فوجد أن قياس زاوية إرتفاعها ٥٠° أحسب إرتفاع التل لأقرب متر

الحـــل



بفرض أن أ ب إرتفاع التل وأن جـ ، ء نقطتا الرصد

∵ ق (∠ هـ ب ء) = ٤٠° ، ق (∠ أ ب جـ) = ٦٢°

∴ ق (∠ ء ب جـ) = ق (∠ أ ب جـ) − ق (∠ هـ ب ء)

= ٦٢° − ٤٠° = ٢٢°

ق (∠ ب ء جـ) = ١٣٨°

فى △ ب ء جـ : $\frac{\text{٤٠٠}}{\text{جا ٢٢°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ١٣٨°}}$

∴ ب جـ = $\frac{\text{٤٠٠ جا ١٣٨°}}{\text{جا ٢٢°}}$ = ٧١٤٫٤٩ متر

فى △ أ ب جـ : $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٢٨°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٩٠°}}$

∴ أ ب = ٧١٤٫٤٩ جا ٢٨° = ٣٣٥ متر

تمرين ١ على زوايا الإرتفاع والإنخفاض

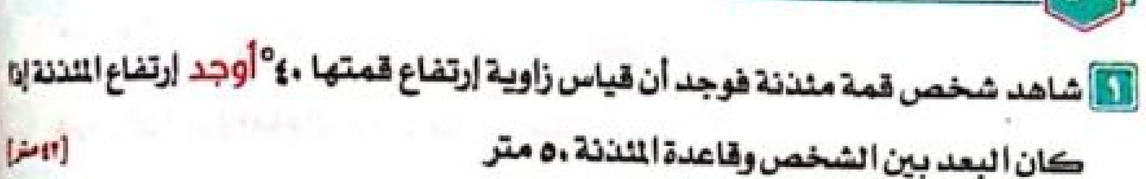
أولا راجع معنا وأختبر نفسك

عزيزى الطالب

فى هذا المكان من كل تمرين ستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق فى صورة إختبار تراكمى على ما سبق دراسته يتم الإجابة فى نفس الورقة قبل أن تدخل فى الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست بإستمرار ولا تنساه ويجعلك فى مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك فى تواصل مع ما درست وأيضًا يعودك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

ثانيا مسائل المستوى الأول

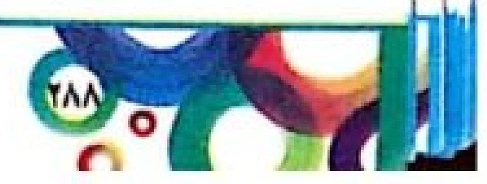


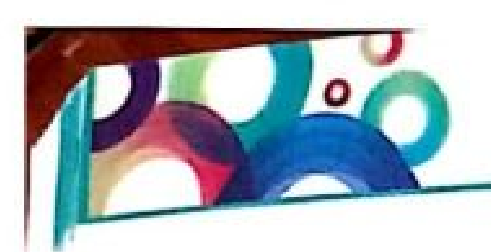
١ شاهد شخص قمة مئذنة فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمتها ٤٠° **أوجد** إرتفاع المئذنة إذا كان البعد بين الشخص وقاعدة المئذنة ٥٠ متر [٤٢ متر]

٢ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٣٤° ثم سار الراصد مسافة ٦٢ مترًا فى خط مستقيم أفقى نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٥١° **أوجد** إرتفاع البرج لأقرب متر. [٩٢ متر]

٣ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الراصد فى خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٣٠َ ٥٢° **أوجد** إرتفاع البرج لأقرب متر [٤١ متر]

٤ من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٤٢° ولما سار مبتعدًا عن قاعدة البرج فى طريق أفقى مسافة ٥٠ متر وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٣٠َ ٢٠° **أوجد** إرتفاع البرج لأقرب متر. [٣٢ متر]





ثالثا مسائل المستوى الثانى

٥ من قمة تل رصد رجل قياس زاويتى إنخفاض قمة برج وقاعدته فكانتا ٢٢° ، ٣٠° على الترتيب فإذا كان إرتفاع البرج ٥٠ مترًا فأوجد إرتفاع التل لأقرب متر علمًا بان قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد. [١٦٧ متر]

---

٦ من قمة تل وجد راصد أن قياس زاويتى إنخفاض قمة برج وقاعدته هما ١٥° ، ٢٦° على الترتيب فإذا كان إرتفاع البرج ٢٠ متر فأحسب إرتفاع التل لأقرب متر علمًا بان قاعدتى التل والبرج فى مستوى أفقى واحد. [٤٤ متر]

---

٧ من قمة برج إرتفاعه ٦٥ مترًا قيست زوايتا إنخفاض النقطتين أ ، ب على الأرض فكانتا ٣٢° ، ١٢َ ٢١° على الترتيب ، فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ ∈ $\overline{ب ء}$ فأحسب طول $\overline{أ ب}$ لأقرب متر [٦٤ متر]

---

٨ برج إرتفاعه ٧٠ متر مقام على صخرة ، من نقطة على سطح الأرض فى المستوى الأفقى المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا إرتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٦٥° ، ٣٣° على الترتيب أوجد إرتفاع الصخرة لأقرب متر. [٣٠ متر]

---

٩ منارة إرتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر قيست زاويتا إرتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدتا ٧٠° ، ٤٠° على الترتيب أوجد إرتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر . [٢٧ متر]

---

١٠ من قمة برج إرتفاعه ٨٥ متر رصدت زاوية إرتفاع قمة جبل وجدت ١٠َ ٢٦° ثم رصدت قمة الجبل من قاعدة البرج فوجدت ٢٠َ ٥٢° أحسب إرتفاع الجبل لأقرب متر. [١٣٧ متر]

---

١١ قيست زاوية إرتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدته فوجد أن قياسها ٣٠° ، كم مترًا يجب أن ترتفع قمة البرج حتى يصبح قياس زاوية إرتفاعها من نفس النقطة يساوى ٤٥° [٤٢.٣ متر]

---

١٢ قارب بخارى يتحرك فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠٠ متر/دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية إرتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها ٣٥° وبعد دقيقتين ومن نفس القارب تم رصد زاوية الإرتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها ٦٠° أحسب إرتفاع الصخرة لأقرب متر . [٧٠.٥ متر]

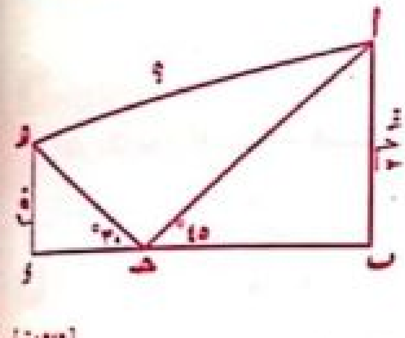


١٣ من قمة منزل إرتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية إرتفاع قمة برج ٦٧° ، قياس زاوية إنخفاض قاعدة البرج ٣٥° **أوجد** إرتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدة البرج وقاعدة المنزل فى مستو أفقى واحد.
[illegible]

١٤ من قمة جبل إرتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة فوجد أن قياسها ٣٧′ ٤٢° **أوجد** إرتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا علمًا بأنهما مقامين على أرض أفقية واحدة.
[illegible]

١٥ رصد قائد طائرة عمودية هدفًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه فى لحظة ما ٣٠° ولما هبط قائد الطائرة رأسيًا مسافة ٣ كيلو متر وجد أن قياس زاوية إنخفاض الهدف أصبحت ٢٠° **أوجد** إرتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف. [illegible]

١٦ في الشكل المقابل :



بالونان أ ، هـ إرتفاعهما ١٠٠ $\sqrt{٢}$ ، ٥٠ مترًا رصد جسم على الأرض (هـ) يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى إنخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب **أوجد** البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر.
[illegible]

١٧ المسافة الأفقية بين برجين ٥٠ متر وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما تشاهد من قمة الثانى ٢٠° فإذا كان إرتفاع البرج الثانى ١٠٠ متر **فأوجد** إرتفاع البرج الأول (علمًا بأن البرجين يقعان فى مستوى أفقى واحد)
[illegible]

١٨ من قاعدة فنار إرتفاعه ٣٠ متر قيست زاوية إرتفاع قمة مبنى فكانت ٣٨° ومن قمة الفنار قيست زاوية إنخفاض قمة المبنى نفسه فكانت ٢٩° **أوجد** لأقرب متر إرتفاع المبنى (علمًا بأن قاعدتى المبنى والفنار فى مستوى أفقى واحد)
[illegible]

١٩ من نقطة ما على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة شجرة تساوى ٥٠° ومن نقطة أخرى على إرتفاع ٤٥ مترًا من النقطة السابقة وفوقها تمامًا وجد أن قياس زاوية إنخفاض قمة الشجرة تساوى ٣٠° **أوجد** إرتفاع الشجرة لأقرب متر.
[illegible]

٢٠ من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية إرتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° وبعد ثلاث دقائق أعيد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية إرتفاع المنطاد أصبحت ١٥°

أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر

[١٣٩ متر]

٢١ من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى إتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى إتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة جـ وجد أن نقطة ب فى إتجاه ٤٦° شمال الشرق.

أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، جـ فى مستوى أفقى واحد.

[١٦٨ متر]

٢٢ سفينة تتحرك فى إتجاه الشمال الشرقى شوهد منها هدف يقع فى جهة الشرق وبعد أن قطعت السفينة ١٢ كم لوحظ أن الهدف أصبح فى إتجاه ٣٠° شرق الجنوب

أوجد بعد الهدف عن السفينة فى تلك اللحظة.

[٩,٠٨ كم]

٢٣ ثلاث مدن أ ، ب ، جـ فى مستوى أفقى واحد حيث البعد بين أ ، ب يساوى ٦٠ كيلومتر ب تقع فى إتجاه يصنع زاوية قياسها ٢٥° شمال الشرق من أ والبعد بين ب ، جـ يساوى ٨٠ كم ، جـ تقع فى إتجاه يصنع زاوية قياسها ٦٠° شمال الغرب من ب

أوجد البعد بين المدينتين أ ، جـ

[٩٥,٧٣ كم]

٢٤ ثلاث قرى أ ، ب ، جـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أ ب = ٢٠ كم وتقع القرية جـ فى إتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية أ ، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب

أوجد المسافة بين القريتين ب ، جـ لأقرب كيلو متر

[١٤ كم]

٢٥ تحركت سفينة من نقطة فى إتجاه ٥٠° شرق الجنوب بسرعة ٨ كم/ساعة ، فى نفس اللحظة ومن نفس النقطة تحركت سفينة أخرى فى إتجاه ٦٠° شمال الشرق بسرعة ٤ كم/ساعة

أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين.

[١٩,٠٩ كم]

٢٦ تحركت سفينة من نقطة معينة فى إتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلو متر/ساعة وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى إتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلو متر /ساعة أوجد المسافة بين السفينتين بعد مضى ساعتين من لحظة تحركهما معًا.

[٢٣,٥٣ كم]





٢٧ تحركت سفينة من نقطة معينة فى إتجاه ٢٥َ ٦٨° غرب الجنوب بسرعة مقدارها ١٥ كم / س وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى إتجاه ٤٨َ ٥٣° شمال الغرب بسرعة ٨ كم / س **أوجد** المسافة بين السفينتين بعد ٣ ساعات مقربًا لأقرب رقمين عشريين. [٥,٢١ كم]

٢٨ تحرك شخصان من نفس النقطة وفى نفس الوقت الأول فى إتجاه ٤٠° غرب الشمال بسرعة ٣٢ مترًا / دقيقة والثانى فى إتجاه ٧٠° جنوب الغرب بسرعة ٣٨ متر / دقيقة **أوجد** لأقرب متر المسافة بينهما بعد ٥ دقائق [٢٠٣ م]

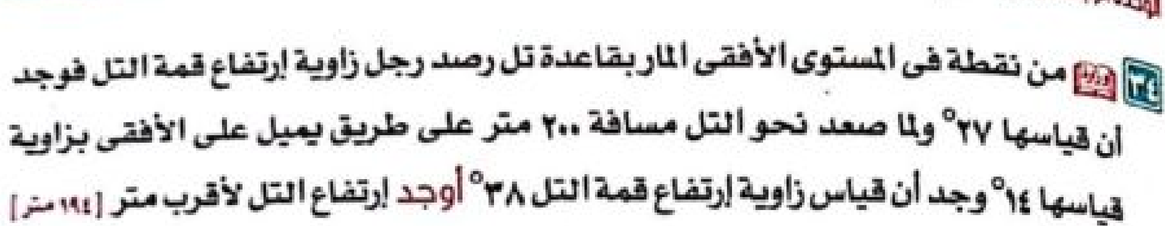
٢٩ تسير سفينة بسرعة ٢٤ كم / ساعة فى إتجاه الجنوب رصد راكب منها هدفًا ثابتًا فى إتجاه ٦٥° شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة فى إتجاه ٧٩° جنوب غرب نفس الهدف **أوجد** بعد الهدف عن السفينة عندئذ [١,٨٣ كم]

٣٠ رُصدت طائرة هـ من المحطتين أ ، ب عند لحظة مرورها بالمستوى الرأسى المار بالمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ ب = ٣٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية إرتفاعها من أ هو ٢١َ ٥٣° وقياس زاوية إرتفاعها من ب هو ٢٦َ ٣٤° والمسقط الرأسى للطائرة ∋ $\overline{أب}$ **أوجد** إرتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر. [١٣٦٢ م]

٣١ رصدت سفينة فى عرض البحر منارة فوجد أنها تقع على بعد ٥٠ كم نحو الشرق ثم تحركت السفينة فى إتجاه شمال الشرق وبعد ساعتين وجدت أن المنارة أصبحت تقع فى إتجاه ٥٠° جنوب الشرق لها **أحسب** سرعة السفينة [١٩,٢٢ كم/س]

٣٢ تسير سفينة نحو الشمال الشرقى بسرعة منتظمة مقدارها ٢٨ كم / س شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى إتجاه ٣٧° غرب الشمال وبعد ٣ ساعات وجد هذا الراكب أن أحدى هاتين النقطتين أصبحت فى إتجاه ٢٤° جنوب الغرب بالنسبة له والأخرى فى إتجاه ١٩° شمال الغرب بالنسبة له **أوجد** البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد [٤٠ كم]

٣٣ رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية إرتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٤° ولما صعد نحو التل مسافة ٤٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٥° وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة التل ٣٦° **أوجد** إرتفاع التل لأقرب متر [٢٨٠ متر]



٣٤ من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل رصد رجل زاوية إرتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٧° ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٤° وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة التل ٣٨° أوجد إرتفاع التل لأقرب متر [١٩٤ متر]



رابعا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٥ من قمة برج إرتفاعه ٥٠ مترًا قاس شخص زاوية انخفاض هدف ما فوجدها ٧٥° ثم قاس زاوية انخفاض نفس الهدف من قمة منزل إرتفاعه ١٢ متر فكانت ٢٥° فإذا كان الهدف يقع على الخط الأفقى المار بين قاعدتى البرج والمنزل فأوجد المسافة بين قمتى البرج والمنزل وأيضًا المسافة بين قاعدتيهما. [٥٤،٠٥٤ ، ٣٩،١٣ متر]

---

٣٦ سفينة تسير بسرعة منتظمة ١٢ كم / ساعة فى إتجاه ٣٠° شرق الشمال شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى إتجاه الشمال الغربى وبعد ٣ ساعات وجد الراكب أن إحدى النقطتين أصبحت فى إتجاه ٣٥° جنوب الغرب والأخرى أصبحت فى إتجاه ١٥° شمال الغرب
أوجد البعد بين النقطتين علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد [٥٤،١ كم]

---

٣٧ شاهد طيار هدفًا وهو على إرتفاع ١٠٠٠ متر عن سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ١٨َ ٤٦° وبعد ثلاث دقائق من الطيران علي نفس الإرتفاع متجهًا نحو الهدف وجد أن قياس زاوية إنخفاض الهدف أصبحت ٣٦َ ٨٢°
فما سرعة الطيار بالمتر / دقيقة [٢٧٥،٢٥ متر / دقيقة]

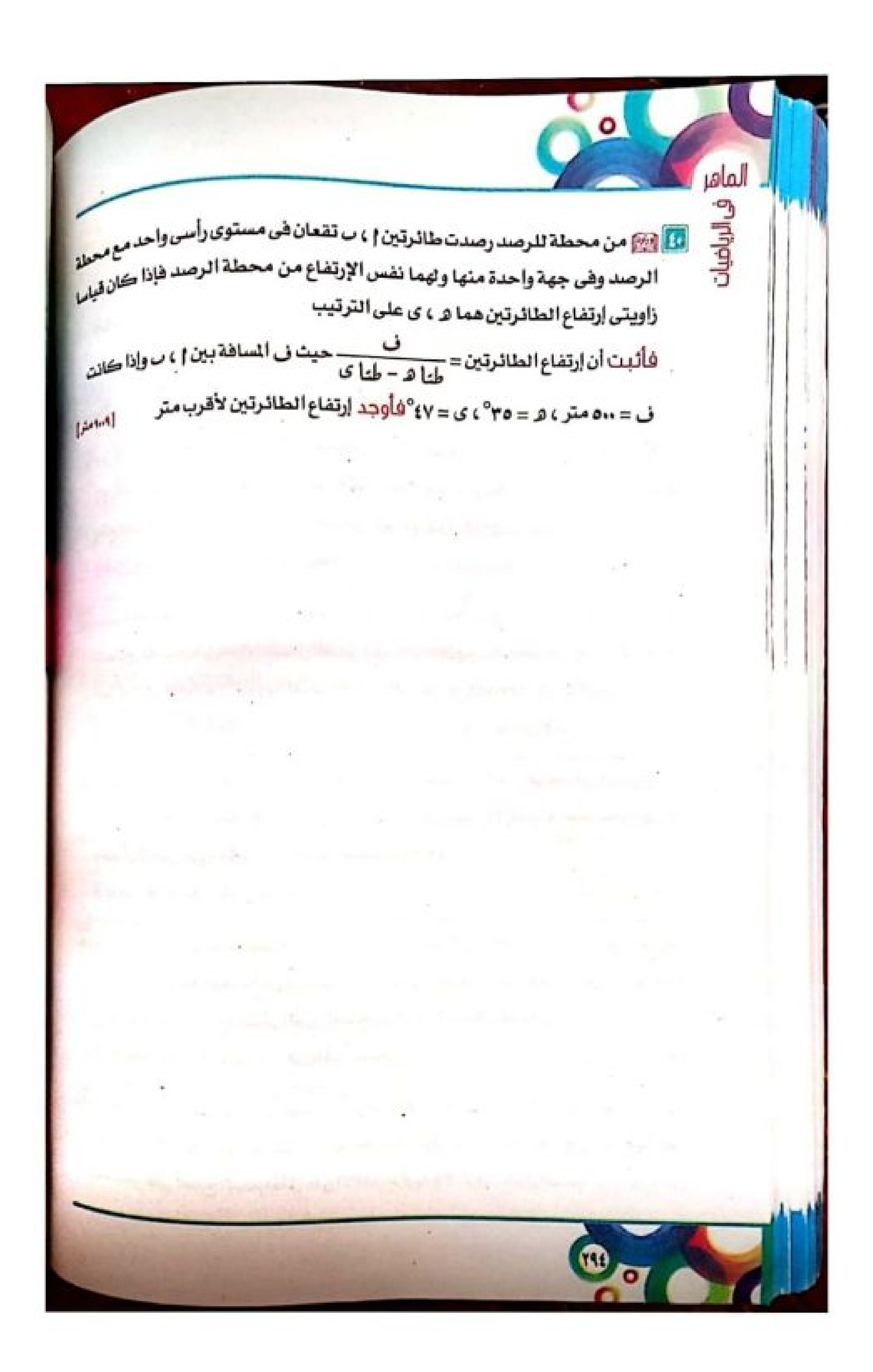
---

٣٨ سفينة تسير بسرعة منتظمة قدرها ٢٥ كم / ساعة فى إتجاه ٢٧ شمال الغرب شوهد فيها عند الساعة العاشرة صباحًا فنار فى إتجاه ٢٠° شرق الشمال وعند الساعة الواحدة ظهرًا من نفس اليوم وجد أن الفنار أصبح فى إتجاه الشمال الشرقى
أوجد بُعد الفنار عن السفينة فى تلك اللحظة. [١٧٦،١٤ كم]

---

٣٩ يرتكز سلم $\overline{أ ب}$ بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية بحيث كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فإذا تحرك الطرف ب للسلم مسافة ١،٥ متر بعيدًا عن الحائط حتى أصبح السلم يميل على الأفقى بزاوية ٣٥° أوجد طول السلم [٤،٧ متر]





٤٠ من محطة للرصد رصدت طائرتين أ ، ب تقعان فى مستوى رأسى واحد مع محطة الرصد وفى جهة واحدة منها ولهما نفس الإرتفاع من محطة الرصد فإذا كان قياسا زاويتى إرتفاع الطائرتين هما هـ ، ى على الترتيب

فأثبت أن إرتفاع الطائرتين = $\frac{ف}{ظتا هـ - ظتا ى}$ حيث ف المسافة بين أ ، ب وإذا كانت

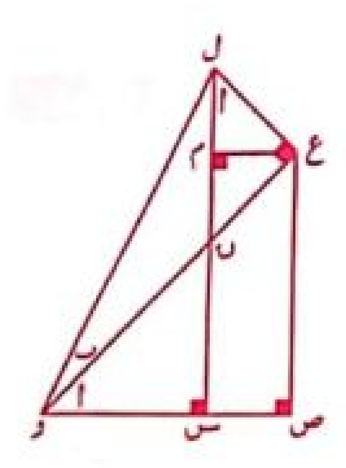
ف = ٥٠٠ متر ، هـ = ٣٥° ، ى = ٤٧° **فأوجد** إرتفاع الطائرتين لأقرب متر

[١٠٠٩ متر]

الدرس ٢

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

فى الشكل المقابل



(لاحظ أن: ع ص = م س)

فإننا نلاحظ أن:

ق(∠أ) = ق(∠ع ل م)

جا (أ + ب) = $\frac{\text{ل س}}{\text{ل و}} = \frac{\text{م س}}{\text{ل و}} + \frac{\text{ل م}}{\text{ل و}}$

$= \frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}} + \frac{\text{ل م}}{\text{ل و}}$

$= \frac{\text{ع ص}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ع و}}{\text{ع و}} + \frac{\text{ل م}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل ع}}{\text{ل ع}}$

$= \frac{\text{ع ص}}{\text{ع و}} \times \frac{\text{ع و}}{\text{ل و}} + \frac{\text{ل م}}{\text{ل ع}} \times \frac{\text{ل ع}}{\text{ل و}}$

= جا أ × جتا ب + جتا أ × جا ب

فيكون: **جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب** (البرهان لايمتحن فيه الطالب)

وبوضع (− ب) بدلاً من ب ينتج أن:

جا [أ + (− ب)] = جا أ جتا (− ب) + جتا أ جا (− ب)



وحيث أن: $جا(-ب) = -جا ب$ ، $جتا(-ب) = جتا ب$

فيكون: $جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب$

وباستخدام نفس الشكل يمكن إثبات أن: $جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب$

ونستنتج أيضًا أن: $جتا(أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب$

وحيث أن: $ظا(أ + ب) = \frac{جا(أ + ب)}{جتا(أ + ب)} = \frac{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب ≠ ٠، يكون:

$ظا(أ + ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$ وعند وضع (−ب) بدلاً من ب فإن:

$ظا(أ - ب) = \frac{ظا أ - ظا ب}{١ + ظا أ ظا ب}$ حيث أ، ب $\neq \frac{\pi}{٢}(٢ن + ١)$ ، ن ∈ ص

ملاحظة

فى أى مثلث أ ب حـ :

$جا(أ + ب) = جا حـ$ ، $جتا(أ + ب) = -جتا حـ$ ، $ظا(أ + ب) = -ظا حـ$

مثال ١

إذا كان أ ، ب قياسًا زاويتين وكان $جا أ = \frac{٤}{٥}$ حيث $٠ < أ < \frac{\pi}{٢}$ ، $جتا ب = \frac{٥}{١٣}$

حيث $\frac{٣\pi}{٢} < ب < ٢\pi$ فأوجد قيمة: $جا(أ + ب)$ ، $جتا(أ + ب)$

الحل

∵ $٠ < أ < \frac{\pi}{٢}$ ∴ أ قياس زاوية تقع فى الربع الأول

∵ $جا أ = \frac{٤}{٥}$ ∴ $جتا أ = \frac{٣}{٥}$

$\because \frac{3\pi}{2} < ب < 2\pi$ $\therefore$ ب قياس زاوية تقع فى الربع الرابع

$\because$ جتا ب $= \frac{5}{13}$ $\therefore$ جا ب $= \frac{-12}{13}$

$\therefore$ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13}$

$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = \frac{-16}{65}$

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13}$

$= \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$

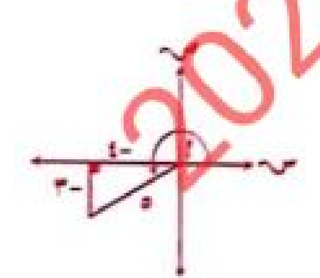
مثال (٢)

إذا كان ٥ جا أ + ٣ = ٠ حيث أ $\in]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$

وكان ٢٥ جتا ب − ٧ = ٠ حيث ب $\in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$

فأوجد قيمة كل من جا (أ + ب) ، قا (أ + ب) ، ظا (أ − ب)

الحل



$\because$ ٥ جا أ + ٣ = ٠ $\therefore$ ٥ جا أ = −٣

$\therefore$ جا أ $= \frac{-3}{5}$

$\because$ أ $\in]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$ $\therefore$ أ تقع فى الربع الثالث

$\therefore$ جتا أ $= \frac{-4}{5}$ ، ظا أ $= \frac{3}{4}$



$\because$ ٢٥ جتا ب − ٧ = ٠ $\therefore$ جتا ب $= \frac{7}{25}$

$\because$ ب $\in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$ $\therefore$ ب تقع فى الربع الرابع

∴ جا ب $= \frac{-٢٤}{٢٥}$ ، طا ب $= \frac{-٢٤}{٧}$

∵ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

∴ جا (أ + ب) $= \frac{-٣}{٥} \times \frac{٧}{٢٥} + \left(\frac{-٤}{٥}\right) \times \left(\frac{-٢٤}{٢٥}\right) = \frac{-٢١}{١٢٥} + \frac{٩٦}{١٢٥} = \frac{٧٥}{١٢٥} = \frac{٣}{٥}$

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب $= \frac{-٤}{٥} \times \frac{٧}{٢٥} - \left(\frac{-٣}{٥}\right) \times \left(\frac{-٢٤}{٢٥}\right)$

$= \frac{-٢٨}{١٢٥} - \frac{٧٢}{١٢٥} = \frac{-١٠٠}{١٢٥} = -\frac{٤}{٥}$

∴ قا (أ + ب) $= -\frac{٥}{٤}$

طا (أ − ب) $= \frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{١ + \text{طا أ طا ب}} = \frac{\frac{٣}{٤} - \left(\frac{-٢٤}{٧}\right)}{١ + \frac{٣}{٤} \times \left(\frac{-٢٤}{٧}\right)} = \frac{\frac{١١٧}{٢٨}}{\frac{-١١}{٧}} = \frac{-١١٧}{٤٤}$

مثال ٢

أ ب جـ مثلث فيه جتا أ $= \frac{٤}{٥}$ ، طا ب $= \frac{١٥}{٨}$ أوجد : جتا (أ + ب) ، جتا جـ

الحل



∵ جتا أ ، طا ب موجبتان

∴ أ ، ب تقعان في الربع الأول

∴ جا أ $= \frac{٣}{٥}$ ، جا ب $= \frac{١٥}{١٧}$ ، جتا ب $= \frac{٨}{١٧}$

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

∴ جتا (أ + ب) $= \frac{٤}{٥} \times \frac{٨}{١٧} - \frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{١٧} = \frac{٣٢}{٨٥} - \frac{٤٥}{٨٥} = \frac{-١٣}{٨٥}$

جتا جـ = جتا [١٨٠° − (أ + ب)]

= − جتا (أ + ب) $= -\left(\frac{-١٣}{٨٥}\right) = \frac{١٣}{٨٥}$



مثال ٤

بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١ جا ٢٠° جتا ١٠° + جتا ٢٠° جا ١٠°

٢ جتا ٣٠َ ٢٢° جتا ٣٠َ ٧° − جا ٣٠َ ٢٢° جا ٣٠َ ٧°

٣ جتا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{24}$ − جا $\frac{\pi}{8}$ جا $\frac{\pi}{24}$

٤ جتا ٣٥° جتا ١٠° − جتا ٥٥° جتا ٨٠°

الحل

(١) المقدار = جا (٢٠° + ١٠°) = جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

(٢) المقدار = جتا (٣٠َ ٢٢° + ٣٠َ ٧°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) المقدار = جتا $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{24}\right)$ = جتا $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٤) المقدار = جتا ٣٥° جتا ١٠° − جا ٣٥° جا ١٠°

= جتا (٣٥° + ١٠°) = جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ملاحظة

$\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

مثال ٥

بدون إستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ جا ١٥° ٢ جتا ٧٥° ٣ طا ١٠٥°

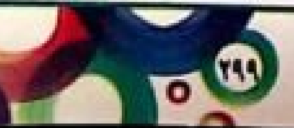
الحل

نحول الزاوية إلى طرح أو مجموعة زاويتين

(١) جا ١٥° = جا (٦٠° − ٤٥°) = جا ٦٠° جتا ٤٥° − جتا ٦٠° جا ٤٥°

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

لاحظ أنه يمكن تحويل ١٥° إلى (٤٥° − ٣٠°) ونحل بنفس الطريقة



(٢) $\text{جتا } 75^\circ = \text{جتا } (45^\circ + 30^\circ)$

$= \text{جتا } 45^\circ \text{ جتا } 30^\circ - \text{جا } 45^\circ \text{ جا } 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(٣) $\text{ظا } 105^\circ = \text{ظا } (60^\circ + 45^\circ)$

$$= \frac{\text{ظا } 60^\circ + \text{ظا } 45^\circ}{1 - \text{ظا } 60^\circ \text{ ظا } 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

مثال (٦)

أوجد قيمة س المحصورة بين 0°، 360° والتي تحقق المعادلة:

$\text{جتا س جتا } 35^\circ - \text{جا س جا } 35^\circ = \frac{1}{2}$

الحل

∵ جتا (س + ص) = جتا س جتا ص − جا س جا ص

∴ الطرف الأيمن = جتا $(\text{س} + 35^\circ) = \frac{1}{2}$

∵ $\frac{1}{2}$ (موجب)　　∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الرابع

∵ الزاوية التي جيب تمامها $\frac{1}{2}$ قياسها 60° (الربع الأول) أو 300° (الربع الرابع)

∴ $\text{س} + 35^\circ = 60^\circ$　　أو　　$\text{س} + 35^\circ = 300^\circ$

∴ $\text{س} = 25^\circ$　　أو　　$\text{س} = 265^\circ$



مثال (٧)

إذا كان جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا س + جتا $\frac{\pi}{٤}$ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فأوجد قيمة س حيث س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

الحل

جا $\left(\frac{\pi}{٤} + س\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ،

∵ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة) ∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ الزاوية $\left(\frac{\pi}{٤} + س\right)$ التى جيبها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ يكون قياسها ٦٠° $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ إذا كانت تقع فى الربع الأول أو ١٢٠° $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ إذا كانت تقع فى الربع الثانى

∴ $\frac{\pi}{٤} + س = \frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{\pi}{٤} + س = \pi - \frac{\pi}{٣}$

∴ س $= \frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{١٢}$ أو س $= \pi - \frac{٧\pi}{١٢} = \frac{٥\pi}{١٢}$

مثال (٨)

برهن على أن قيمة المقدار:

جا (س + ٦٨°) جتا (٨٢° − س) + جتا (س + ٦٨°) جا (٨٢° − س)

لا تتوقف على قيمة س

الحل

∵ جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = جا (أ + ب)

∴ بوضع أ = س + ٦٨° ، ب = ٨٢° − س

∴ المقدار = جا [(س + ٦٨°) + (٨٢° − س)] = جا ١٥٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ المقدار لا يتوقف على قيمة س





مثال (٩)

بدون إستخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) جتا ٦٧° + جا ٣٧° = جتا ٧°

(٢) $\frac{\text{جا } ١٠° \text{ جتا } ٧٠° + \text{جتا } ١٠° \text{ جا } ٧٠°}{\text{جتا } ٣٥° \text{ جتا } ٢٥° + \text{جا } ٣٥° \text{ جا } ٢٥°} = ١$

الحل

(١) الطرف الأيمن = جتا (٦٠° + ٧°) + جا (٣٠° + ٧°)

= جتا ٦٠° جتا ٧° − جا ٦٠° جا ٧° + جا ٣٠° جتا ٧° + جتا ٣٠° جا ٧°

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٧° − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٧° + $\frac{١}{٢}$ جتا ٧° + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٧°

= جتا ٧° = الطرف الأيسر

(٢) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا } (١٠° + ٧٠°)}{\text{جتا } (٣٥° - ٢٥°)} = \frac{\text{جا } ٨٠°}{\text{جتا } ١٠°}$

= $\frac{\text{جا } ٨٠°}{\text{جا } ٨٠°}$ = ١ = الطرف الأيسر

لاحظ أن

جتا ١٠° = جا ٨٠°

مثال (١٠)

أثبت أن : جا (٣٠° + أ) + جتا (أ° + ٦٠°) = جا (٩٠° − أ)

الحل

الطرف الأيمن = جا ٣٠° جتا أ + جتا ٣٠° جا أ + جتا أ جتا ٦٠° − جا أ جا ٦٠°

= $\frac{١}{٢}$ جتا أ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا أ + $\frac{١}{٢}$ جتا أ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا أ = جتا أ

الطرف الأيسر = جا (٩٠° − أ) = جتا أ

∴ الطرفان متساويان.



مثال (١١)

أثبت أن: $\frac{\text{جا } (أ + ب)}{\text{جتا } أ \text{ جتا } ب} = \text{طا } أ + \text{طا } ب$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا } أ \text{ جتا } ب + \text{جتا } أ \text{ جا } ب}{\text{جتا } أ \text{ جتا } ب} = \frac{\text{جا } أ \text{ جتا } ب}{\text{جتا } أ \text{ جتا } ب} + \frac{\text{جتا } أ \text{ جا } ب}{\text{جتا } أ \text{ جتا } ب}$

$= \frac{\text{جا } أ}{\text{جتا } أ} + \frac{\text{جا } ب}{\text{جتا } ب} = \text{طا } أ + \text{طا } ب =$ الطرف الأيسر

مثال (١٢)

إذا كان طا أ = ٢ ، طا ب = $\frac{1}{3}$ حيث أ ، ب هما قياسا زاويتان حادتان

فأثبت أن: أ − ب = ٤٥°

الحل

$\text{طا } (أ - ب) = \frac{\text{طا } أ - \text{طا } ب}{1 + \text{طا } أ \text{ طا } ب} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3}} = 1$

∵ طا (أ − ب) = ١   ∴ أ − ب = ٤٥°

مثال (١١)

بدون إستخدام الآلة الحاسبة   أثبت أن: طا ٣٥° + طا ١٠° + طا ٣٥° طا ١٠° = ١

الحل

∵ طا ٤٥° = ١   ∴ طا (٣٥° + ١٠°) = ١   ∴ $\frac{\text{طا } 35° + \text{طا } 10°}{1 - \text{طا } 35° \text{ طا } 10°} = 1$

∴ طا ٣٥° + طا ١٠° = ١ − طا ٣٥° طا ١٠°

∴ طا ٣٥° + طا ١٠° + طا ٣٥° طا ١٠° = ١





مثال (١٤)

إذا كانت شدة التيار الكهربى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

(١) أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسى زاويتين.

(٢) أوجد شدة التيار الكهربى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

الحل

ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن العلاقة المعطاة

∴ ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا [(٣٦٠° - ٧٥°) ن]

ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٧٥° ن

∵ ٧٥° = ٤٥° + ٣٠°

ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا (٤٥° ن + ٣٠° ن)

بالتعويض عن ن = ١

∴ ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا (٤٥° + ٣٠°)

ت = $\frac{٣}{٢}$ [جتا ٤٥° جتا ٣٠° - جا ٤٥° جا ٣٠°]

ت = $\frac{٣}{٢}\left[\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}\right]$ ⇐ ت = $\frac{٣}{٢}\left[\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}\right]$ بالضرب × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

ت = $\frac{٣}{٢}\left[\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}\right] = \frac{٣(\sqrt{٦} - \sqrt{٢})}{٨}$

تمرين ٢ على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسي زاويتين

الأسئلة التي عليها علامة (✓) لها نفس فكرة كتاب المدرسة



أولاً راجع معنا وأختبر نفسك



إختبار تراكمي ١٦

½ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية .... / ١٠

١ (أ) من قمة منزل يرتفع ٦٠ مترًا من سطح الأرض قيست زاويتي إنخفاض نقطتين س ، ص على سطح الأرض وفي جهة واحدة من المنزل فكانتا ٣٥° ، ٤٦° على الترتيب فإذا كانت قاعدة المنزل على نفس الخط الأفقي المار بالنقطتين س ، ص فأوجد البعد بين النقطتين.

....

....

....

(ب) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الراصد في خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا في المستوى الأفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٣٠َ ٥٢°

أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر.

....

....

....

(جـ) من قمة منزل إرتفاعه ٨ أمتار عن سطح الأرض كان قياس زاوية إرتفاع قمة شجرة ١٨° وقياس زاوية انخفاض قاعدتها ٢٩° أوجد إرتفاع الشجرة وبعدها عن المبنى.

....

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جا ٧٠° جتا ٢٠° + جتا ٧٠° جا ٢٠° = ... [صفر أو ١ أو -١ أو $\frac{١}{٢}$]

② جا ٤٠° جتا ١٠° − جتا ٤٠° جا ١٠° = ...

[صفر أو ١ أو $\frac{-١}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$]

③ جتا س جتا ص + جا س جا ص = ...

[جتا (س − ص) أو جتا (س + ص) أو جا (س − ص) أو جا (س + ص)]

④ جتا ٧٠° جتا ٢٠° − جا ٧٠° جا ٢٠° = ...

[صفر أو $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{-١}{٢}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

⑤ $\frac{\text{ظا } ٣٨° + \text{ظا } ٧°}{١ - \text{ظا } ٣٨° \text{ ظا } ٧°}$ = ... [صفر أو ١ أو -١ أو $\sqrt{٣}$]

⑥ $\frac{\text{ظا } ٧٥° - \text{ظا } ١٥°}{١ + \text{ظا } ٧٥° \text{ ظا } ١٥°}$ = ... [صفر أو ١ أو $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ أو $\sqrt{٣}$]

⑦ جتا (أ + ب) جتا ب + جا (أ + ب) جا ب = ...

[جا أ أو جتا أ أو ظا أ أو -جتا أ]

⑧ جا (س + ص) جتا ص − جتا (س + ص) جا ص = ...

[جا س أو جتا س أو ظا س أو -جا س]

⑨ إذا كان ظا θ = ٢ فإن ظا $\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right)$ = ... [-١ أو ٢ أو -٣ أو ٣]

⑩ إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) = ...

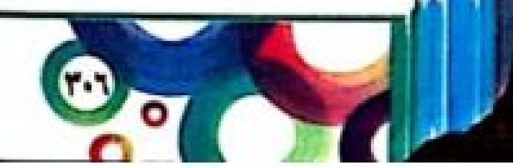
[١ أو -١ أو صفر أو $\frac{١}{٢}$]

⑪ إذا كان جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا س + جتا $\frac{\pi}{٢}$ جا س = $\frac{١}{٢}$ فإن جتا س = ...

[١ أو -١ أو صفر أو $\frac{١}{٢}$]

⑫ إذا كان $\frac{\text{ظا س} - \text{ظا } ١٠°}{١ + \text{ظا س ظا } ١٠°}$ = ١ فإن س = ...

[٥٥° أو ٢٣٥° أو ٥٥° ، ٢٣٥° أو ٤٥° ، ٢٢٥°]





٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جا $\frac{\pi}{9}$ جتا $\frac{\pi}{18}$ + جتا $\frac{\pi}{9}$ جا $\frac{\pi}{18}$ = ...

[$\frac{1}{2}$ أ، ٢ أ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$]

② جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥° = ...

[صفر أ، $\frac{1}{2}$ أ، ١ أ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$]

③ جا ٥ س جا ٣ س + جتا ٥ س جتا ٣ س = ...

[جتا ٢ س أ، جتا ٨ س أ، جا ٨ س أ، جا ٢ س]

④ إذا كان جا ٢ س جتا ١٠° − جتا ٢ س جا ١٠° = $\frac{1}{2}$ فإن ق (∠ س) = ...

[٢٠° أ، ٣٠° أ، ٢٠°، ٨٠° أ، ٨٠°]

⑤ جتا $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ = ...

[جا θ أ، − جا θ أ، جتا θ أ، − جتا θ]

⑥ جا $\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ = ...

[$\frac{1}{2}$(جتا θ + $\sqrt{3}$ جا θ) أ، $\frac{1}{2}$(جتا θ + جا θ) أ،

$\frac{1}{2}$($\sqrt{3}$ جتا θ + جا θ) أ، $\frac{1}{2}$($\sqrt{3}$ جتا θ + $\sqrt{2}$ جا θ)]

⑦ جا (أ + ب) + جا (أ − ب) = ...

[جا أ جتا ب أ، جتا أ جا ب أ، ٢ جا أ جتا ب أ، ٢ جتا أ جا ب]

⑧ جتا س (جتا س − ظا س جا س) = ...

[٤ جا $\frac{س}{2}$ أ، جتا ٢ س أ، − جتا س أ، جا ٢ س]

⑨ قيمة $\frac{1 + \text{ظا س}}{1 - \text{ظا س}}$ = ...

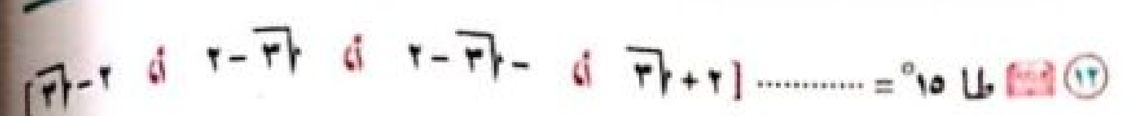
[−١ أ، ظا (٤٥° + س) أ، ظا (٤٥° − س) أ، ظا (٢ س − ١)]

⑩ جتا ٧٠° جتا ٤٠° + جتا ٢٠° جتا ٥٠° = ...

[$\frac{1}{2}$ أ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ، $-\frac{1}{2}$ أ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$]

⑪ جا ٥٥° جتا ٣٥° + جا² ٣٥° = ... [صفر أ، $\frac{1}{2}$ أ، −١ أ، ١]





(١٢) طا ١٥° = ... [٢ + √٣ أو -√٣ - ٢ أو √٣ - ٢ أو ٢ - √٣]

(١٣) جا ٧٥° = ...

[(√٦ - √٢)/٢ أو (√٦ + √٢)/٤ أو (√٢ - √٦)/٢ أو (√٦ - √٢)/٤]

(١٤) طا (٢ ط - ٥ط/١٢) = ...

[٢ + √٣ أو ٢ - √٣ أو -٢ - √٣ أو √٣ - ٢]

٤ بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

(١) جا ٤٠° جتا ٢٠° + جتا ٤٠° جا ٢٠° [√٣/٢]

(٢) جتا ٧٠° جتا ١٠° + جا ٧٠° جا ١٠° [١/٢]

(٣) جتا ٤٠° جتا ٥٠° - جا ٤٠° جا ٥٠° [صفر]

(٤) جا ٢٢° جتا ٨° + جتا ٢٢° جا ٨° [١/٢]

(٥) (طا ٦٣° - طا ١٨°) / (١ + طا ٦٣° طا ١٨°) [١]

(٦) (جا ٢٥° جتا ٢٠° + جتا ٢٥° جا ٢٠°) / (جتا ٨٠° جتا ٣٥° + جا ٨٠° جا ٣٥°) [١]

(٧) (أ) جا ٧٥° (ب) جتا ١٥° (جـ) طا ١٠٥° (د) جتا ٥ط/١٢

٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جتا ٤٠° جتا س - جا ٤٠° جا س = ...

[جا (٤٠° + س) أو جا (٤٠° - س) أو جتا (٤٠° - س) أو جتا (٤٠° + س)]

(٢) جتا أ جتا (أ + ط/٢) + جا أ جا (أ + ط/٢) = ...

[صفر أو ١ أو -١ أو ١/٢]

(٣) جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب) = ...

[جا أ جا ب أو ٢ جا أ جا ب أو ٢ جتا أ جا ب أو ٢ جتا أ جتا ب]

(٤) جا (أ + ب) - جا (أ - ب) = ...

[جا أ جا ب أو ٢ جا أ جا ب أو ٢ جتا أ جا ب أو ٢ جتا أ جتا ب]



٦ ① إذا كان طا ا = ٢ ، طا ب = ٣ فأوجد :

(ا) طا (ا + ب) (ب) طا (ا − ب) [−١ ، $-\frac{١}{٧}$]

② إذا كان طا ا = $\frac{١}{٤}$ ، طا ب = $\frac{٣}{٥}$

فأوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة طا (ا + ب) [١]

③ إذا كان ا ، ب زاويتان حادتان حيث طا ا = $\frac{٤}{٥}$ ، طا ب = $\frac{١}{٩}$

برهن أن : ا + ب = ٤٥°

ثالثا مسائل المستوى الثانى

٧ إذا كان جا ا = $\frac{٤}{٥}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < ا < π ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ حيث ٠ < ب < $\frac{\pi}{٢}$

فأوجد قيمة : طا (ا + ب) ، جا (ا − ب) [$\frac{-٣٣}{٥٦}$ ، $\frac{٦٣}{٦٥}$]

---

٨ إذا كان ا ، ب زاويتين حادتين حيث جتا ا = $\frac{٣}{٥}$ ، طا ب = $\frac{٨}{١٥}$

أوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① جا (ا + ب) ② طا (ا − ب)

③ قا (ا − ب) ④ ظتا (ا + ب) [$\frac{٨٤}{٨٥}$ ، $\frac{٣٦}{٧٧}$ ، $\frac{٨٥}{٧٧}$ ، $\frac{١٣}{٨٤}$]

---

٩ إذا كان جا ا = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٧}{٢٥}$ حيث ا ، ب ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

أوجد : جا (ا + ب) ، جتا (ا − ب) [$\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{١١٧}{١٢٥}$]

---

١٠ إذا كان جتا ا = − $\frac{٣}{٥}$ حيث π < ا < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < ب < π

فأوجد قيمة جتا (ا − ب) بدون إستخدام الآلة الحاسب. [$\frac{١٦}{٦٥}$]

---

١١ إذا كان طا ا = $\frac{٢}{٣}$ حيث π < ا < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٥}$ حيث ٠ < ا < $\frac{\pi}{٢}$

أوجد قيمة كل من : طا (ا + ب) ، جتا (ا + ب) ومن ذلك أثبت أن : ا + ب = $\frac{٥\pi}{٤}$ [١ ، $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$]

---

١٢ إذا علمت أن جا ا = $\frac{-٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° < ا < ٢٧٠° ، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① جتا (ا − ب) ② جا (ا + ب) ③ طا (ا − ب) [$\frac{-٢١}{٢٢١}$ ، $\frac{-١٤٠}{٢٢١}$ ، $\frac{-٢٢٠}{٢١}$]

١٣ أ ب جـ مثلث فيه ٤ طا أ = ٣ ، ١٧ جتا ب = ١٥ **أوجد** بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة :

① جا (أ + ب) ② جتا جـ $[\frac{٧٧}{٨٥} ، \frac{-٣٦}{٨٥}]$

١٤ إذا كانت جتا^٢ أ = $\frac{١٦}{٢٥}$ حيث أ ∈] ١٨٠° ، ٢٧٠° [، طا^٢ ب = $\frac{١٤٤}{٢٥}$ حيث ب ∈] ٩٠° ، ١٨٠° [

فأوجد قيمة جا (أ − ب) ، جتا (أ + ب) $[\frac{٥٦}{٦٥} ، \frac{٣٣}{٦٥}]$

١٥ إذا كان جا أ = ٠,٦ ، حيث أ أكبر قياس موجب ، ١٣ جتا ب + ١٢ = ٠ حيث ب أصغر قياس موجب **فأوجد** قيمة جا (أ − ب) ، جتا (أ − ب) $[\frac{-١٦}{٦٥} ، \frac{٦٣}{٦٥}]$

١٦ ① فى المثلث أ ب جـ إذا كان طا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ١٣ جتا ب − ٥ = ٠ ، **فأوجد** قيمة جا جـ $[\frac{٦٣}{٦٥}]$

② أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه جتا أ = $\frac{١}{٣}$ ، جتا ب = $\frac{١}{٤}$

أوجد جتا (أ + ب) ، جتا جـ $[\frac{١ - ٢\sqrt{٣٠}}{١٢} ، \frac{٢\sqrt{٣٠} - ١}{١٢}]$

١٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جتا ٣٦° ٤٩َ جتا ٢٤° ٤٠َ − جا ٣٦° ٤٩َ جا ٢٤° ٤٠َ = ...

[جا ٩٠° أ جتا ٩٠° أ جا صفر أ جتا ٩° ١٢َ]

② جا $\frac{٤π}{٣}$ جتا $\frac{٢π}{٣}$ + جتا $\frac{٤π}{٣}$ جا $\frac{٢π}{٣}$ = ...

[جا ٢π أ جتا ٢π أ جا π أ جتا π]

③ جتا $(\frac{π}{٤}$ + أ$)$ جتا $(\frac{π}{٤}$ − أ$)$ − جا $(\frac{π}{٤}$ + أ$)$ جا $(\frac{π}{٤}$ − أ$)$ = ...

[جا π أ جا $\frac{π}{٢}$ أ جتا $\frac{π}{٢}$ أ جتا π]

④ جتا ٧٥° جتا ١٥° + جا ٧٥° جا ١٥° = ...

[جا ٦٠° أ جتا ٦٠° أ جتا ٣٠° أ طا ٦٠°]

⑤ جا ١٢٠° جا ٦٠° − جتا ١٢٠° جتا ٦٠° = ...

[جتا ١٨٠° أ − جتا ١٨٠° أ جا ١٨٠° أ − جا ١٨٠°]

⑥ جا ٤٠° جتا ٧٠° − جتا ٤٠° جا ٧٠° = ...

[جا ٣٠° أ جتا ٣٠° أ − جا ٣٠° أ − جتا ٣٠°]



⑦ $\dfrac{\text{طا } \frac{\pi}{9} + \text{طا } \frac{\pi}{12}}{1 - \text{طا } \frac{\pi}{9} \text{ طا } \frac{\pi}{12}}$ = ...

[طا $\frac{\pi}{4}$ أ، − طا $\frac{\pi}{4}$ أ، طا $\frac{\pi}{2}$ أ، طا $\frac{\pi}{9}$]

⑧ $\dfrac{\text{طا } 30^\circ + \text{طا } 15^\circ}{1 - \text{طا } 30^\circ \text{ طا } 15^\circ}$ = ...

[طا ١٥° أ، طا ٤٥° أ، − طا ٤٥° أ، طا ٧٥°]

⑨ جتا (−٣٥°) جا (−٣٠٥°) − جا (−٣٥°) جتا ٥٥° = ...

[جا ٩٠° أ، جتا ٩٠° أ، جتا ٠° أ، جا ٨٠°]

⑩ جا ٦٥° جتا ٢٥° + جا² ٢٥° = ...

[جا ٩٠° أ، جتا ٩٠° أ، جتا ٠° أ، جا ٤٠°]

⑪ إذا كان طا $\theta = \frac{1}{2}$ فإن طا $\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ = ... [١ أ، ٢ أ، ٣ أ، −٣]

---

١٣ **أوجد** قيم س المحصورة بين ٠°، ٣٦٠° والتى تحقق المعادلة :

① جا س جتا ٤٠° − جتا س جا ٤٠° = $\frac{1}{2}$ [٧٠°، ١٩٠°]

② جتا ٣ س جتا ٢ س + جا ٣ س جا ٢ س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [٣٠°، ٣٣٠°]

③ جتا ٥٢° جتا ٨° − جا ٥٢° جا ٨° = جا س [٣٠°، ١٥٠°]

④ $\dfrac{\text{طا س} - \text{طا } 22^\circ\, 15'}{1 + \text{طا س طا } 22^\circ\, 15'} = -1$ [١٥َ ١٥٧°، ١٥َ ٣٣٧°]

---

١٤ **برهن** على أن قيم المقادير التالية لا تتوقف على س :

① جتا (س + ٧٥°) جتا (س + ٤٥°) + جا (س + ٧٥°) جا (س + ٤٥°)

② $\dfrac{\text{طا (س} + 17'\, 85^\circ) - \text{طا (س} + 17'\, 40^\circ)}{1 + \text{طا (س} + 17'\, 85^\circ) \text{ طا (س} + 17'\, 40^\circ)}$

---

١٥ بدون إستخدام الآلة الحاسبة **أثبت أن :**

① جا ٥٠° + جتا ٨٠° = جتا ٢٠°

② جا ٢٦° + جتا ٥٦° = جتا ٤°

③ جتا ٢٥° − جا ١٢٥° = جا ٥°

④ طا ٨٠° − طا ٣٥° − طا ٨٠° طا ٣٥° = ١

⑤ $\dfrac{\text{جا ٣ س جتا ٢ س} - \text{جتا ٣ س جا ٢ س}}{\text{جتا ٣ س جتا ٢ س} + \text{جا ٣ س جا ٢ س}}$ = طا س



٢١ بدون إستخدام الآلة الحاسبة **أثبت أن :**

① $\text{جتا } ٧٥° = \frac{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}}{٤}$

② $\text{ظا } ٧٥° = ٢ + \sqrt{٣}$

③ $\text{ظا } ٥٠° = \frac{١ + \text{ظا } ٥°}{١ - \text{ظا } ٥°}$

④ $\text{ظا } (٤٥° - أ) = \frac{\text{جتا } أ - \text{جا } أ}{\text{جتا } أ + \text{جا } أ}$

⑤ $\frac{\text{جا } (أ + ب) + \text{جا } (أ - ب)}{\text{جتا } (أ + ب) + \text{جتا } (أ - ب)} = \text{ظا } أ$

⑥ $\text{جا } (٣٠° - أ) + \text{جتا } (أ - ٦٠°) = \text{جا } (٩٠° + أ)$

⑦ $\text{جتا } (أ - ٣٠°) + \text{جا } (أ - ٦٠°) = \text{جا } أ$

⑧ $\text{جا } \frac{\pi}{٨} \text{ جتا } \frac{\pi}{٢٤} + \text{جتا } \frac{\pi}{٨} \text{ جا } \frac{\pi}{٢٤} = \frac{١}{٢}$

⑨ $\text{جا } ٥٠° + \text{جتا } ٥٠° = \sqrt{٢} \text{ جتا } ٥°$

٢٢ **اختصر** لأبسط صورة: $\text{جتا } (أ + ب) \text{ جتا } أ + \text{جا } (أ + ب) \text{ جا } أ$ [جتا ب]

٢٣ بدون إستخدام الآلة الحاسبة **أثبت أن :**

① $\text{جتا } (س + ١٥°) \text{ جا } (س + ٦٠°) - \text{جا } (س + ١٥°) \text{ جتا } (س + ٦٠°) = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

② $\text{جتا } (٦٠° + س) + \text{جتا } (٦٠° - س) - \text{جتا } س = ٠$

③ $\text{ظا } (س - ٤٥°) + \text{ظا } (س - ١٣٥°) = \frac{٤ \text{ ظا } س}{١ - \text{ظا}^{٢} س}$

④ $\text{جتا } هـ + \text{جتا } (هـ - ١٢٠°) + \text{جتا } (هـ + ١٢٠°) = ٠$

٢٤ إذا كان $\text{ظا } س = \frac{٣}{٤}$ ، $\text{ظا } (س - ص) = \frac{١}{٣}$ حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين

أثبت أن: $\text{ظا } ص = \frac{١}{٣}$

٢٥ إذا كان $\text{جا } أ = \frac{٣}{٥}$ حيث $٠° < أ < ٩٠°$ ، $\text{ظا } ب = -٧$ حيث $٩٠° < ب < ١٨٠°$

أثبت أن: $أ + ب = ١٣٥°$

٢٦ إذا كان $\text{ظا } (\theta + ٤٥°) = \frac{٣}{٢}$ **أوجد** قيمة $\text{ظا } \theta$ $[\frac{١}{٥}]$

٢٧ إذا كان $\text{ظا } أ = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ظا } ب = \frac{١}{٨}$ ، $\text{ظا } هـ = \frac{١}{٥}$ حيث أ ، ب ، هـ قياسات زوايا $\in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

أثبت أن: $أ + ب + هـ = ٤٥°$





٢٨ إذا كان جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب قياسى زاويتان حادتان

أوجد قيمة كل من جتا (أ + ب) ، جتا (أ − ب) [$\frac{-١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٦}$]

---

٢٩ إذا علمت أن $\frac{\text{جتا (أ + ب)}}{\text{جتا (أ − ب)}} = \frac{١}{٣}$ فأثبت أن: ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب ثم

أثبت أن: ٢ ظا أ = ظتا ب وإذا علمت أن ظا أ = $\frac{٢}{٥}$

فأوجد ظا ب ومن ثم أوجد ظا (أ − ب) [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٣٠}$]

---

٣٠ إذا كان أ ، ب قياسا زاويتان حادتان حيث أ − ب = ٤٥°

أثبت أن: ① ظا أ = $\frac{\text{١ + ظا ب}}{\text{١ − ظا ب}}$ ② ظا أ = $\frac{\text{جتا ب + جا ب}}{\text{جتا ب − جا ب}}$

---

٣١ إذا كان أ + ب + ﺣ = ١٨٠° حيث أ ، ب ، ﺣ قياسات زوايا Δ

أثبت أن: ظا أ + ظا ب + ظا ﺣ = ظا أ ظا ب ظا ﺣ

---

٣٢ إذا كان أ + ب + ﺣ = ٩٠° حيث أ ، ب ، ﺣ قياسات زوايا حادة

فأثبت أن: ظا أ ظا ب + ظا ب ظا ﺣ + ظا أ ظا ﺣ = ١

---

٣٣ إذا كان ٣ جتا (أ + ب) = ٢ جتا (أ − ب) أثبت أن: ظا أ ظا ب = $\frac{١}{٥}$

---

٣٤ أثبت أن: (جا س + جا ص)^{٢} + (جتا س + جتا ص)^{٢} = ٢ + ٢ جتا (س − ص)

---

٣٥ إذا كان Δ أ ب ﺣ فيه ظا أ = $\frac{١}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد ق (∠ ﺣ)

بدون إستخدام الآلة الحاسبة. [١٣٥°]

---

٣٦ أثبت أن: $\frac{\text{جا (أ − ب)}}{\text{جتا أ جتا ب}}$ + $\frac{\text{جا (ب − ﺣ)}}{\text{جتا ب جتا ﺣ}}$ = ظا أ − ظا ﺣ

---

٣٧ إذا كان ظا ٧٥° = س أثبت أن: س^{٢} − ٢ $\sqrt{٣}$ س − ١ = ٠

---

٣٨ إذا كانت شدة التيار الكهربى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٥}{٢}$ جا ١٦٥° ن

① أعد كتابة العلاقة السابقة بإستخدام مجموع قياسى زاويتين.

② أوجد شدة التيار الكهربى بعد ثانية واحدة (دون إستخدام الحاسبة) [$\frac{٥\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٨}$]



رابعا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٩ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان س ص ع مثلث

فإن ما $\left(\frac{س + ص}{٢}\right)$ حتا $\frac{ع}{٢}$ + حتا $\left(\frac{س + ص}{٢}\right)$ ما $\frac{ع}{٢}$ = ...

[صفر أ، −١ أ، ١ أ، ٢]

(٢) إذا كان حتا $\left(\frac{أ + ب - ح}{٢}\right)$ حتا ح + ما $\left(\frac{ح - أ - ب}{٢}\right)$ ما ح = ...

[صفر أ، −١ أ، ١ أ، ٢]

(٣) إذا كانت س ∈]٠ ، ٢ π[فإن قيمة س التى تجعل قيمة المقدار

ما س حتا ١٥° + حتا س ما ١٥° أصغر ما يمكن هى ....

[٧٥° أ، ٢٧٠° أ، ٢٨٥° أ، ٢٥٥°]

(٤) إذا كانت س ∈]٠ ، ٢ π[فإن قيمة س التى تجعل قيمة المقدار

حتا س حتا ٢٠° + ما س ما ٢٠° أكبر ما يمكن هى ....

[٢٠° أ، ١٦٠° أ، ٢٠٠° أ، ٢٢٠°]

(٥) إذا كان ما س + حتا ص = $\frac{١}{٢}$ ، حتا س + ما ص = $\frac{١}{٣}$

فإن ما (س + ص) = ... [$\frac{-٥٩}{٧٢}$ أ، $\frac{٥}{٧٢}$ أ، $\frac{٥٩}{٧٢}$ أ، $\frac{-٥}{٧٢}$]

(٦) إذا كان ما ٤٠° = م فإن ما ٧٠° − $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ حتا ٧٠° = ...

[$\sqrt{٣}$ م أ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ م أ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، م]

(٧) إذا كان ما (أ + ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ما أ = $\frac{٣}{٥}$ فإن ما (٢ أ + ب) = ...

[$\frac{٤ + \sqrt{٢}}{١٥}$ أ، $\frac{\sqrt{٢}}{١٥}$ أ، $\frac{٤ + ٦\sqrt{٢}}{١٥}$ أ، $\frac{٦\sqrt{٢} - ٤}{١٥}$]

(٨) إذا كان ما (أ + ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ما (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن ما أ حتا ب = ...

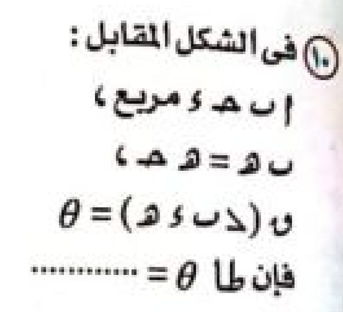
[$\frac{٥}{٦}$ أ، $\frac{٥}{١٢}$ أ، $\frac{١}{٦}$ أ، $\frac{٥}{١٢}$]

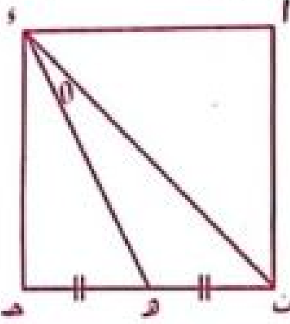


(٩) في الشكل المقابل :
أ ب = ٢ سم ، ب هـ = ٤ سم ،
د جـ = ٤ سم ، هـ جـ = ٣ سم
فإن جا (∠ أ هـ د) = ...

[$\frac{٦\sqrt{٥}}{٢٥}$ أ، $\frac{٩\sqrt{٥}}{٢٥}$ أ، $\frac{٢\sqrt{٥}}{٢٥}$ أ، $\frac{١١\sqrt{٥}}{٢٥}$]

(١٠) في الشكل المقابل :
أ ب جـ د مربع ،
ب هـ = هـ جـ ،
ق (∠ ب د هـ) = θ
فإن ظا θ = ...





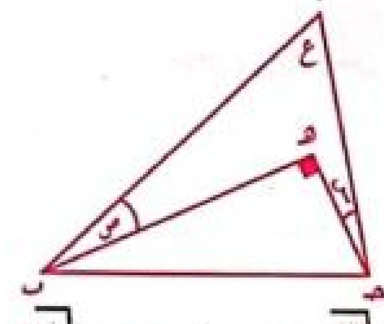
[$\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{١}{٣}$ أ، $\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{١}{٥}$]

(١١) إذا كان ظا ٦٥° = أ فإن ظا ٤٠° = ...



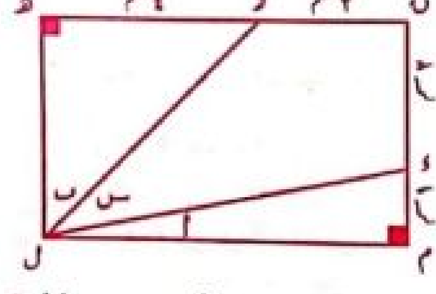
[أ أ، $\frac{١}{٢}$ أ^{٢} أ، $\frac{أ^{٢}+١}{٢}$ أ، $\frac{أ^{٢}-١}{٢أ}$]

(١٢) في الشكل المقابل :
ق (∠ جـ هـ ب) = ٩٠° ،
ق (∠ أ جـ هـ) = س
ق (∠ أ ب هـ) = ص ، ق (∠ أ) = ع
جا (ص + ع) = $\frac{٢}{٣}$
فإن ظا ص = ...



[$\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، $\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$]

(١٣) في الشكل المقابل :
ل م ب هـ مستطيل ، ب و = ٢ سم ،
و هـ = ٤ سم ، ب د = ٢ سم ، د م = ١ سم
ق (∠ د ل م) = أ ، ق (∠ د ل و) = س ،
ق (∠ و ل هـ) = ب
فإن ظا س = ...



[$\frac{٢٧}{١٤}$ أ، $\frac{٨}{٩}$ أ، $\frac{٩}{٢٧}$ أ، $\frac{١٤}{٢٧}$]





(١٤) في الشكل المقابل :

أء = ٤ سم ، أهـ = ٣ سم ، هـ ب = ٨ سم ،

جـ هـ = ١٧ سم ، ق (∠أ ء هـ) = θ ،

ق (∠هـ جـ ب) = α

ق (∠ء هـ جـ) = س°

فإن ما س = ...

[$\frac{٩}{١٧}$ أو $\frac{٣٢}{٨٥}$ أو $\frac{٨}{١٧}$ أو $\frac{٧٧}{٨٥}$]

(١٥) إذا كان $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ما س + متا س = ١ فإن قا (٣٠° − س) = ...

[−٢ أو $\frac{-١}{٢}$ أو −١ أو $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$]

(١٦) إذا كان س ص ع مثلث فيه ٣ ظتا س = ٤ ، ظتا ص = ٧ فإن ق (∠ع) = ...

[٣٠° أو ٤٥° أو ١٢٠° أو ١٣٥°]

(١٧) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا حادة وكان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{١}{٨}$

فإن ق (∠أ) + ق (∠ب) + ق (∠جـ) = ...

[$\frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{٢\pi}{٣}$ أو $\frac{٥\pi}{٦}$]

(١٨) إذا كان ٤ متا (س + ص) = ٣ متا (س − ص) فإن ظا س ظا ص = ...

[٧ أو ١٢ أو ١ أو $\frac{١}{٧}$]

(١٩) إذا كان أ + ب + جـ = ٩٠° فإن ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ...

[$\frac{١}{٢}$ أو ١ أو $\frac{٢}{٣}$ أو ٢]

---

٤٠ **اختصر** : متا $\left(\frac{\pi}{٣} + س\right)$ متا $\frac{\pi}{٦}$ − ما $\left(\frac{\pi}{٣} + س\right)$ ما $\frac{\pi}{٦}$ [− ما س]

---

٤١ إذا كان أ ، ب قياسا زاويتين بحيث أ + ب = ١٢٠° ، ٢ متا أ = $(\sqrt{٣} - ١)$ ما ب

فأوجد قيمة كل من أ ، ب [٧٥° ، ٤٥°]

---

٤٢ في Δ أ ب جـ **أثبت** أن : ظا $\frac{أ}{٢}$ ظا $\frac{ب}{٢}$ + ظا $\frac{ب}{٢}$ ظا $\frac{جـ}{٢}$ + ظا $\frac{أ}{٢}$ ظا $\frac{جـ}{٢}$ = ١

---

٤٣ في Δ أ ب جـ إذا كان متا أ = $\frac{١٧}{٢٢}$ ، متا جـ = $\frac{١}{١٤}$ **فأوجد** أَ : بَ : جـَ [٧ : ٩ : ١١]





٤٤ **أثبت أن:** $\dfrac{\text{طا}^{٢}\,٣ا - \text{طا}^{٢}\,ا}{١ - \text{طا}^{٢}\,٣ا\ \text{طا}^{٢}\,ا}$ = طا ٢ا طا ٤ا

---

٤٥ **أثبت أن:** جا (ا + ب) جا جـ − جا (ب + جـ) جا ا = جا ب جا (جـ − ا)

---

٤٦ **أثبت أن:** طا ٢ جـ + طا ٢ جـ طا ٥ جـ طا ٧ جـ + طا ٥ جـ = طا ٧ جـ

---

٤٧ **أثبت أن:** ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} + \text{س}\right)$ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{ص}\right)$ = جتا (س + ص) − جا (س − ص)

---

٤٨ إذا علم أن طا ا ، طا ب هما جذرًا المعادلة س^{٢} − ٢ س − ٢ = ٠

فأوجد قيمة: طا (ا + ب) $\left[\frac{٢}{٣}\right]$

---

٤٩ **أثبت** صحة المتطابقة الآتية: جتا (س + ص) جتا (س − ص) = جتا^{٢} س + جتا^{٢} ص − ١

---

٥٠ ا ب جـ مثلث ، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه فى ء فإذا كان ا ب = ٢$\sqrt{٥}$ سم ، ب ء = ٢ سم ، ء جـ = ٥ سم وكان ق (∠ب ا ء) = س° ، ق (∠جـ ا ء) = ص° **فأوجد** قيمة: طا (س + ص) $\left[\frac{١٤}{٣}\right]$



الدرس ٣
الدوال المثلثية لضعف الزاوية

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

نعلم أن

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب بوضع ب = أ

∴ جا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

∴ جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ لكل أ ∈ ح

بالمثل يكون

جتا ٢أ = جتا^{٢}أ − جا^{٢}أ لكل أ ∈ ح

= ٢ جتا^{٢}أ − ١

= ١ − ٢ جا^{٢}أ

ظا ٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{أ}}$ حيث ظا أ معرفة، ظا^{٢}أ ≠ ١



ويمكن كتابة صورة القوانين السابقة إذا ضاعفنا الزاوية ٢ أ لتصبح ٤ أ، كما يمكن كتابتها إذا نصفنا الزاوية ٢ أ لتصبح أ كما يلي:

$\text{جا } أ = ٢ \text{ جا } \frac{أ}{٢} \text{ جتا } \frac{أ}{٢}$	$\text{جا } ٤أ = ٢ \text{ جا } ٢أ \text{ جتا } ٢أ$
$\text{جتا } أ = \text{جتا}^٢ \frac{أ}{٢} - \text{جا}^٢ \frac{أ}{٢}$	$\text{جتا } ٤أ = \text{جتا}^٢ ٢أ - \text{جا}^٢ ٢أ$
$= ٢ \text{ جتا}^٢ \frac{أ}{٢} - ١$	$١ + \text{جتا } ٢أ = ٢ \text{ جتا}^٢ أ$
$= ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \frac{أ}{٢}$	$١ - \text{جتا } ٢أ = ٢ \text{ جا}^٢ أ$
	$١ + \text{جا } ٢أ = (\text{جتا } أ + \text{جا } أ)^٢$
$\text{ظا } أ = \frac{٢ \text{ ظا } \frac{أ}{٢}}{١ - \text{ظا}^٢ \frac{أ}{٢}}$	$١ - \text{جا } ٢أ = (\text{جتا } أ - \text{جا } أ)^٢$

الدوال المثلثية لنصف الزاوية

سبق وان علمت أن $\text{جتا } أ = ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \frac{أ}{٢}$ (متطابقة ضعف الزاوية)

أى أن $٢ \text{ جا}^٢ \frac{أ}{٢} = ١ - \text{جتا } أ$ (من خواص المقادير الجبرية)

$\text{جا}^٢ \frac{أ}{٢} = \frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}$ (بقسمة الطرفين على ٢)

$\text{جا } \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}$ وبالمثل يمكن إيجاد الدوال المثلثية لكل من $\text{جتا } \frac{أ}{٢}$، $\text{ظا } \frac{أ}{٢}$

$\text{جا } \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}$ ، $\text{جتا } \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}$ ، $\text{ظا } \frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{١ + \text{جتا } أ}}$

حيث $\text{جتا } أ \neq -١$ يتم تحديد الإشارة وفقًا للربع الذى تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{٢}$



ويمكن تذكر كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة فيما يلي :

○ إذا كان حل المعادلة : جا θ = ك في الفترة $[0, 2\pi[$ هو α ، β

فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \alpha + 2\pi n$ أو $\beta + 2\pi n$ حيث $n \in$ ص

مع ملاحظة أنه إذا كانت جا $\theta = 0$ ، يكون الحل العام $\theta = n\pi$

○ إذا كان حل المعادلة : جتا θ = ك في الفترة $[0, 2\pi[$ هو α ، $-\alpha$

فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \pm\alpha + 2\pi n$ حيث $n \in$ ص

مع ملاحظة أنه إذا كانت جتا $\theta = 0$ ، يكون الحل العام $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

○ إذا كان حل المعادلة : ظا θ = ك في الفترة $[0, 2\pi[$ هو α ، $\alpha + \pi$

فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \alpha + n\pi$ حيث $n \in$ ص

فمثلاً

لإيجاد الحل العام للمعادلة جا $\theta = \frac{1}{2}$ فإننا نلاحظ أن : جا θ موجبة

أي أن θ تقع في الربع الأول أو الثاني

∵ الزاوية الحادة التي جيبها $= \frac{1}{2}$ قياسها $30°$

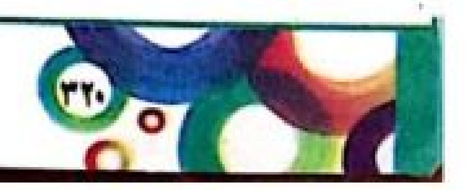
وحيث أن θ تقع في الربع الأول أو الثاني فإن $\theta = 30°$ أو $\theta = 180° - 30° = 150°$

أي أن $\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{-\pi}{6} + \pi$ أي $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

لاحظ أن : $\left(150° = 150° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{5}{6}\pi\right)$

ويكون الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $\frac{-\pi}{6} + \pi + 2n\pi$

أي $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$



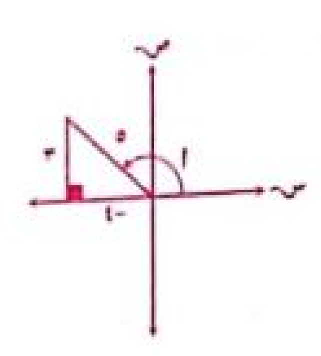


مثال (١)

إذا كان حتا أ = $\frac{-٤}{٥}$ حيث أ ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [

فأوجد قيمة كل من : حا ٢أ ، حتا ٢أ ، طا ٢أ

الحل



∵ أ قياس زاوية تقع فى الربع الثانى ، حتا أ = $\frac{-٤}{٥}$

∴ حا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، طا أ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ حا ٢أ = ٢ حا أ حتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-٤}{٥}$ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$

حتا ٢أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ = $\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢}$ − $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

$$طا ٢أ = \frac{٢ طا أ}{١ - طا^{٢} أ} = \frac{٢ \times \frac{-٣}{٤}}{١ - \left(\frac{-٣}{٤}\right)^{٢}} = \frac{\frac{-٣}{٢}}{\frac{٧}{١٦}} = \frac{-٢٤}{٧}$$

ملاحظة يمكن إيجاد طا ٢أ بطريقة أخرى

$$طا ٢أ = \frac{حا ٢أ}{حتا ٢أ} = \frac{-٢٤}{٢٥} \div \frac{٧}{٢٥} = \frac{-٢٤}{٧}$$

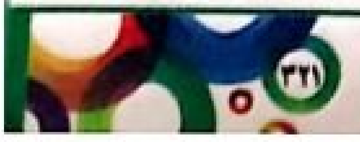
مثال (٢)

إذا كان طا ب = $\frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة كل من طا ٢ب ، طا ٤ب

الحل

$$طا ٢ب = \frac{٢ طا ب}{١ - طا^{٢} ب} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٨}{٩}} = \frac{٣}{٤}$$

$$طا ٤ب = \frac{٢ طا ٢ب}{١ - طا^{٢} ٢ب} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{٧}{١٦}} = \frac{٢٤}{٧}$$



مثال (٢)

إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث $\frac{٣\pi}{٢}$ < ب < ٢π

فأوجد قيمة كل من: جتا ٢ب ، جا (٢أ + ب) ، جتا ($\frac{أ}{٢}$ + ب)

الحل

∵ أ قياس زاوية تقع في الربع الأول ، جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ∴ جتا أ = $\frac{٣}{٥}$

∵ ب قياس زاوية تقع في الربع الرابع ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ ∴ جا ب = $\frac{-٥}{١٣}$

∴ جتا ٢ب = ٢ جتا^{٢} ب − ١ = ٢ × $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ − ١ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$

∵ جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∵ جتا ٢أ = ١ − ٢ جا^{٢} أ = ١ − ٢ × $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{-٧}{٢٥}$

∴ جا (٢أ + ب) = جا ٢أ جتا ب + جتا ٢أ جا ب

= $\frac{٢٤}{٢٥}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ + $\frac{-٧}{٢٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ = $\frac{٣٢٣}{٣٢٥}$

∵ جتا أ = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ − ١

∴ ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = جتا أ + ١ = $\frac{٣}{٥}$ + ١ = $\frac{٨}{٥}$

∴ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٨}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ∴ جا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

∴ جتا ($\frac{أ}{٢}$ + ب) = جتا $\frac{أ}{٢}$ جتا ب − جا $\frac{أ}{٢}$ جا ب

= $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ − $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ × $\frac{-٥}{١٣}$

= $\frac{٢٤}{١٣\sqrt{٥}}$ + $\frac{٥}{١٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{٢٩}{١٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{٢٩\sqrt{٥}}{٦٥}$



مثال ٤

بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من :

① $\text{جتا}\ \frac{\theta}{2}$ علمًا بأن $\text{حا}\ \theta = \frac{-4}{5}$ ، $270° > \theta > 180°$

② $\text{حا}\ 22°30'$ ③ $\text{طا}\ 15°$

الحل

① ∵ θ قياس زاوية تقع فى الربع الثالث ($270° > \theta > 180°$)

$$\therefore \text{جتا}\ \theta = \frac{-3}{5}$$

$$\therefore \text{جتا}\ \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{جتا}\ \theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{-3}{5}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore \text{جتا}\ \frac{\theta}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\because 270° > \theta > 180°\ (\div 2)$ $\therefore 135° > \frac{\theta}{2} > 90°$

∴ $\frac{\theta}{2}$ تقع فى الربع الثانى $\therefore \text{جتا}\ \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\text{حا}\ 22°30' = \text{حا}\ \frac{45°}{2}$ (لأن $45° = 2 \times 22°30'$)

$\because \text{حا}\ \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\ \theta}{2}}$ ، $22°30'$ تقع فى الربع الأول فالقيمة موجبة

$$\therefore \text{حا}\ 22°30' = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\ 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

③ $\text{طا}\ 15° = \text{طا}\ \frac{30°}{2}$ (لأن $15° = \frac{30°}{2}$)

$$= \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}\ 30°}{1 + \text{جتا}\ 30°}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

(بالضرب فى مرافق المقام $(2 - \sqrt{3})$ بسطًا ومقامًا)





$$= \sqrt{\frac{٢-\sqrt{٣}}{٢+\sqrt{٣}} \times \frac{٢-\sqrt{٣}}{٢-\sqrt{٣}}} = \sqrt{\frac{(٢-\sqrt{٣})^{٢}}{٤-٣}} = \sqrt{(٢-\sqrt{٣})^{٢}}$$

∴ طا ١٥° = ٢ − $\sqrt{٣}$

(يمكن استخدام القاعدة التالية مباشرة طا ١٥° = $\frac{\text{جا ٣٠°}}{\text{١ + جتا ٣٠°}}$)

مثال

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

١) $\frac{\text{جا ٥٠° جتا ٢٠° − جتا ٥٠° جا ٢٠°}}{\text{جا ٢٢َ٣٠° جتا ٢٢َ٣٠°}} = \sqrt{٢}$

٢) ١ − ٢ جا^{٢} $(\frac{\pi}{٤} - \text{س})$ = جا ٢ س

٣) ٢ − $\frac{\text{٢ طا ٢٢َ٣٠°}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ ٢٢َ٣٠°}}$ = ١

الحل

١) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا (٥٠° − ٢٠°)}}{\frac{١}{٢}\text{ جا ٤٥°}} = \frac{\text{جا ٣٠°}}{\frac{١}{٢}\text{ جا ٤٥°}} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$ = الطرف الأيسر

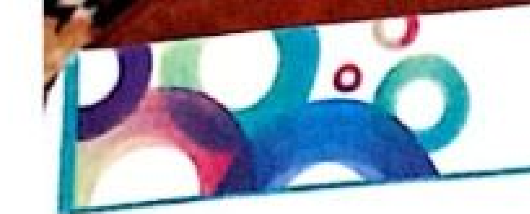
٢) الطرف الأيمن = جتا ٢ $(\frac{\pi}{٤} - \text{س})$ = جتا $(\frac{\pi}{٢} - \text{٢ س})$

= جتا (٩٠° − ٢ س) = جا ٢ س = الطرف الأيسر

٣) الطرف الأيمن = ٢ − طا ٢ (٢٢َ٣٠°)

= ٢ − طا ٤٥° = ٢ − ١ = ١ = الطرف الأيسر





مثال (٦)

أوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتى :

(١) $\text{جتا}^{٢}\,٧٥^\circ - \text{جا}^{٢}\,٧٥^\circ$

(٢) $٢\ \text{جا}\,\frac{\pi}{٨}\ \text{جتا}\,\frac{\pi}{٨}$

(٣) $\dfrac{٢\ \text{ظا}\,١٥^\circ}{١ - \text{ظا}^{٢}\,١٥^\circ}$

(٤) $٢\ \text{جتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦}$

(٥) $\dfrac{١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\,١١٢^\circ\,٣٠'}{\text{جا}\,٦٧^\circ\,٣٠'\ \text{جتا}\,٦٧^\circ\,٣٠'}$

الحل

(١) $\text{جتا}^{٢}\,٧٥^\circ - \text{جا}^{٢}\,٧٥^\circ = \text{جتا}\,(٢ \times ٧٥^\circ) = \text{جتا}\,١٥٠^\circ$

$= \text{جتا}\,(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = -\text{جتا}\,٣٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) $٢\ \text{جا}\,\frac{\pi}{٨}\ \text{جتا}\,\frac{\pi}{٨} = \text{جا}\ ٢\left(\frac{\pi}{٨}\right) = \text{جا}\,٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٣) $\dfrac{٢\ \text{ظا}\,١٥^\circ}{١ - \text{ظا}^{٢}\,١٥^\circ} = \text{ظا}\ ٢ \times ١٥^\circ = \text{ظا}\,٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٤) $٢\ \text{جتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٦} = \text{جتا}\ ٢ \times \frac{\pi}{٦} + ١ = \text{جتا}\,٦٠^\circ + ١ = \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$

(٥) $\dfrac{١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\,١١٢^\circ\,٣٠'}{\text{جا}\,٦٧^\circ\,٣٠'\ \text{جتا}\,٦٧^\circ\,٣٠'} = \dfrac{\text{جتا}\ ٢ \times ١١٢^\circ\,٣٠'}{\frac{١}{٢}\text{جا}\ ٢ \times ٦٧^\circ\,٣٠'} = \dfrac{\text{جتا}\,٢٢٥^\circ}{\frac{١}{٢}\text{جا}\,١٣٥^\circ}$

$= \dfrac{\text{جتا}\,(١٨٠^\circ + ٤٥^\circ)}{\frac{١}{٢}\text{جا}\,(١٨٠^\circ - ٤٥^\circ)} = \dfrac{-\text{جتا}\,٤٥^\circ}{\frac{١}{٢}\text{جا}\,٤٥^\circ} = \dfrac{-\frac{\sqrt{٢}}{٢}}{\frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = -٢$



مثال ٧

أثبت صحة المتطابقات الآتية :

① قتا ٢أ − ظتا ٢أ = ظا أ

② ٢ حا^{٢} ٢س + حتا ٤س = ١

③ $\frac{\text{٢ حا ٢ب − حا ٤ب}}{\text{٢ حا ٢ب + حا ٤ب}}$ = ظا^{٢}ب

الحل

ملاحظة
عند إثبات صحة متطابقات يفضل البدء بالطرف الأكبر ويفضل فك دالة ضعف الزاوية بالقوانين

① الطرف الأيمن = $\frac{\text{١}}{\text{حا ٢أ}}$ − $\frac{\text{حتا ٢أ}}{\text{حا ٢أ}}$

= $\frac{\text{١ − حتا ٢أ}}{\text{حا ٢أ}}$ = $\frac{\text{١ − (١ − ٢ حا}^{٢}\text{أ)}}{\text{٢ حا أ حتا أ}}$

= $\frac{\text{٢ حا}^{٢}\text{أ}}{\text{٢ حا أ حتا أ}}$ = $\frac{\text{حا أ}}{\text{حتا أ}}$ = ظا أ = الطرف الأيسر

② الطرف الأيمن = ٢ حا^{٢} ٢س + (١ − ٢ حا^{٢} ٢س) = ١ = الطرف الأيسر

③ الطرف الأيمن = $\frac{\text{٢ حا ٢ب − ٢ حا ٢ب حتا ٢ب}}{\text{٢ حا ٢ب + ٢ حا ٢ب حتا ٢ب}}$

= $\frac{\text{٢ حا ٢ب (١ − حتا ٢ب)}}{\text{٢ حا ٢ب (١ + حتا ٢ب)}}$ = $\frac{\text{١ − (١ − ٢ حا}^{٢}\text{ب)}}{\text{١ + (٢ حتا}^{٢}\text{ب − ١)}}$

= $\frac{\text{٢ حا}^{٢}\text{ب}}{\text{٢ حتا}^{٢}\text{ب}}$ = ظا^{٢}ب = الطرف الأيسر





مثال ٨

إذا كان $\text{حتا أ} - \text{حا أ} = \frac{١}{٢}$ فأوجد قيمة: حا ٢أ ثم أوجد: قتا أ − قا أ

الحل

بتربيع الطرفين $\therefore (\text{حتا أ} - \text{حا أ})^{٢} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{حتا}^{٢}\text{أ} + \text{حا}^{٢}\text{أ} - ٢\,\text{حا أ حتا أ} = \frac{١}{٤}$ $\therefore ١ - ٢\,\text{حا أ حتا أ} = \frac{١}{٤}$

$\therefore ١ - \frac{١}{٤} = ٢\,\text{حا أ حتا أ} = \text{حا ٢أ}$ $\therefore \text{حا ٢أ} = \frac{٣}{٤}$

$\text{قتا أ} - \text{قا أ} = \frac{١}{\text{حا أ}} - \frac{١}{\text{حتا أ}} = \frac{\text{حتا أ} - \text{حا أ}}{\text{حا أ حتا أ}}$

$= \frac{٢(\text{حتا أ} - \text{حا أ})}{\text{حا ٢أ}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٤}{٣}$

مثال ٩

أثبت أن: $\frac{\text{حا ٢أ}}{\text{حا أ}} - \frac{\text{حتا ٢أ}}{\text{حتا أ}} = \text{قا أ}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{٢\,\text{حا أ حتا أ}}{\text{حا أ}} - \frac{٢\,\text{حتا}^{٢}\text{أ} - ١}{\text{حتا أ}}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{٢\,\text{حا أ حتا}^{٢}\text{أ} - ٢\,\text{حا أ حتا}^{٢}\text{أ} + \text{حا أ}}{\text{حا أ حتا أ}} = \frac{\text{حا أ}}{\text{حا أ حتا أ}}$

$= \frac{١}{\text{حتا أ}} = \text{قا أ} =$ الطرف الأيسر





مثال ١٠

أثبت أن: $\frac{\text{١} - \text{جتا ٢أ}}{\text{جا ٢أ}} = \text{ظا أ}$ ومن ثم أوجد قيمة: $\text{ظا } \frac{\pi}{\text{٨}}$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{١} - (\text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\text{أ})}{\text{٢ جا أ جتا أ}} = \frac{\text{٢ جا}^{\text{٢}}\text{أ}}{\text{٢ جا أ جتا أ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \text{ظا أ}$$

$$\text{ظا } \frac{\pi}{\text{٨}} = \frac{\text{١} - \text{جتا } \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{جا } \frac{\pi}{\text{٤}}} = \frac{\text{١} - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}}{\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}} = \sqrt{\text{٢}}\left(\text{١} - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\right) = \sqrt{\text{٢}} - \text{١}$$

مثال ١١

إذا كان ظا (٢أ + ب) = ١ وكان $\text{ظا أ} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$. أثبت أن: $\text{ظا ب} = \frac{\text{١}}{\text{٧}}$

الحل

$$\text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ}} = \frac{\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}}}{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٩}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

$$\because \text{ظا (٢أ + ب)} = \frac{\text{ظا ٢أ} + \text{ظا ب}}{\text{١} - \text{ظا ٢أ ظا ب}} = \text{١}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{٣}}{\text{٤}} + \text{ظا ب}}{\text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ ظا ب}} = \text{١}$$

$\therefore \frac{\text{٣}}{\text{٤}} + \text{ظا ب} = \text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ ظا ب}$ $\qquad$ $\therefore \text{ظا ب} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ ظا ب} = \text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

$\therefore \frac{\text{٧}}{\text{٤}} \text{ ظا ب} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$ $\qquad$ $\therefore \text{ظا ب} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \frac{\text{٤}}{\text{٧}} = \frac{\text{١}}{\text{٧}}$



مثال (١٢)

إذا كانت ما ٤أ = $\frac{٤}{٥}$ فأوجد قيمة: ما أ حتا^٣ أ − حتا أ ما^٣ أ

الحل

ما أ حتا^٣ أ − حتا أ ما^٣ أ = ما أ حتا أ (حتا^٢ أ − ما^٢ أ)

= $\frac{١}{٢}$ ما ٢أ حتا ٢أ

= $\frac{١}{٤}$ ما ٤أ = $\frac{١}{٤} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٥}$

مثال (١٣)

إذا كان أ + ب = ١٣٥° حيث أ ، ب قياسا زاويتين وكان طا أ = $\frac{٤}{٣}$

فأوجد قيمة: ما ٢ب

الحل

∵ أ + ب = ١٣٥° ∴ ب = ١٣٥° − أ

∴ طا ب = طا (١٣٥° − أ)

طا ب = $\frac{\text{طا } ١٣٥° - \text{طا أ}}{١ + \text{طا } ١٣٥° \text{ طا أ}} = \frac{-١ - \text{طا أ}}{١ - \text{طا أ}}$

= $\frac{-١ - \frac{٤}{٣}}{١ - \frac{٤}{٣}} = \frac{-\frac{٧}{٣}}{-\frac{١}{٣}} = ٧$

∵ طا ب موجبة ومجموع الزاويتين ١٣٥°

∴ ب تقع فى الربع الأول

∴ ما ٢ب = ٢ ما ب حتا ب = ٢ × $\frac{٧}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٧}{٢٥}$



Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٤)

أوجد قيم س المحصورة بين ٠ ، ٢ π والتى تحقق المعادلة :

حتا س + حتا ٢ س = ٠

الحل

∵ حتا س + ٢ حتا^{٢} س - ١ = ٠ ∴ ٢ حتا^{٢} س + حتا س - ١ = ٠

(٢ حتا س - ١) (حتا س + ١) = ٠

إما حتا س = $\frac{١}{٢}$ أو حتا س = -١

∵ حتا س = $\frac{١}{٢}$ (عدد موجب) ∴ تقع فى الربع الأول أو الرابع

∴ الزاوية الموجبة التى جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ هى ٦٠°

∴ س = ٦٠° (الربع الأول) أو س = ٣٦٠° - ٦٠° = ٣٠٠° (الربع الرابع)

∵ حتا س = -١ ∴ س = ١٨٠°

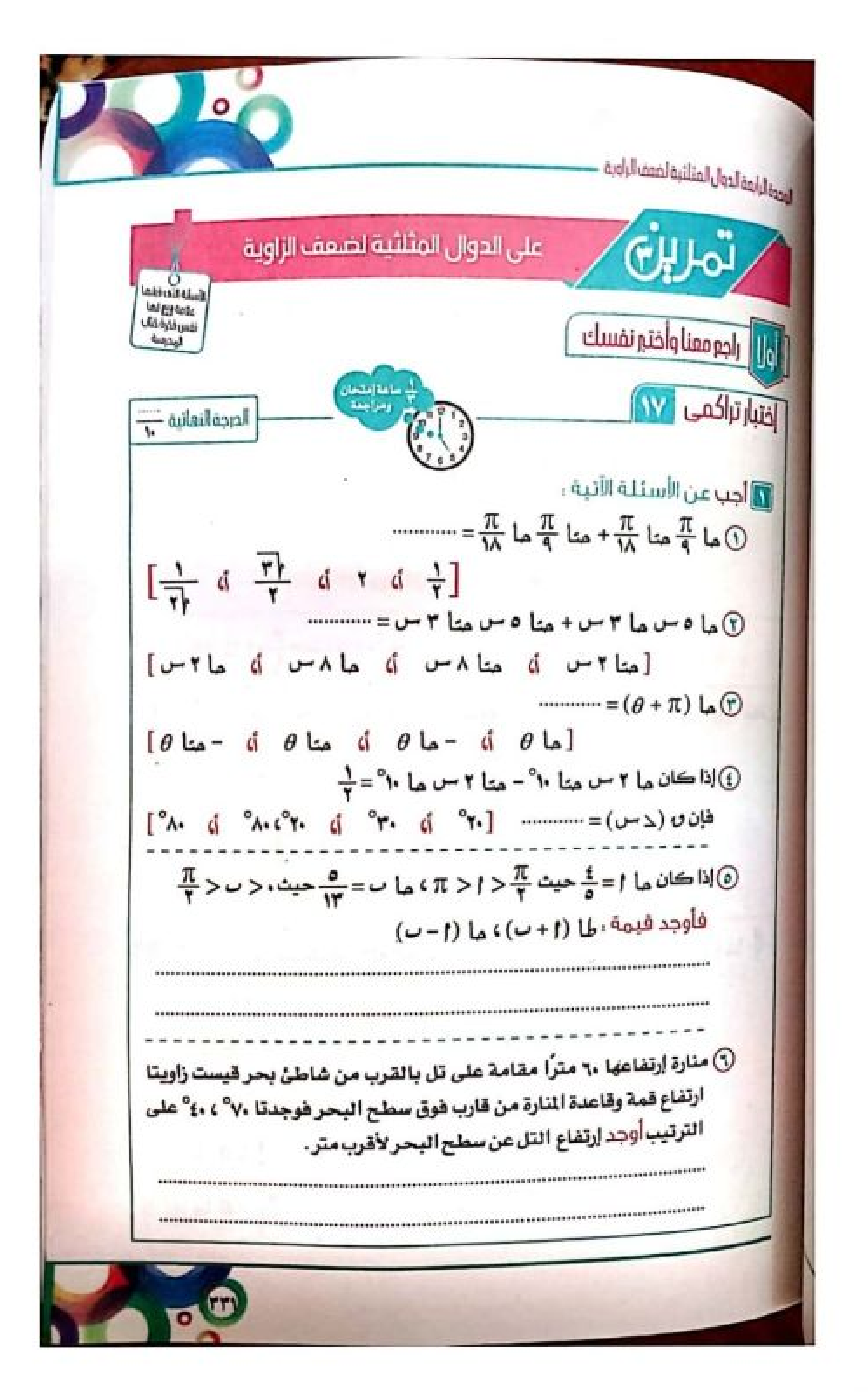
∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠°

حل آخر

نوجد الصورة العامة س = ± $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ن π أو س = π + ٢ ن π

وبوضع ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، .... نوجد القيم التى تحقق المعادلة





تمرين ٣ على الدوال المثلثية لضعف الزاوية

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

اختبار تراكمي ١٧

½ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية ...... / ١٠

١ أجب عن الأسئلة الآتية:

① جا $\frac{\pi}{9}$ جتا $\frac{\pi}{18}$ + جتا $\frac{\pi}{9}$ جا $\frac{\pi}{18}$ = ...

[$\frac{1}{2}$ ، ٢ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$]

② جا ٥س جا ٣س + جتا ٥س جتا ٣س = ...

[جتا ٢س ، جتا ٨س ، جا ٨س ، جا ٢س]

③ جا $(\pi + \theta)$ = ...

[جا θ ، − جا θ ، جتا θ ، − جتا θ]

④ إذا كان جا ٢س جتا ١٠° − جتا ٢س جا ١٠° = $\frac{1}{2}$

فإن ق (∠س) = ... [٢٠° ، ٣٠° ، ٢٠°، ٨٠° ، ٨٠°]

---

⑤ إذا كان جا أ = $\frac{4}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2}$ < أ < π ، جا ب = $\frac{5}{13}$ حيث ٠ < ب < $\frac{\pi}{2}$

فأوجد قيمة: ظا (أ + ب) ، جا (أ − ب)

....

....

---

⑥ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدتا ٧٠° ، ٤٠° على الترتيب أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر.

....

....



ثانيا مسائل المستوى الأول

٢ بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

① ٢ جا ١٥° جتا ١٥° [$\frac{١}{٢}$]

② ٢ جا ٢٢ َ٣٠ ٢٢° جتا ٢٢ َ٣٠ ٢٢° [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$]

③ ٢ جتا^٢ ٢٢ َ٣٠ ٢٢° - ١ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$]

④ جتا^٢ ٧٥° - جا^٢ ٧٥° [$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$]

⑤ $\frac{\text{٢ ظا ١٥°}}{\text{١ - ظا}^٢ \text{ ١٥°}}$ [$\frac{١}{\sqrt{٣}}$]

⑥ $\frac{\text{٢ ظا ٢٢ َ٣٠ ٢٢°}}{\text{١ - ظا}^٢ \text{ ٢٢ َ٣٠ ٢٢°}}$ [١]

⑦ $\frac{\text{جتا ٤٣° جتا ٣٧° + جا ٤٣° جا ٣٧°}}{\text{جا ٤٢° جتا ٤٢°}}$ [٢]

---

٣ إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ، < أ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد قيمة : جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا ٢أ [$\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$]

---

٤ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من جا ٢ θ ، جتا ٢ θ ، ظا ٢ θ إذا كان:

① جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$

② جتا $\theta = \frac{١}{٣}$ ، $٠° < \theta < \frac{\pi}{٢}$

③ قتا $\theta = -\frac{٥}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

④ ظا $\theta = \frac{٣}{٢}$ ، $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$

---

٥ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : جا ٢ θ ، جتا ٢ θ ، جا $\frac{\theta}{٢}$ ، جتا $\frac{\theta}{٢}$ إذا كان:

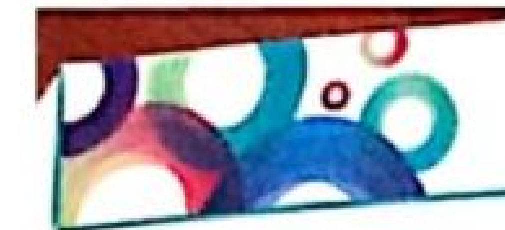
① جتا $\theta = \frac{١}{٤}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$

② جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

③ ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

④ جا $\theta = \frac{-١٥}{١٧}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$





١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ٢ جا ٢٠° جتا ٢٠° = ... [جتا ٤٠° ، جا ٤٠° ، ظا ٤٠° ، قا ٤٠°]

② جا ٣٥° جتا ٣٥° = ...

[½ جا ٧٠° ، ½ جتا ٧٠° ، جا ٧٠° ، جتا ٧٠°]

③ جتا² ٢٥° − جا² ٢٥° = ... [جا ٠° ، جا ٥٠° ، جتا ٥٠° ، جتا ٠°]

④ ١ − ٢ جا² ٤٠° = ...

[½ جا ٨٠° ، جا ٨٠° ، جتا ٨٠° ، ½ جتا ٨٠°]

⑤ ظا ٤٠° / (١ − ظا² ٤٠°) = ...

[½ ظا ٨٠° ، ظا ٨٠° ، ½ ظتا ٨٠° ، ظتا ٨٠°]

⑥ ٢ ظا ٢٢°٣٠′ / (١ − ظا² ٢٢°٣٠′) = ...

[ظا ٣٠° ، ظا ٤٥° ، ظتا ٤٥° ، جا ٤٥°]

⑦ جا ٢٥° جتا ٣٥° − جتا ٢٥° جا ٣٥° = ...

[−جتا ١٠° ، جا ١٠° ، −جا ١٠° ، جتا ١٠°]

⑧ جتا ٤٠° جتا ١٠° + جا ٤٠° جا ١٠° = ...

[−جا ٣٠° ، −جتا ٣٠° ، جا ٣٠° ، جتا ٣٠°]

⑨ (ظا ٥٠° − ظا ٤٠°) / (١ + ظا ٥٠° ظا ٤٠°) = ...

[ظا ١٠° ، ظتا ١٠° ، ظا ٩٠° ، ظتا ٩٠°]

⑩ (١ − ظا ٧٠° ظا ١٠°) / (ظا ٧٠° + ظا ١٠°) = ...

[ظا ٦٠° ، ظا ٨٠° ، ظتا ٨٠° ، ظتا ٦٠°]

⑪ (١ − جتا ٢θ + جا ٢θ) / (١ + جتا ٢θ + جا ٢θ) = ...

[ظا θ ، ظتا θ ، جا θ ، قا θ]

⑫ (١ − جتا θ + جا θ) / (١ + جتا θ + جا θ) = ...

[ظا θ ، ظا ٢θ ، ظا θ/٢ ، ظتا θ/٢]







ثالثا مسائل المستوى الثانى

٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ١ − ٢ حا^{٢} ١٥° = ...

[حا ٣٠° أ، حتا ٣٠° أ، طا ٣٠° أ، حا ١٥°]

(٢) حتا^{٢} ٣ س − حا^{٢} ٣ س = ...

[حا ٦ س أ، حا ٣ س أ، حتا ٦ س أ، طا ٦ س]

(٣) ٢ حا ٣ θ حتا ٣ θ = ...

[حا ٦ θ أ، حتا ٦ θ أ، قا ٦ θ أ، قتا ٦ θ]

(٤) إذا كان حا θ = $\frac{٣}{٤}$ فإن حتا ٢ θ = ... [$\frac{-١}{٤}$ أ، $\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{-١}{٨}$ أ، $\frac{١}{٨}$]

(٥) إذا كان حا س = $\frac{٣}{٥}$ حيث س ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[فإن حا ٢ س = ...

[$\frac{-٧}{٢٥}$ أ، $\frac{-٢٤}{٢٥}$ أ، $\frac{٧}{٢٥}$ أ، $\frac{٢٤}{٢٥}$]

(٦) ٤ حا ١٥° حتا ١٥° حتا ٣٠° = ... [$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٣}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{-١}{٢}$]

(٧) إذا كان حتا س = $\frac{٤}{٥}$ فإن حتا $\frac{س}{٢}$ = ...

[$\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ أ، $\pm\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ أ، $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ أ، $\pm\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$]

(٨) إذا كان $\frac{\text{طا } ٣٠َ\ ٢٢°}{١ - \text{طا}^{٢}\ ٣٠َ\ ٢٢°}$ = ... [١ أ، −١ أ، $\frac{-١}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$]

(٩) إذا كان $\frac{\text{طا } \theta}{١ - \text{طا}^{٢}\ \theta}$ = $\frac{٣}{٤}$ فإن طا ٢ θ = ...

[$\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{٣}{٤}$ أ، $\frac{٢}{٣}$]

(١٠) حا ٦ س = حا ٣ س × ....

[حا ٣ س أ، ٢ حتا س أ، ٢ حتا ٣ س أ، حتا ٣ س]

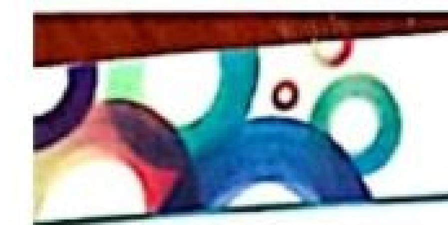
٨ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حا ٢ أ = ... [٢ حا أ أ، ١ − ٢ حا^{٢} أ أ، ٢ حا أ حتا أ أ، حا^{٢} أ]

(٢) حتا^{٢} س − حا^{٢} س = ...

[١ أ، حا ٢ س أ، حتا ٢ س أ، ٢ حا س حتا س]





③ جا أ جتا أ = ...

[$\frac{١}{٢}$ جا ٢أ ، جا ٢أ ، جتا ٢أ ، $\frac{١}{٢}$ جتا ٢أ]

④ $\frac{\text{طا } أ}{\text{طا}^٢ أ - ١}$ = ... [$-\frac{١}{٢}$ طا ٢أ ، ٢ طا أ ، − طا ٢أ ، $\frac{١}{٢}$ طا أ]

⑤ إذا كان جا أ = $\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$ فإن جتا ٢أ = ...

[$\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٨}{٢٥}$ ، $\frac{-١٧}{٢٥}$ ، $\frac{١٧}{٢٥}$]

⑥ إذا كانت جتا هـ = $\frac{١}{٣}$ فإن جتا ٢هـ = ...

[صفر ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

⑦ ٢ جتا^٢ ١٥° − ١ = ... [٢ جتا ١٥° ، جا ١٥° ، جتا ٣٠° ، جا ٣٠°]

⑧ ١ − ٢ جا^٢ ٥٠° = ...

[جتا ١٠٠° ، جتا ٥٠° ، جا ١٠٠° ، جا ٥٠°]

⑨ ٢ جا ٣س جتا ٣س = ...

[جا ٣س ، جا ٦س ، صفر ، جا ٥س]

⑩ إذا كان جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن جا ٢س = ...

[$\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{٣٦}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، ١]

⑪ ٤ جا $٧\frac{١}{٢}$° جتا $٧\frac{١}{٢}$° جتا ١٥° = ... [$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$]

⑫ طا ١٥° = ... [٢ − $\sqrt{٣}$ ، − $\sqrt{٣}$ − ٢ ، $\sqrt{٣}$ − ٢ ، $\sqrt{٣}$ + ٢]

⑬ إذا كان جتا س = $\frac{٤}{٥}$ فإن جا $\frac{س}{٢}$ = ...

[$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ± $\frac{١}{٥}$ ، ± $\frac{١}{٢}$ ، ± $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$]

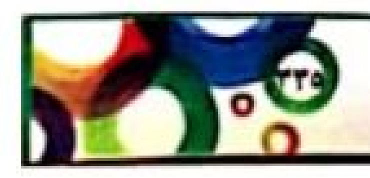
⑭ $\frac{\text{طا } ١٥°}{(١ - \text{طا } ١٥°)(١ + \text{طا } ١٥°)}$ = ... [$\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ ، ١]

⑮ جتا^٢ هـ − جتا ٢هـ = ...

[جا هـ ، جتا هـ ، جا^٢ هـ ، طا هـ]

⑯ ١ + جتا ٤أ = ...

[٢ جتا^٢ ٤أ ، جتا^٢ ٢أ ، جتا^٢ ٤أ ، ٢ جتا^٢ ٢أ]



٩ إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{\pi}{٢} < أ < \pi$ أوجد كل من جا ٢أ ، جتا ٢أ [$\frac{-١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{١١٩}{١٦٩}$]

---

١٠ إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، ظا ب = − $\frac{١٢}{٥}$ حيث ب ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

فأوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة كل من جتا ٢أ ، ظا ٢ب [$\frac{-٧}{٢٥}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$]

---

١١ إذا علمت أن جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث أ قياس زاوية حادة أوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا ٢أ ، جتا $\frac{أ}{٢}$ [$\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{-١١٩}{١٦٩}$ ، $\frac{-١٢٠}{١١٩}$ ، $\frac{٣\sqrt{١٣}}{١٣}$]

---

١٢ إذا كانت ٤ ظا س = ٣ ، س ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

أوجد قيمة جا ٢س ، جتا ٢س ، ظا ٢س [$\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$]

---

١٣ إذا كانت جا هـ = − $\frac{٣}{٥}$ حيث هـ ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

أوجد : ① ١٠ جا ٢هـ + ١٢ ظا هـ [$\frac{٩٣}{٥}$]

② $\frac{جا ٢هـ}{٢ جتا ٢هـ}$ ③ $\frac{جتا ٢هـ}{جا ٢هـ}$ [$\frac{١٢}{٧}$ ، $\frac{٧}{٢٤}$]

---

١٤ إذا كان جتا ب = $\frac{-٤}{٥}$ ، $\pi < ب < \frac{٣\pi}{٢}$ بدون إستخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة $\frac{جا ٢ب}{جتا ٢ب}$ [$\frac{٢٤}{٧}$]

---

١٥ إذا كان ٥ جا أ = ٣ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة

قيمة جتا (٢أ + ٩٠°) ، جتا ٢أ [$\frac{-٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$]

---

١٦ إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

فأثبت بدون إستخدام الآلة الحاسبة أن ظا (أ + ٢ب) = ١

---

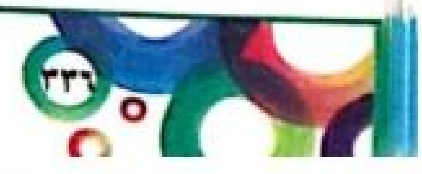
١٧ إذا كان أ ، ب قياسا زاويتين حادتين وكان ٣ ظا أ = ٤ ، ظا ب = $\frac{١}{٩}$

أوجد : ظا ٢ب ، ظا (أ − ٢ب) ، جتا ٢ب [$\frac{٩}{٤٠}$ ، $\frac{١٣٣}{١٥٦}$ ، $\frac{٤٠}{٤١}$]

---

١٨ إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة

قيمة $\frac{١ + جا ٢أ}{١ + جتا ٢أ}$ [$\frac{٨}{٩}$]





١٩ إذا كانت طا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، ما ب = $\frac{٤}{٥}$ حيث ب ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[
فأوجد قيمة كل من قا (٢ أ + ب) ، قتا (٢ أ − ب) ، طا (٢ أ + ب) [$-\frac{٢٥}{٢٤}$ ، −١٠ ، $\frac{-٢٤}{٧}$]

٢٠ إذا كان حتا ٢ أ = $\frac{٧}{٨}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد قيمة ما أ ، حتا ٤ أ [$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١٧}{٣٢}$]

٢١ إذا كانت طا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث ب ∈]٠° ، ٣٦٠°[
فأوجد قيمة طا ٢ ب ، طا $\frac{ب}{٢}$ [$\frac{٢٤}{٧}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، −٣]

٢٢ إذا كانت حتا س = $\frac{٤}{٥}$ حيث س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[
فأوجد قيمة ٢ حتا ٢ س + ما (٢ س − ١٨٠°) [$\frac{٢}{٥}$]

٢٣ إذا كان أ قياس زاوية حادة ، حتا ٢ أ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$ بدون إستخدام الآلة الحاسبة
أوجد قيمة ما أ ، حتا أ ، طا ٢ أ [$\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$]

٢٤ إذا كان ما $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ بدون إستخدام الآلة الحاسبة
أوجد قيمة حتا $\frac{أ}{٢}$ ، ما أ ، حتا أ [$\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$]

٢٥ بدون إستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من :

① حتا ٢٢° ٣٠َ [$\frac{\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}{٢}$]
② طا ٦٧° ٣٠َ [$\sqrt{٣+٢\sqrt{٢}}$]
③ ما ١٥° [$\frac{\sqrt{٢-\sqrt{٣}}}{٢}$]

٢٦ أثبت صحة المتطابقات الآتية :

① طا أ ما ٢ أ = ٢ ما^{٢} أ
② طا س + طتا س = ٢ قتا ٢ س
③ ٢ قتا ٢ هـ = قتا هـ قا هـ
④ حتا^{٤} هـ − ما^{٤} هـ = حتا ٢ هـ
⑤ (طا س + طتا س) ما ٢ س = ٢
⑥ قتا^{٢} أ (١ − حتا ٢ أ) = ٢
⑦ ١ − $\frac{١}{٢}$ ما ٢ أ طا أ = حتا^{٢} أ
⑧ طتا ب − طا ب = ٢ طتا ٢ ب
⑨ قتا ٢ س + طتا ٢ س = طتا س ثم إستخدم ذلك فى إيجاد قيمة طتا ١٥° بدون إستخدام الآلة الحاسبة.
⑩ حتا ٢ س = $\frac{١ - طا^{٢} س}{١ + طا^{٢} س}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{١ - طا^{٢} ١٥°}{١ + طا^{٢} ١٥°}$ بدون إستخدام الآلة الحاسبة.



(١١) $\frac{\text{جتا } ٢ \text{ س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}} = \text{جتا س} + \text{جا س}$

(١٢) $\frac{١ - \text{جتا } ٢ أ}{٣ + \text{جتا } ٢ أ} = \frac{\text{جا}^٢ أ}{١ + \text{جتا}^٢ أ}$

(١٣) $\frac{\text{جا } (\pi - ٢ \text{ هـ})}{١ - \text{جتا } ٢ \text{ هـ}} = \text{ظتا هـ}$

(١٤) $\frac{\text{ظتا } \theta - ١}{\text{ظتا } \theta + ١} = \frac{\text{جتا } ٢ \theta}{١ + \text{جا } ٢ \theta}$ ومن ذلك **أوجد** قيمة: $\frac{\text{ظتا } ٣٠' ٢٢° - ١}{\text{ظتا } ٣٠' ٢٢° + ١}$

(١٥) $\frac{١ - \text{جتا هـ} + \text{جا هـ}}{١ + \text{جتا هـ} + \text{جا هـ}} = \text{ظا } \frac{\text{هـ}}{٢}$

(١٦) $٢ \text{ جا}^٢ ٢ أ + \text{جتا } ٤ أ = ١$

(١٧) $٢ \text{ جتا}^٢ \left(\frac{\pi}{٤} - \frac{٣ \text{ س}}{٢}\right) = ١ + \text{جا } ٣ \text{ س}$

(١٨) $\text{جتا}^٢ أ = \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا } ٢ أ)$ ومن ذلك **أوجد** قيمة جتا ١٥° بدون إستخدام الآلة الحاسبة

(١٩) $\frac{٢ \text{ جا } أ - \text{جا } ٢ أ}{\text{جا}^٣ أ} = \text{قا}^٢ \frac{أ}{٢}$

(٢٠) $\frac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{١ + \text{جتا } ٢ \text{ س}} = \text{ظا س}$

٢٧ إذا كان ٤ جتا ٢ هـ − ٣ جا ٢ هـ = ٠، **فأوجد** بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة ظا هـ حيث هـ قياس زاوية حادة موجبة.

$\left[\frac{١}{٢}\right]$

٢٨ إذا كان ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣ **فأثبت** بدون إستخدام الآلة الحاسبة أن:

$\text{ظا } \frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{٤}{٣}$ حيث هـ قياس زاوية حادة موجبة

٢٩ **أوجد** قيم س المحصورة بين ٠°، ٢ π والتى تحقق كل معادلة مما يأتى:

(١) جا ٢ س = جا س

(٢) جا ٢ س = جتا س

(٣) $\text{جتا}^٢ \text{ س} - \text{جا}^٢ \text{ س} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٤) $١ - ٢ \text{ جتا}^٢ \text{ س} = \frac{١}{٢}$

(٥) $\text{جا}^٢ ٢ \text{ س} + ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س} + ١ = ٠$

(٦) $\text{جتا}^٢ ٢ \text{ س} - ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س} + ١ = ٠$

(٧) جتا ٢ س + ٣ جا س = ٢

(٨) $٤ \text{ جا } \frac{\text{س}}{٢} \text{ جتا } \frac{\text{س}}{٢} + \sqrt{٣} = ٠$

(٩) $\text{ظا}^٢ \text{ س} + ٢ \sqrt{٣} \text{ ظا س} = ١$

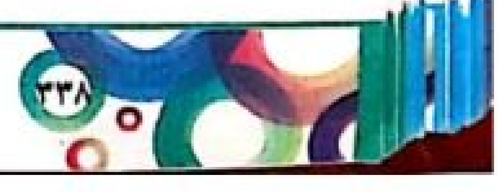
(١٠) $\text{ظا}^٢ \frac{\text{س}}{٢} + ٢ \text{ ظا } \frac{\text{س}}{٢} = ١$

(١١) $\text{جتا س} - ٢ \text{ جا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ س} = ٠$

٣٠ إذا كان جا ٢ س = $\frac{١}{٥}$ **فأوجد** بدون إستخدام حاسبة الجيب

قيمة جا ٣ س جتا س + جتا ٣ س جا س

[[illegible]]





٣١ أثبت أن $جتا^{٢}\ أ = \frac{١}{٢}(١ + جتا\ ٢أ)$ ومن ذلك وبدون إستخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة جتا ١٥° $\left[\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}\right]$

---

٣٢ أثبت أن: $\frac{١ - جتا\ ب}{جا\ ب} = ظا\ \frac{ب}{٢}$ ومن ذلك إستنتج قيمة ظا ٧٥°

بدون إستخدام الآلة الحاسبة. $[٢ + \sqrt{٣}]$

---

٣٣ إذا كان ٤ جتا أ = قتا أ حيث أ ∈ $]٠، \frac{\pi}{٢}[$ فأوجد قيمة : أ [١٥° أو ٧٥°]

---

٣٤ إذا كان $جا\ ب\ جتا^{٣}\ ب - جتا\ ب\ جا^{٣}\ ب = \frac{١}{٤}$ فأوجد : ق (∠ب)

ثم أثبت أن: جتا ٤ ب = صفر $\left[\frac{١}{٢}\ ٢٢°\right]$

---

٣٥ إذا كان $ظا\ أ = \frac{١}{٣}$ ، $ظا\ ب = \frac{١}{٧}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتان حادتان موجبتان

فأثبت أن: ٢ أ + ب = ٤٥°

---

٣٦ إذا كان $ظا\ أ = \frac{١}{٣}$ ، ظا (٢أ + ب) = ١ أثبت أن: $ظا\ ب = \frac{١}{٧}$

---

٣٧ أ ب حـ مثلث فيه ظا أ = ١ ، $ظتا\ ب = \frac{١}{٢}$ أوجد : ظا حـ ، ظا ٢ حـ $\left[٣ ، \frac{-٣}{٤}\right]$

---

٣٨ إذا كان أ قياس أصغر زاوية موجبة وكان $جا\ أ = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة كل من :

ظا (١٨٠° - ٢أ) ، جا (٢أ - ٩٠°) ، جتا (٢أ - ٣٦٠°) $\left[\frac{-٢٤}{٧} ، \frac{-٧}{٢٥} ، \frac{٧}{٢٥}\right]$

---

٣٩ إذا كان أ = ظا ٢ س ، ب = ظا س فأثبت أن: $أ(١ - ب^{٢}) = ٢ب$

---

٤٠ ركل لاعب كرة القدم بزاوية قياسها ٣٠° مع سطح الأرض وبسرعة إبتدائية مقدارها ١٤,٧ م/ث إذا كانت المسافة الأفقية فى التى تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة

$ن = \frac{٢ع^{٢}\ جا\ \theta\ جتا\ \theta}{د}$ حيث د عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^{٢} ، ع السرعة الإبتدائية

① ضع العلاقة السابقة فى أبسط صورة.

② أوجد المسافة الأفقية فى التى تقطعها الكرة بالمتر [١٩ متر]



رابعا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤١ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان جتا ٣٦° = $\frac{\sqrt{٥}+١}{٤}$ فإن جتا ٧٢° = ...

[$\frac{\sqrt{٥}-١}{٤}$ أ، $\frac{\sqrt{٣}+٢}{٤}$ أ، $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ أ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

② إذا كان أ ب جـ مثلث فيه جا ² أ + جا ² ب = ١ فإن جتا ٢ جـ = ...

[−١ أ، صفر أ، $\frac{١}{٢}$ أ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

③ إذا كان ظا ٢ س = $\frac{٣}{٤}$ فإن جا س = ... حيث ٠° < ٢ س < ٩٠°

[$\frac{١}{٣}$ أ، $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ أ، $\frac{\sqrt{١٠}}{٣}$ أ، $\frac{\sqrt{١٠}}{٩}$]

④ إذا كان ظا ٢ س + ظتا ٢ س = ٧ فإن جا ٤ س = ...

[$\frac{٢}{٥}$ أ، $\frac{٥}{٢}$ أ، $\frac{٢}{٧}$ أ، $\frac{٧}{٢}$]

⑤ إذا كان جتا هـ − جا هـ = $\frac{١}{٢}$ فإن جا (١٨٠° + ٢ هـ) = ...

[$\frac{٣}{٤}$ أ، $\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{-٣}{٤}$ أ، $\frac{-٤}{٣}$]

⑥ $\frac{\text{جا أ}}{١ + \text{جتا أ}}$ = ... [جا $\frac{أ}{٢}$ أ، جتا $\frac{أ}{٢}$ أ، ظا $\frac{أ}{٢}$ أ، ظتا $\frac{أ}{٢}$]

⑦ إذا كان جتا ² س − جا ² س = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < س < $\frac{\pi}{٤}$

فإن جا س جتا ٣ س + جتا س جا ٣ س = ...

[$\frac{٣}{٥}$ أ، $\frac{٢٤}{٢٥}$ أ، $\frac{١٢}{٢٥}$ أ، $\frac{٧}{٢٤}$]

---

٤٢ إذا كان جا أ − جتا أ = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ حيث أ ∋] $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

فأوجد قيمة كل من جا ٢ أ ، جتا ٢ أ ، ظا ٢ أ [$\frac{٦}{٧}$ ، $\frac{-\sqrt{١٣}}{٧}$ ، $\frac{-٦\sqrt{١٣}}{١٣}$]

---

٤٣ إذا كان جتا أ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، جا ب = $\frac{٣}{٥}$ حيث أ ، ب هما قياسا زاويتين حادتين

فأوجد قيمة كل من جتا $\left(\frac{أ}{٢} + ب\right)$ ، جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ [$\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٩\sqrt{١٠}}{٥٠}$]



٤٤ إذا كان جا س جتا س = $\frac{٣}{١٠}$ حيث س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

أوجد جتا (٢ س + ٩٠°) ، جا (٣٦٠° − ٢ س) [$\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$]

---

٤٥ أثبت أن: $\frac{\text{٢ ظا هـ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ هـ}}$ = جا ٢ هـ ثم أوجد : $\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}\text{ ظا }\frac{١}{٢}\text{ ٢٢°}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ }\frac{١}{٢}\text{ ٢٢°}}$ [١]

---

٤٦ أثبت أن: $\frac{\text{جا أ + جا ٢أ}}{\text{١ + جتا أ + جتا ٢أ}}$ = ظا أ ، ثم أوجد : $\frac{\text{جا ٤٥° + جا ٩٠°}}{\text{١ + جتا ٤٥° + جتا ٩٠°}}$ [١]

---

٤٧ أثبت أن: $\frac{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ أ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ أ}}$ = جتا ٢أ ، ثم أوجد : $\frac{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ }\frac{\pi}{١٢}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ }\frac{\pi}{١٢}}$ [$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

---

٤٨ أثبت أن: $\frac{\text{جتا ٢أ}}{\text{١ + جا ٢أ}} = \frac{\text{١ − ظا أ}}{\text{١ + ظا أ}}$

---

٤٩ أثبت أن: قا ٢أ + ظا ٢أ = ظتا أ

---

٥٠ أثبت أن: $\frac{\text{جتا أ − جا أ}}{\text{جتا أ + جا أ}}$ = قا ٢أ − ظا ٢أ

---

٥١ أثبت أن: ظا $\frac{ب}{٢} = \frac{\text{جا ب}}{\text{١ + جتا ب}}$

---

٥٢ أثبت أن: $\frac{\text{جا ٣ ب}}{\text{جا ب}} - \frac{\text{جتا ٣ ب}}{\text{جتا ب}}$ = ٢

---

٥٣ أثبت أن: (١ − ظا أ)^{٢} = $\frac{\text{١ − جا ٢أ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ أ}}$

---

٥٤ أثبت أن: جتا ٤أ = ٨ جتا^{٤} أ − ٨ جتا^{٢} أ + ١ وإذا كان جا أ = $\frac{١}{٢}$

فأوجد جتا ٤أ [$\frac{-١}{٢}$]

---

٥٥ بدون إستخدام الحاسبة أثبت أن : ظا^{٢} ١٥° + ٢$\sqrt{٣}$ ظا ١٥° = ١

---

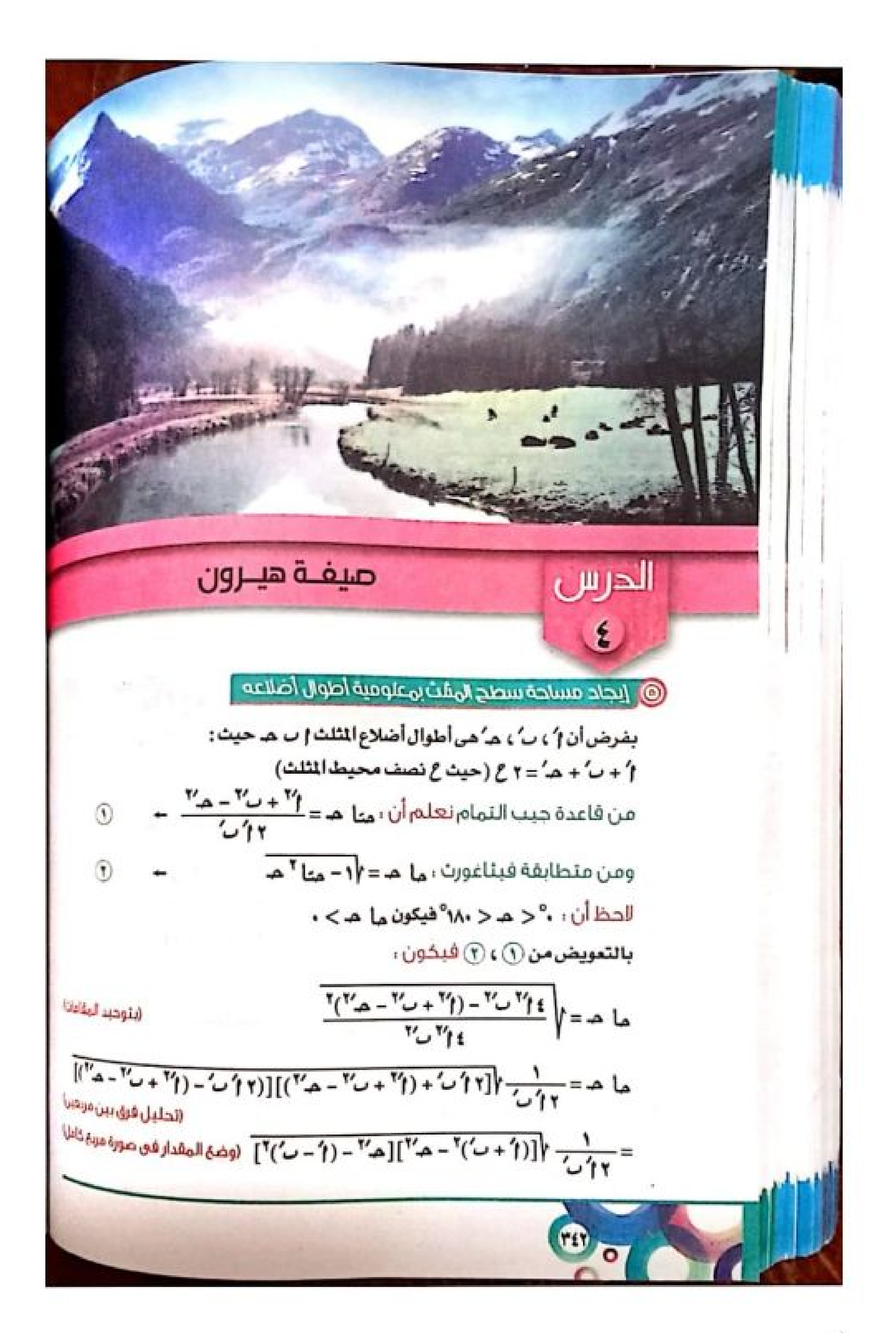
٥٦ إذا كان س − ٢ ص = ١٨٠° وكان ظا ص = $\frac{١}{٤}$ أثبت أن : ظا س = $\frac{٨}{١٥}$

ثم أوجد $\frac{٤٧}{١٣}$ ظتا (س + ص) [٤]

---

٥٧ أثبت أن: جا ٣أ = ٣ جا أ − ٤ جا^{٣} أ





الدرس ٤

صيغة هيرون

إيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه

بفرض أن أَ ، بَ ، جـَ هي أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ حيث :

أَ + بَ + جـَ = ٢ ع (حيث ع نصف محيط المثلث)

من قاعدة جيب التمام نعلم أن : $\text{جتا جـ} = \dfrac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$ ← (١)

ومن متطابقة فيثاغورث : $\text{جا جـ} = \sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\,\text{جـ}}$ ← (٢)

لاحظ أن : ٠° < جـ < ١٨٠° فيكون جا جـ > ٠

بالتعويض من (١) ، (٢) فيكون :

$$\text{جا جـ} = \sqrt{\dfrac{٤\,\text{أَ}^{٢}\,\text{بَ}^{٢} - (\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢})^{٢}}{٤\,\text{أَ}^{٢}\,\text{بَ}^{٢}}}$$ (بتوحيد المقامات)

$$\text{جا جـ} = \dfrac{١}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}} \sqrt{[٢\,\text{أَ}\,\text{بَ} + (\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢})][(٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}) - (\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢})]}$$

(تحليل فرق بين مربعين)

$$= \dfrac{١}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}} \sqrt{[(\text{أَ} + \text{بَ})^{٢} - \text{جـَ}^{٢}][\text{جـَ}^{٢} - (\text{أَ} - \text{بَ})^{٢}]}$$ (وضع المقدار في صورة مربع كامل)

$$=\frac{1}{2\,أ'\,ب'}\sqrt{(أ'+ب'+جـ')(ب'+جـ'-أ')(أ'+جـ'-ب')(أ'+ب'-جـ')}$$

(بالتحليل كفرق بين مربعين)

$$=\frac{1}{2\,أ'\,ب'}\sqrt{2ع\,(أ'+ب'+جـ'-2أ')(أ'+ب'+جـ'-2ب')(أ'+ب'+جـ'-2جـ')}$$

$$=\frac{1}{2\,أ'\,ب'}\sqrt{2ع\,(2ع-2أ')(2ع-2ب')(2ع-2جـ')}$$

$$=\frac{1}{2\,أ'\,ب'}\sqrt{16ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}$$

$$=\frac{4}{2\,أ'\,ب'}\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}$$

$$=\frac{2}{أ'\,ب'}\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')} \quad \leftarrow (3)$$

ولكن $م(\triangle أب جـ)=\frac{1}{2}\,أ'\,ب'\,جا\,جـ \quad \leftarrow (4)$

بالتعويض من (٣) في (٤) :

$$م(\triangle أب جـ)=\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}$$

أى أن مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه هى أ' ، ب' ، جـ' هى :

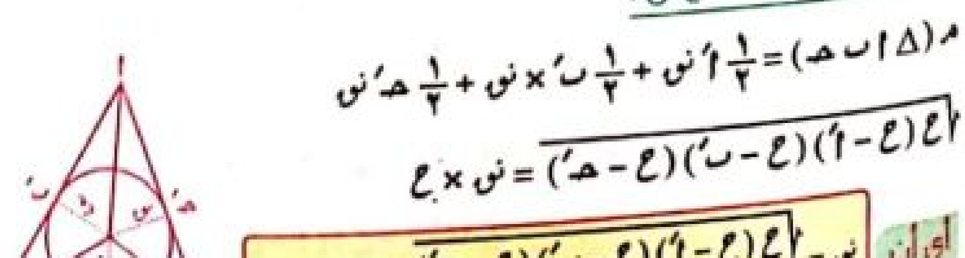
$م(\triangle أب جـ)=\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}$ حيث ع نصف محيط المثلث

ملاحظة هامة البرهان لا يمتحن فيه الطالب



نشاط إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه

نستطيع أن نستنتج أن :



$$م(\triangle أب جـ)=\frac{1}{2}\,أ'\,نق+\frac{1}{2}\,ب'\times نق+\frac{1}{2}\,جـ'\,نق$$

$$\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}=نق\times ع$$



أى أن $نق=\frac{\sqrt{ع\,(ع-أ')(ع-ب')(ع-جـ')}}{ع}=\frac{م(\triangle أب جـ)}{ع}$

ملاحظات

١ إذا كانت إحدى القيم ع - أ′ أو ع - ب′ أو ع - جـ′ سالبة فإن الكميات السالبة تحت الجذر غير معرفة فى ح وبالتالى لا توجد مساحة للمثلث وإذا كانت إحدى القيم تساوى صفرًا فإنه لا يوجد مثلث من الأساس.

٢ إذا كانت ع $<$ أحد أطوال أضلاع المثلث فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته ويمكن إستخدام متباينة المثلث للتأكد من ذلك قبل الحل حيث مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

فمثلاً : إذا كانت أطوال الأضلاع هى ٦ ، ٧ ، ١٥ من السنتيمترات فإن :

٢ ع = ٢٨ سم ويكون ع = ١٤ حيث أن ع $<$ طول أحد الأضلاع فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته وبالفعل إذا إستخدمنا متباينة المثلث نجد هنا أن ٦ + ٧ = ١٣ أى أن مجموع طولى الضلعين أصغر من طول الضلع الثالث وبالتالى فإن هذه الأطوال لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ولذلك لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته.

مثال ١

أوجد بإستخدام صيغة هيرون مساحة سطح △ أ ب جـ الذى فيه :

أ′ = ٥ سم ، ب′ = ١٢ سم ، جـ′ = ١٣ سم

الحل

∵ ٢ ع = ٥ + ١٢ + ١٣ = ٣٠

∴ ع = ١٥ سم

ع - أ′ = ١٥ - ٥ = ١٠ سم ، ع - ب′ = ١٥ - ١٢ = ٣ سم ، ع - جـ′ = ١٥ - ١٣ = ٢ سم

∴ مساحة △ = √(ع (ع - أ′) (ع - ب′) (ع - جـ′))

= √(١٥ × ١٠ × ٣ × ٢) = ٣٠ سم²





مثال ٢

أوجد مساحة المثلثات الآتية (إن أمكن ذلك)

❶ مثلث أطوال أضلاعه ٦ ، ٦ ، ١٠ من السنتيمترات

❷ مثلث أطوال أضلاعه ١٠ ، ١٨ ، ٣٠ من السنتيمترات

الحل

① بفرض أن أَ = ٦ سم ، بَ = ٦ سم ، هـَ = ١٠ سم

٢ ع = ٦ + ٦ + ١٠ = ٢٢ ∴ ع = ١١ سم

ع - أَ = ١١ - ٦ = ٥ سم ، ع - بَ = ١١ - ٦ = ٥ سم ، ع - هـَ = ١١ - ١٠ = ١ سم

∴ مساحة Δ = $\sqrt{ع(ع-أَ)(ع-بَ)(ع-هـَ)}$

= $\sqrt{١١ \times ٥ \times ٥ \times ١}$ = ٥ $\sqrt{١١}$ سم²

② بفرض أن أَ = ١٠ سم ، بَ = ١٨ سم ، هـَ = ٣٠ سم

٢ ع = ١٠ + ١٨ + ٣٠ = ٥٨ ∴ ع = ٢٩ سم ∴ ع < هـَ

∴ لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته



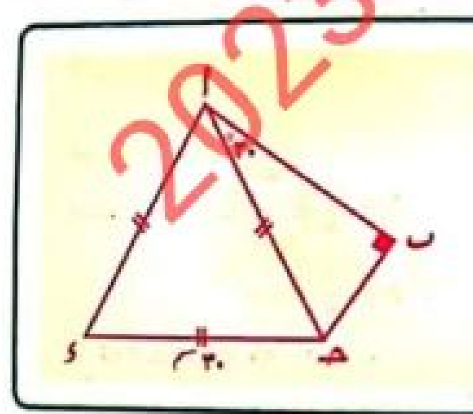
مثال ٣

الشكل المقابل :

يبين قطعة أرض أبعادها

كما هو موضح بالشكل

أوجد مساحته لأقرب سم²



الحل

Δ أ ء هـ متساوي الأضلاع ∴ أ هـ = ء هـ = أ ء = ٣٠ سم

∴ ءَ = ٣٠ سم ، أَ = ٣٠ سم ، هـَ = ٣٠ سم

٢ ع = أَ + ءَ + هـَ = ٣ × ٣٠ = ٩٠ سم ∴ ع = ٤٥ سم

ع - أَ = ع - بَ = ع - هـَ = ٤٥ - ٣٠ = ١٥ سم



∴ مساحة △ أ حـ ء = $\sqrt{ع(ع - أ')(ع - ب')(ع - حـ')}$

= $\sqrt{٤٥ \times ١٥ \times ١٥ \times ١٥}$ = ٢٢٥ $\sqrt{٣}$ ≃ ٣٩٠ سم²

△ أ ب حـ:

ب حـ = ٣٠ جا ٣٠° = ١٥ سم

أ ب = ٣٠ جا ٦٠° = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول ضلعيه × جا الزاوية المحصورة بينهما

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ حـ × جا ٣٠°

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥ $\sqrt{٣}$ × ٣٠ × جا ٣٠° = ١١٢,٥ $\sqrt{٣}$ سم² ≃ ١٩٥ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = مساحة △ أ ء حـ + مساحة △ أ ب حـ

= ٣٩٠ + ١٩٥ = ٥٨٥ سم²

مثال (٤)

أوجد مساحة الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذى فيه ق (∠ب) = ٩٠°، أ ب = ٥ سم، ب حـ = ١٢ سم، أ ء = حـ ء = ١٣ سم



الحل

فى △ أ ب حـ:

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

∵ ق (∠ب) = ٩٠°

∴ أ حـ = $\sqrt{(٥)^{٢} + (١٢)^{٢}}$ = ١٣ سم

فى △ أ حـ ء:

٢ ع = ١٣ + ١٣ + ١٣ = ٣٩   ∴ ع = ١٩,٥

مساحة △ أ حـ ء = $\sqrt{١٩,٥ (١٩,٥ - ١٣)(١٩,٥ - ١٣)(١٩,٥ - ١٣)}$ = ٧٣,٢ سم²

∴ مساحة الشكل الرباعي أ ب حـ ء

= مساحة △ أ ب حـ + مساحة △ أ حـ ء = ٣٠ + ٧٣,٢ = ١٠٣,٢ سم²



مثال ٥

إذا كان محيط $\triangle$ أ ب جـ = ٣٠٠ متر والنسبة بين أطوال أضلاعه
أ': ب': جـ' = ٣ : ٥ : ٧ أوجد مساحة $\triangle$ أ ب جـ

الحل

نفرض أن أ' = ٣ ك ، ب' = ٥ ك ، جـ' = ٧ ك

$\because$ محيط $\triangle$ أ ب جـ = أ' + ب' + جـ'

٣٠٠ = ٣ ك + ٥ ك + ٧ ك

٣٠٠ = ١٥ ك $\therefore$ ك = ٢٠

$\therefore$ أ' = ٣ ك = ٣ × ٢٠ = ٦٠ م

ب' = ٥ ك = ٥ × ٢٠ = ١٠٠ م

جـ' = ٧ ك = ٧ × ٢٠ = ١٤٠ م

٢ ع = ٦٠ + ١٠٠ + ١٤٠ = ٣٠٠ $\therefore$ ع = ١٥٠ م

ع − أ' = ١٥٠ − ٦٠ = ٩٠ م ، ع − ب' = ١٥٠ − ١٠٠ = ٥٠ م ، ع − جـ' = ١٥٠ − ١٤٠ = ١٠ م

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\sqrt{\text{ع (ع − أ') (ع − ب') (ع − جـ')}}$

= $\sqrt{١٥٠ \times ٩٠ \times ٥٠ \times ١٠}$ ≃ ٢٥٩٨ م^٢

مثال ٦

أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع $\triangle$ أ ب جـ الذى أطوال أضلاعه
٧ ، ٩ ، ١٤ من السنتيمترات من الداخل مقربًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

الحل

نفرض أن : أ' = ٧ سم ، ب' = ٩ سم ، جـ' = ١٤ سم

$\because$ ٢ ع = ٧ + ٩ + ١٤ = ٣٠ سم

ع = ١٥ سم ، ع − أ' = ٨ سم ، ع − ب' = ٦ سم ، ع − جـ' = ١ سم

$\therefore$ نق = $\frac{\sqrt{\text{ع (ع − أ') (ع − ب') (ع − جـ')}}}{\text{ع}}$ = $\frac{\sqrt{١٥ \times ٨ \times ٦ \times ١}}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}\sqrt{٥}$ سم







تمرين ٤ على صيغة هيرون

الأسئلة التي عليها علامة لها نفس فكرة كتاب المدرسة

أولاً راجع معنا واختبر نفسك

إختبار تراكمي ١٨

$\frac{1}{3}$ ساعة إمتحان ومراجعة

الدرجة النهائية $\frac{......}{10}$

١ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان طا θ = ٣ فإن طا $\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ = ...

[-١ ، صفر ، ١ ، -٢]

② إذا كان $\frac{\text{طا س} - \text{طا } 10^\circ}{1 + \text{طا س طا } 10^\circ}$ = ١ فإن س = ...

[٣٥° ، ٤٥° ، ٥٥° ، ٦٥°]

③ إذا كان جتا س = $\frac{4}{5}$ فإن جتا $\frac{\text{س}}{2}$ = ...

[$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ، $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، $\frac{3}{10}$ ، $\frac{3}{\sqrt{5}}$]

④ إذا كان $\frac{\text{طا } \theta}{1 - \text{طا}^2 \theta} = \frac{3}{4}$ فإن طا ٢ θ = ...

[$\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ٣ ، $\frac{3}{2}$]

---

⑤ إذا كان جتا أ = $\frac{4}{5}$ حيث ٠° < أ < $\frac{\pi}{2}$ أوجد بدون إستخدام الآلة الحاسبة قيمة : جا ٢أ ، طا ٤أ ، جتا $\frac{\text{أ}}{2}$

....

....

---

⑥ بدون إستخدام الحاسبة أثبت أن :

(أ) جتا ٧٥° = $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(ب) طا ٥٠° = $\frac{1 + \text{طا } 5^\circ}{1 - \text{طا } 5^\circ}$

....

....



ثانيًا مسائل المستوى الأول

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مساحة سطح △ الذى أطوال أضلاعه ٦ ، ٧ ، ٥ من السنتيمترات = ...

[٦√٦ أو ٣√٦ أو ١٢√٦ أو ٦√٦]

② مساحة سطح △ الذى أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ من السنتيمترات = ...

[٦ أو ١٢ أو ٣ أو ١٠]

③ مساحة سطح △ المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس إحدى زاويتى قاعدته ٤٥° = ... سم²

[٦٠ أو ٢٥ أو ٥٠ أو ١٠٠]

④ مساحة سطح △ المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٢ سم وقياس إحدى زاويتى قاعدته ٧٠° = ...

[٢٣ أو ٤٦ أو ٩٢ أو ١٠٠]

⑤ مساحة سطح المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم = ...

[٩√٣ أو ١٨√٣ أو ٩ أو ١٨]

⑥ مساحة سطح المثلث الذى طولا ضلعين فيه ٦ ، ٨ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠° = ...

[١٠ أو ٦ أو ١٢ أو ٢٤]

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم يساوى .... سم²

[٢٤ أو ٣٠ أو ٤٠ أو ٤٨]

② مساحة سطح المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٨ سم يساوى .... سم²

[٨√٣ أو ١٦√٣ أو ٣٢√٣ أو ١٦]

③ مساحة سطح المثلث الذى طولا ضلعين فيه ١٢ سم ، ١٦ سم من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠° يساوى .... سم²

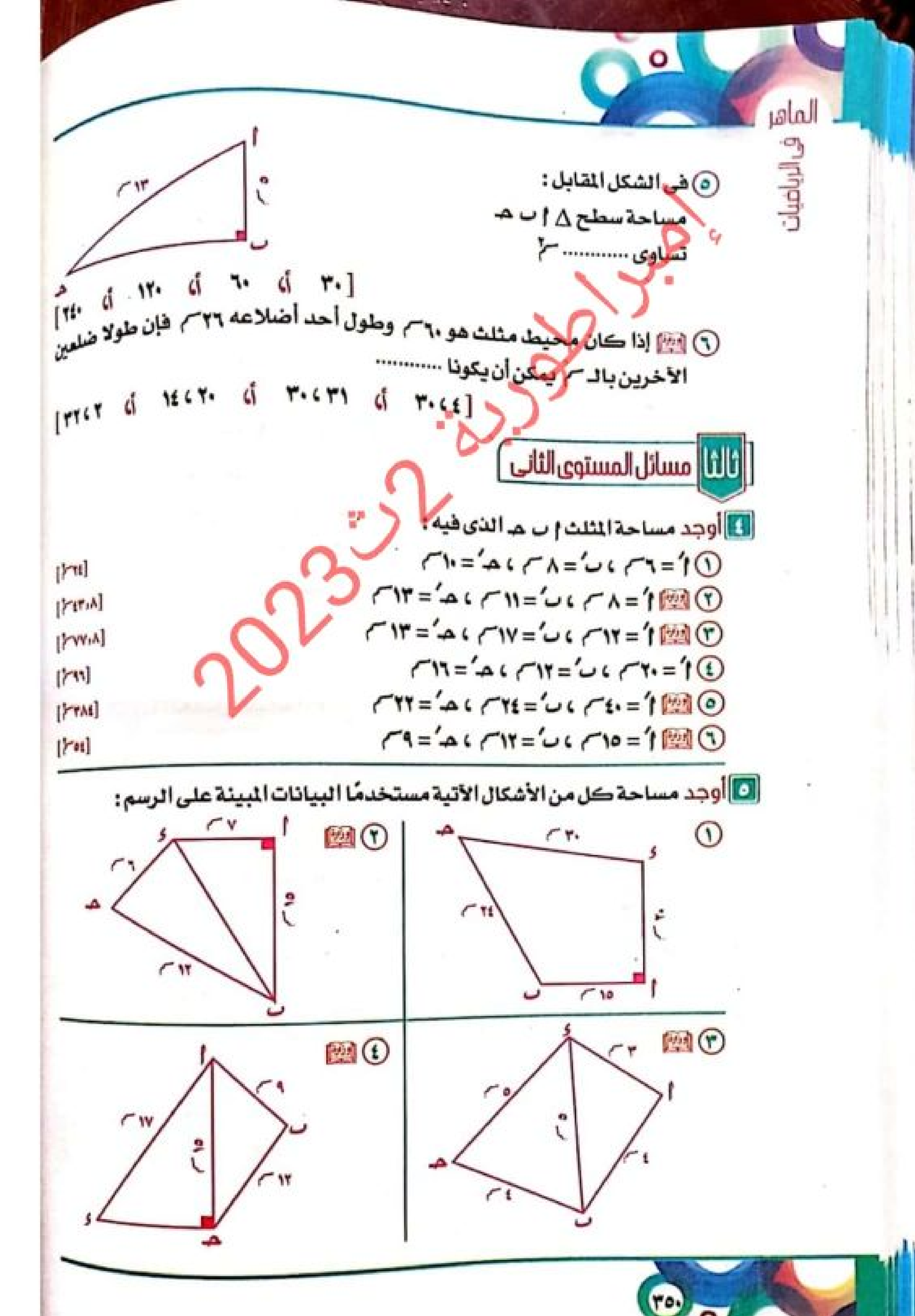
[٤٨√٣ أو ٢٤√٣ أو ١٢√٣ أو ٩٦√٣]

④ فى الشكل المقابل :

مساحة سطح △ أ ب جـ تساوى .... سم²

[٢٠ أو ٤√٥ أو ٢√٥ أو ١٠]





⑤ في الشكل المقابل :

مساحة سطح △ أ ب جـ

تساوي .... سم²

[٣٠ أو ٦٠ أو ١٢٠ أو ٢٤٠]

⑥ إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ سم وطول أحد أضلاعه ٢٦ سم فإن طولا ضلعين الآخرين بالـ سم يمكن أن يكونا ....

[٤، ٣٠ أو ٣١، ٣٠ أو ٢٠، ١٤ أو ٢، ٣٢]

ثالثًا مسائل المستوى الثاني

4 أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه :

① أ′ = ٦ سم ، ب′ = ٨ سم ، جـ′ = ١٠ سم [٢٤ سم²]

② أ′ = ٨ سم ، ب′ = ١١ سم ، جـ′ = ١٣ سم [٤٣٫٨ سم²]

③ أ′ = ١٢ سم ، ب′ = ١٧ سم ، جـ′ = ١٣ سم [٧٧٫٨ سم²]

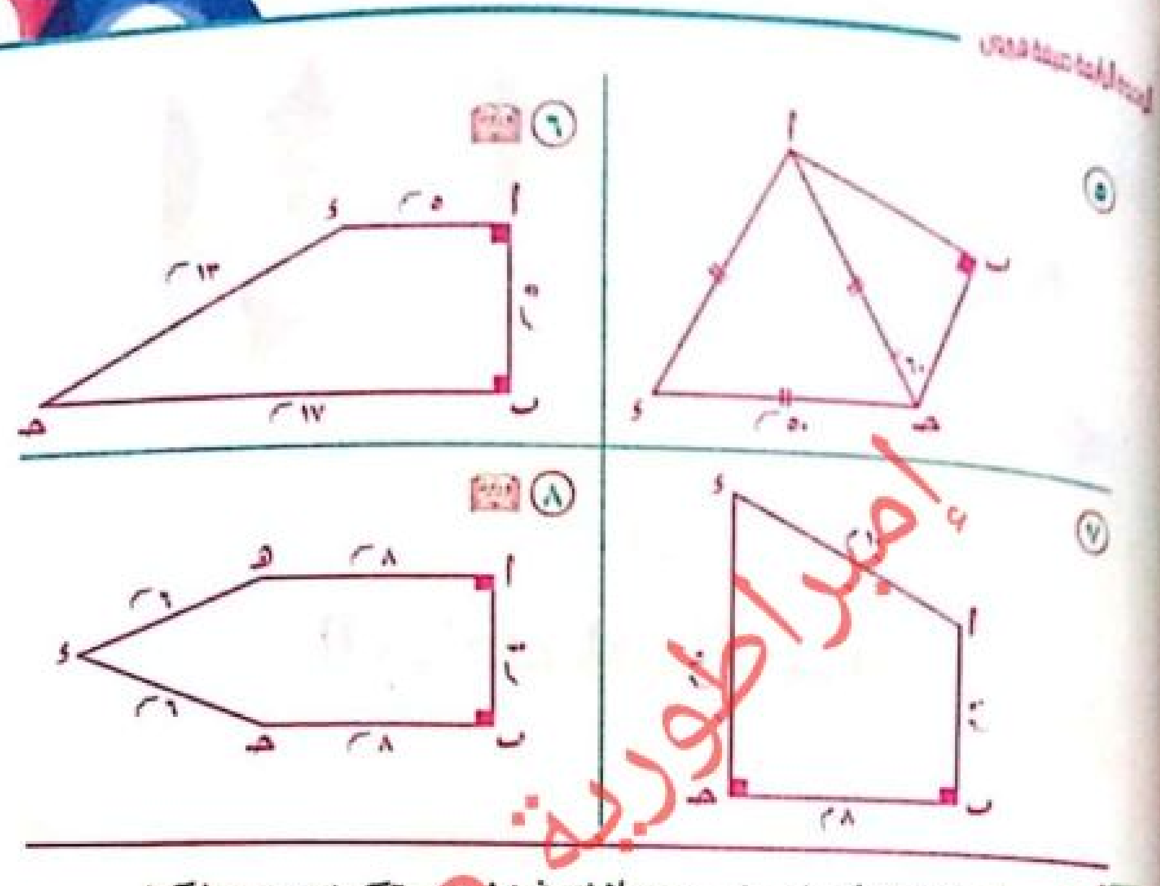
④ أ′ = ٢٠ سم ، ب′ = ١٢ سم ، جـ′ = ١٦ سم [٩٦ سم²]

⑤ أ′ = ٤٠ سم ، ب′ = ٢٤ سم ، جـ′ = ٢٢ سم [٣٨٤ سم²]

⑥ أ′ = ١٥ سم ، ب′ = ١٢ سم ، جـ′ = ٩ سم [٥٤ سم²]

5 أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية مستخدمًا البيانات المبينة على الرسم :

① ② ③ ④



٦ أوجد مساحة الشكل الرباعي أ ب ﺟ ء الذي فيه أ ب = ٦ سم ، ب ﺟ = ٨ سم ، أ ﺟ = ١٠ سم ، ﺟ ء = ٨ سم ، ء أ = ١٠ سم [٦٠٫٠٧ سم²]

٧ أوجد مساحة الشكل الرباعي أ ب ﺟ ء الذي فيه ق (∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥ سم ، ب ﺟ = ١٢ سم ، أ ء = ﺟ ء = ١٣ سم [١٠٣٫٠٢ سم²]

٨ أوجد مساحة الشكل الرباعي أ ب ﺟ ء الذي فيه ق (∠أ) = ق (∠ب) = ٩٠° ، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ﺟ = ٣٤ سم ، ﺟ ء = ٢٦ سم [٢٢٠ سم²]

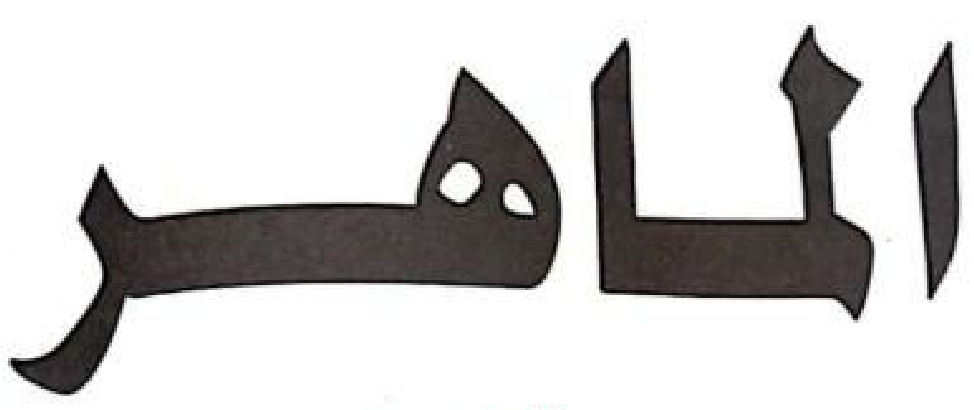
٩ أ ب ﺟ مثلث متساوي الساقين محيطه = ٣٠ سم وطول ضلع قاعدته تساوي ٨ سم
أوجد مساحة سطح △ أ ب ﺟ [٤١ سم²]

١٠ حديقة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هي ٧ : ٥ : ٣ فإذا كان محيط الحديقة يساوي ٣٠٠ متر فأوجد مساحته [٢٥٩٨ م²]

رابعاً مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١١ أ ب ﺟ ء ﻫ شكل خماسي محيطه ٣٢ سم ، ق (∠أ) = ق (∠ب) = ٩٠° ، $\overline{أ ﻫ}$ // $\overline{ب ﺟ}$ ، النسبة بين أطوال أضلاعه أ ب : ب ﺟ : ﺟ ء : ء ﻫ : ﻫ أ = ٢ : ٤ : ٣ : ٣ : ٤
أوجد مساحته [٤٣٫٠٢ سم²]





فى الرياضيات البحتة

للصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

حلول الكتاب

إعداد

ماهر أحمد محمود

يطلب من : دار الكوثر للنشر والتوزيع بالفجالة

الدعم الفنى ☎ ٠٢/٢٣٩٥٠٠١٣ - ٠١١١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ☎ ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠٠١٥٠٨٠٠٥ ص.ب: ١٢ الدواوين - القاهرة

أو على موقعنا www. EL MAHER.org

حلــول تمــارين الجـبر

تمارين (١) على المتتابعات والمتسلسلات

١ ① (-١ ، -٣ ، -٥ ، -٧ ، -٩ ، ...)
② (٥٥ ، ٦٠ ، ٦٥ ، ٧٠ ، ٧٥ ، ٨٠)

٢ ① ص⁺ أو مجموعة جزئية منها ② ٩ ③ ١٩
④ ٢ ⑤ > ⑥ = ⑦ <
⑧ ١٠١ ⑨ $\frac{٢}{٥}$ ⑩ ٥
⑪ $ح_ن = ن^٢$ ⑫ $ح_ن = (-١)^ن ن^٢$

٣ ① غير منتهية ② منتهية
③ غير منتهية ④ منتهية

٤ ① $ح_ن = ٤ن - ١$ ، ٨٥
② $ح_ن = (-١)^{ن+١} (٣ن)$ ، -٩٦
③ $ح_ن = (\frac{١}{٢})^ن$ ، $\frac{١}{٦٤}$
④ $[ح_{ن+١} = ح_ن + (ن+١)]$ ، ٢١

٥ ① ٢٥ ② $\frac{-٤}{٥}$
③ $(ن+١)(ن+٢)$ ④ تناقصية

٦ ① (٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٣٠)
② $(-\frac{١}{٣} ، -١ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٥})$
③ $(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٤٣})$
④ (-١ ، ٠ ، -١ ، ٤ ، -٩)
⑤ $(-١ ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٩} ، \frac{١}{١٦} ، \frac{-١}{٢٥})$
⑥ $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، ١ ، \frac{\sqrt{٢}}{٢} ، ٠ ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

٧ ① $ح_ن = ٢ن - ١$
$ح_١ = ٢ \times ١ - ١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$
$ح_٣ = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$ ، $ح_٤ = ٢ \times ٤ - ١ = ٧$
$ح_٥ = ٢ \times ٥ - ١ = ٩$ ⟸ (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩)

② $ح_ن = ن^٣$
$ح_١ = (١)^٣ = ١$ ، $ح_٢ = (٢)^٣ = ٨$
$ح_٣ = (٣)^٣ = ٢٧$ ، $ح_٤ = (٤)^٣ = ٦٤$
(١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)

٨ $ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = ٢ح_ن$
$ح_٢ = ٢ح_١$ ∴ $ح_٢ = -٢$
$ح_٣ = ٢ح_٢$ ∴ $ح_٣ = ٢ \times -٢ = -٤$
$ح_٤ = ٢ح_٣$ ∴ $ح_٤ = ٢ \times -٤ = -٨$
$ح_٥ = ٢ح_٤$ ∴ $ح_٥ = ٢ \times -٨ = -١٦$
(-١ ، -٢ ، -٤ ، -٨ ، -١٦)

٩ $ح_١ = ٣$ ، $ح_ن = ٢ح_{ن-١}$
$ح_٢ = ٢ح_١$ ∴ $ح_٢ = ٢ \times ٣ = ٦$
$ح_٣ = ٢ح_٢$ ∴ $ح_٣ = ٢ \times ٦ = ١٢$
$ح_٤ = ٢ح_٣$ ∴ $ح_٤ = ٢ \times ١٢ = ٢٤$
$ح_٥ = ٢ح_٤$ ∴ $ح_٥ = ٢ \times ٢٤ = ٤٨$
$ح_٦ = ٢ح_٥$ ∴ $ح_٦ = ٢ \times ٤٨ = ٩٦$
(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦)

١٠ ① (٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...)
② الحد العام: $ح_ن = ٢ن + ٦$
③ $ح_٧ = ٢ \times ٧ + ٦ = ٢٠$ دقيقة
④ $ح_ن = ٢ن + ٦$ ∴ $٢ن + ٦ = ٣٠$
$ن = \frac{٣٠ - ٦}{٢}$ ∴ $ن = ١٢$

١١ ① $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{ن+١} + ٢ - \frac{١}{ن} - ٢$
$= \frac{ن - ن - ١}{ن(ن+١)} = \frac{-١}{ن(ن+١)}$
الناتج < صفر ∴ $ح_{ن+١} < ح_ن$
∴ المتتابعة تناقصية

② $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣(ن+١) + ٥ - ٣ن - ٥$
$= ٣ن + ٣ - ٣ن = ٣ >$ صفر
∴ $ح_{ن+١} > ح_ن$ ∴ المتتابعة تزايدية

③ $ح_{ن+١} - ح_ن = (\frac{١}{٢})^{ن+١} - (\frac{١}{٢})^ن$
$= (\frac{١}{٢})^ن [\frac{١}{٢} - ١] = -(\frac{١}{٢})^{ن+١}$
الناتج < صفر ∴ $ح_{ن+١} < ح_ن$
∴ المتتابعة تناقصية

④ $ح_{ن+١} - ح_ن = (-٢)^{ن+١} - (-٢)^ن$

$= (-٢)^ن [-٢ - ١] = -٣ \times (-٢)^ن$

هذا المقدار موجب عند ن عدد فردي وسالب عند ن عدد زوجي

أي أن المتتابعة ليست تزايدية وليست تناقصية (متذبذبة)

⑤ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١}$

$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١} [\frac{١}{٢} - ١] = -\frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+١} = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن+٢}$

الناتج سالب < صفر $\therefore ح_{ن+١} < ح_ن$

∴ المتتابعة تناقصية

⑥ $ح_{ن+١} - ح_ن = (-١)^{ن+١} [(ن+١)^٢ + ١] - [(-١)^ن (ن^٢ + ١)]$

$= (-١)^ن (-١) [(ن+١)^٢ + ١] - [(-١)^ن (ن^٢ + ١)]$

$= (-١)^ن [-ن^٢ - ٢ن - ١ - ١ - ن^٢ - ١]$

$= (-١)^ن [-٢ن^٢ - ٢ن - ٣]$

$= -(-١)^ن [٢ن^٢ + ٢ن + ٣]$

∴ المقدار يتوقف على قيمة ن

∴ المتتابعة متذبذبة لا تزايدية ولا تناقصية

⑫ ① $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢) = ١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣$

② $\sum_{ر=١}^{٨} [(-١)^ر + ٤ر]$

$= ٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ١٩ + ٢٥ + ٢٧ + ٣٣$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \dots$

④ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢٠} + \dots$

⑬ ① $\sum_{ر=١}^{١٠} ٩ = ٩ \times ١٠ = ٩٠$

② $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر + ٣) = ٦٥$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (٣ر - ٢) = ١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣ = ٣٥$

④ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر+١)^٢ = ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ = ٥٤$

⑤ $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر^٢ - ٢) = ٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤ = ٨٠$

⑥ $\sum_{ر=٣}^{٦} \left(\frac{١}{ر} + ٢\right) = \frac{٧}{٣} + \frac{٩}{٤} + \frac{١١}{٥} + \frac{١٣}{٦} = ٨\frac{١٩}{٢٠}$

⑦ $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١} = \frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{١٦} + \frac{٣}{٣٢} + \frac{٣}{٦٤}$

$= \frac{٩٣}{٦٤}$

⑧ $\sum_{س=١}^{٣} \text{جتا} \frac{\pi}{٦} س = \text{جتا} \frac{\pi}{٦} + \text{جتا} \frac{٢\pi}{٦} + \text{جتا} \frac{٣\pi}{٦}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} + \text{صفر} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢}$

⑭ ① $\sum_{ر=١}^{١٠} (٥ر)$ ② $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٧ر)$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^ر$ ④ $\sum_{ن=١}^{\infty} (١٠)^{ن-١}$

⑮ ① $\sum_{ر=١}^{٣٠} ر$ ② $\sum_{ر=١}^{٣٠} (٢ر)$ ③ $\sum_{ر=١}^{٧} (٣ر)$

④ $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢^{٢-ن}$ ⑤ $\sum_{ر=١}^{٨} (ر^٢)$ ⑥ $\sum_{ر=١}^{١٠} \left(\frac{١}{٥ر}\right)$

⑯ ① $\sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ر + ١٠)$

$= \sum_{ر=١}^{١٢} (٢ر + ١٠) - \sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ١٠)$

$\because \sum_{ر=١}^{١٢} (٢ر + ١٠) = ٢ \sum_{ر=١}^{١٢} ر + \sum_{ر=١}^{١٢} ١٠$

$= ٢ \times \frac{١٢ \times ١٣}{٢} + ١٠ \times ١٢ = ٢٧٦$

$\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ١٠) = ٢ \sum_{ر=١}^{٧} ر + \sum_{ر=١}^{٧} ١٠$

$= \frac{٢ \times ٧ \times ٨}{٢} + ١٠ \times ٧ = ١٢٦$

$\therefore \sum_{ر=٨}^{١٢} ٢(ر + ٥) = ٢٧٦ - ١٢٦ = ١٥٠$

② $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

$\therefore \sum_{ر=٥}^{٨} ٢ر^٢ = \sum_{ر=١}^{٨} ٢ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ر^٢$

$= \frac{٢ \times ٨ \times ٩ \times ١٧}{٦} - \frac{٢ \times ٤ \times ٥ \times ٩}{٦}$

$= ٤٠٨ - ٦٠ = ٣٤٨$

$\sum_{ر=٥}^{٨} (-٣ر) = \sum_{ر=١}^{٨} (-٣ر) - \sum_{ر=١}^{٤} (-٣ر)$

$= \frac{-٣ \times ٨ \times ٩}{٢} - \frac{-٣ \times ٤ \times ٥}{٢} = -١٠٨ + ٣٠ = -٧٨$

$\therefore \sum_{ر=٥}^{٨} (٢ر^٢ - ٣ر) = ٣٤٨ - ٧٨ = ٢٧٠$

١٧ ① (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) ∴ $ح_ن = ٣ن - ١$

② ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ...) ∴ $ح_ن = \frac{ن}{ن + ١}$

③ (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...) ∴ $ح_ن = ن^٣$

④ (١ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{١}{١٠٠}$ ، $\frac{١}{١٠٠٠}$ ، ...)

∴ $ح_ن = (\frac{١}{١٠})^{ن - ١}$

⑤ (−١ ، ٢ ، −٤ ، ٨ ، −١٦ ، ...)

∴ $ح_ن = (-١)^ن \times ٢^{ن - ١}$

⑥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ ، جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، جتا π ، ...)

∴ $ح_ن$ = جتا $(\frac{\pi ن}{٣})$

١٨ $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$

$ح_{ن+١} = ح_ن + ن س$ ، $ح_٢ = ح_١ + س$

∴ $ح_٢ = ٩ + س$ ∴ $ح_٣ = ح_٢ + ٢س$

$ح_٣ = ٩ + س + ٢س = ٣٦$ ∴ $٣س + ٩ = ٣٦$

$س = \frac{٣٦ - ٩}{٣}$ ∴ $س = ٩$

١٩ ① $\frac{٢^ن}{ن}$ ② ١٣٧٥ ③ ٤٠

④ ٩٦ ⑤ $ن^٢$ ⑥ $٣ \times (-٢)^{ن - ١}$

⑦ تزايدية ⑧ تناقصية

⑨ تزايدية ⑩ تناقصية

⑪ (ن + ١)(ن + ٢)

٢٠ ① $\sum_{ر=١}^{س} (ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{س} ر + \sum_{ر=١}^{س} ٢$

$٧٥ = \frac{س(س + ١)}{٢} + ٢س$

$١٥٠ = س^٢ + س + ٤س$

$س^٢ + ٥س - ١٥٠ = ٠$

$(س + ١٥)(س - ١٠) = ٠$

$س = -١٥$ (مرفوض) لأن $س \in ص^+$ ∴ $س = ١٠$

② $\sum_{ر=١}^{س} (٣ر - ٤) = ٣ \sum_{ر=١}^{س} ر - \sum_{ر=١}^{س} ٤$

$٢٥ = ٣ \times \frac{س(س + ١)}{٢} - ٤س$

$٥٠ = ٣س^٢ + ٣س - ٨س$

$٣س^٢ - ٥س - ٥٠ = ٠ \Leftarrow (٣س + ١٠)(س - ٥) = ٠$

$س = \frac{-١٠}{٣}$ (مرفوض) ∴ $س = ٥$

③ $\sum_{ك=٤}^{٥}$ (لو ك س) = لو ٤ س + لو ٥ س

لو ٧٢٠ = لو ٢٠ $س^٢$

$٧٢٠ = ٢٠ س^٢ \Leftarrow س^٢ = ٣٦$

∴ $س = ٦$ ، $س = -٦$ (مرفوض)

④ $\sum_{ن=١}^{٢٠} (٢ + س ن) = ٨٠$

$٢ \sum_{ن=١}^{٢٠} + س \sum_{ن=١}^{٢٠} ن = ٨٠$

$٢ \times ٢٠ + س \times \frac{ن(ن + ١)}{٢} = ٨٠$

$س \times \frac{٢٠ \times ٢١}{٢} = ٤٠$

$٢١٠ س = ٤٠$ ∴ $س = \frac{٤}{٢١}$

٢١ ① ر = ٣١ ⟸ طا ٣١ − طا ٣٠

ر = ٣٢ ⟸ طا ٣٢ − طا ٣١

ر = ٣٣ ⟸ طا ٣٣ − طا ٣٢

ر = ٣٤ ⟸ طا ٣٤ − طا ٣٣

ر = ٦٠ ⟸ طا ٦٠ − طا ٥٩ (بالجمع)

∴ $\sum_{ر=٣١}^{٦٠}$ [طا س° − طا (س − ١)°]

= − طا ٣٠° + طا ٦٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٣} + \sqrt{٣} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

② $\sum_{س=١}^{٩٩}$ (لو $\frac{س}{س + ١}$) = $\sum_{س=١}^{٩٩}$ [لو س − لو (س + ١)]

= لو ١ − لو ٢ + لو ٢ − لو ٣ + لو ٣ − لو ٤ + لو ٤ −

لو ٥ + لو ٥ − لو ٦ + لو ٦ − لو ٧ + لو ٩٨ − لو ٩٩

+ لو ٩٩ − لو ١٠٠ = لو ١ − لو ١٠٠ = ٠ − ٢ = −٢

③ ر = ١٠ ∴ $لو_٢ ١١ - لو_٢ ١٠$

ر = ١١ ∴ $لو_٢ ١٢ - لو_٢ ١١$

ر = ١٢ ∴ $لو_٢ ١٣ - لو_٢ ١٢$

ر = ٣٩ ∴ $لو_٢ ٤٠ - لو_٢ ٣٩$ (بالجمع)

$= لو_٢ ٤٠ - لو_٢ ١٠ = لو_٢ \frac{٤٠}{١٠} = لو_٢ ٤ = ٢$

④ $\sum_{ن=٤}^{٦٢} ٣ت^ن$

$= ٣ت^٤ + ٣ت^٥ + ٣ت^٦ + ٣ت^٧$

$=$ صفر $+ ٣ت^٨ + ٣ت^٩ + ٣ت^{١٠} + ٣ت^{١١}$

= صفر + ...

$=$ صفر $+ ٣ت^{٥٦} + ٣ت^{٥٧} + ٣ت^{٥٨} + ٣ت^{٥٩}$

= صفر + ٣ت^{١٠} + ٣ت^{١١} + ٣ت^{١٢}

= ٣[ت^{١٠} + ت^{١١} + ت^{١٢}] = ٣(١ + ت − ١) = ٣ت

∴ $\sum_{ن=١}^{١٢}$ ٣ت^{ن} = ٣ت

---

⑤ $\sum_{ر=٤}^{٦٣} (\sqrt{ر+١} - \sqrt{ر})$

ر = ٤ ⇐ $\sqrt{٥} - \sqrt{٤}$

ر = ٥ ⇐ $\sqrt{٦} - \sqrt{٥}$

ر = ٦ ⇐ $\sqrt{٧} - \sqrt{٦}$

....

ر = ٦١ ⇐ $\sqrt{٦٢} - \sqrt{٦١}$

ر = ٦٢ ⇐ $\sqrt{٦٣} - \sqrt{٦٢}$

ر = ٦٣ ⇐ $\sqrt{٦٤} - \sqrt{٦٣}$ (بالجمع)

$\sum_{ر=٤}^{٦٣} (\sqrt{ر+١} - \sqrt{ر}) = \sqrt{٦٤} - \sqrt{٤} = ٦$

---

⑥ $\sum_{ر=٢}^{١٣} \frac{١}{ر^{٢} - ر} = \sum_{ر=٢}^{١٣} \left(\frac{١}{ر-١} - \frac{١}{ر}\right)$

بوضع ر = ٢ ⇐ $١ - \frac{١}{٢}$

ر = ٣ ⇐ $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}$

ر = ٤ ⇐ $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$

....

ر = ١١ ⇐ $\frac{١}{١٠} - \frac{١}{١١}$

ر = ١٢ ⇐ $\frac{١}{١١} - \frac{١}{١٢}$

ر = ١٣ ⇐ $\frac{١}{١٢} - \frac{١}{١٣}$ (بالجمع)

$\sum_{ر=٢}^{١٣} \frac{١}{ر^{٢} - ر} = ١ - \frac{١}{١٣} = \frac{١٢}{١٣}$

---

⑫ ر(٣) = $\sum_{ن=١}^{٣}$ ن^{٢} = (١)^{٢} + (٢)^{٢} + (٣)^{٢} = ١٤

د(١٤) = $\sum_{ن=١}^{١٤}$ ن = $\frac{١٤ \times (١٤ + ١)}{٢}$ = ١٠٥

∴ (د ∘ ر)(٣) = د[ر(٣)] = د(١٤) = ١٠٥

---

⑬ د$^{-١}$(س) = $\frac{س + ٢}{٣}$

$\sum$ د$^{-١}$(س) = $\sum_{ر=١}^{٩} \left(\frac{١}{٣} س + \frac{٢}{٣}\right)$

= $\frac{١}{٣} \sum_{ر=١}^{٩} س + \sum_{ر=١}^{٩} \frac{٢}{٣}$

= $\frac{١}{٣} \times \frac{٩ \times ١٠}{٢} + \frac{٢}{٣} \times ٩$ = ١٥ + ٦ = ٢١

㉔ أ = ٢ ، ب = −(م + ٢) ، هـ = −٧

س$_١$ + س$_٢$ = $\frac{م + ٢}{٢}$ ، س$_١$ س$_٢$ = $\frac{-٧}{٢}$

∵ $\sum_{ر=١}^{٢}$ (٣س$_ر$ − ٢ر) = ١٨

٣س$_١$ − ٢ × ١ + ٣س$_٢$ − ٢ × ٢ = ١٨

٣س$_١$ + ٣س$_٢$ − ٦ = ١٨ ∴ ٣(س$_١$ + س$_٢$) = ٢٤

س$_١$ + س$_٢$ = ٨ ⇐ ∴ $\frac{م + ٢}{٢}$ = ٨ ∴ م = ١٤

㉕ $\sum_{ن=١}^{٩٠}$ (جتا ن − جا ن)

= جتا ١ − جا ١ + جتا ٢ − جا ٢ + جتا ٣ − جا ٣

+ جتا ٤ − جا ٤ + ⋯ + جتا ٩٠ − جا ٩٠

= (جتا ١ − جا ٨٩) + (جتا ٢ − جا ٨٨) + ⋯

+ (جتا ٩٠ − جا ٩٠) = ٠ + ٠ + ⋯ + (−١) = −١

تمارين (٢) على المتتابعة الحسابية

١ ① ٩ ② تناقصية ③ ٢٥ ④ ٣٠

⑤ (أ) $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٣ر − ٢)

بوضع ر = ١ ∴ ح$_١$ = ٣ × ١ − ٢ = ١

بوضع ر = ٢ ∴ ح$_٢$ = ٣ × ٢ − ٢ = ٤

بوضع ر = ٣ ∴ ح$_٣$ = ٣ × ٣ − ٢ = ٧

بوضع ر = ٤ ∴ ح$_٤$ = ٣ × ٤ − ٢ = ١٠

بوضع ر = ٥ ∴ ح$_٥$ = ٣ × ٥ − ٢ = ١٣

∴ $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٣ر − ٢) = ١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣

(ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$

بوضع ر = ١ ∴ ح$_١$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١-١}$ = ١

بوضع ر = ٢ ∴ ح$_٢$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-١}$ = $\frac{١}{٢}$

بوضع ر = ٣ ∴ ح$_٣$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣-١}$ = $\frac{١}{٤}$

بوضع ر = ٤ ∴ ح$_٤$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤-١}$ = $\frac{١}{٨}$

∴ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ = ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ...

(١) ① $ح_ن = ن + ن^2$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_1 = ١ + (١)^2 = ٢$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_2 = ٢ + (٢)^2 = ٦$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_3 = ٣ + (٣)^2 = ١٢$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_4 = ٤ + (٤)^2 = ٢٠$

بوضع ن = ٥ ∴ $ح_5 = ٥ + (٥)^2 = ٣٠$

الحدود الخامسة الأولى هي : ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٣٠

(ب) $ح_ن = \left(\frac{1}{3}\right)^ن$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

بوضع ن = ٥ ∴ $ح_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

∴ الحدود الخامسة الأولى هي : $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{27}$ ، $\frac{1}{81}$ ، $\frac{1}{243}$

(٢) ① $ح_2 - ح_1 = ١٥ - ١٢ = ٣$

$ح_3 - ح_2 = ١٨ - ١٥ = ٣$

$ح_4 - ح_3 = ٢١ - ١٨ = ٣$

$ح_5 - ح_4 = ٢٤ - ٢١ = ٣$

$ح_2 - ح_1 = ح_3 - ح_2 = ح_4 - ح_3 = ح_5 - ح_4$

∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٣

② $ح_2 - ح_1 = ٢٥ - ٢١ = ٤$ ، $ح_4 - ح_3 = ٣٤ - ٢٩ = ٥$

$ح_4 - ح_3 \neq ح_2 - ح_1$ ∴ ليست متتابعة حسابية

③ $ح_2 - ح_1 = -١١ + ٥ = -٦$

$ح_3 - ح_2 = -١٧ + ١١ = -٦$

$ح_4 - ح_3 = -٢٣ + ١٧ = -٦$

$ح_5 - ح_4 = -٢٩ + ٢٣ = -٦$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = -٦

④ $ح_2 - ح_1 = ٧ - ٧ = ٠$ ، $ح_3 - ح_2 = ٧ - ٧ = ٠$

∴ $ح_2 - ح_1 = ح_3 - ح_2 = ... =$ صفر

∴ متتابعة حسابية ثابتة

⑤ $ح_2 - ح_1 = ٣س + ٣ص - س - ٢ص = ٢س + ص$

$ح_3 - ح_2 = ٥س + ٤ص - ٣س - ٣ص = ٢س + ص$

∴ $ح_2 - ح_1 = ح_3 - ح_2$

∴ المتتابعة حسابية أساسها = (٢س + ص)

(٣) ① أ = ٢ ، د = ٥ (٢، ٧، ١٢، ١٧، ٢٢)

② أ = ٧ ، د = -٣ (٧، ٤، ١، -٢، -٥)

③ أ = -٤ ، د = $\frac{1}{4}$

(-٤ ، -٣ $\frac{3}{4}$ ، -٣ $\frac{1}{2}$ ، -٣ $\frac{1}{4}$ ، -٣)

(٤) ① = مقدار ثابت ② $ح_{ن+1} - ح_ن$

③ (ن - ١)د ④ ٢ ، ٣ ⑤ ٢٠

⑥ ٢٨ ⑦ $ح_ن = ٨٥ - ٤ن$ ⑧ $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}ن$

(٥) ① -٣ ② ٣ن - ١ ③ ٩

④ ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$)

⑤ $ح_ن = \frac{ن^2 - ١}{ن^2 + ن + ١}$

(٦) ① $ح_7 = ٢ + ٦ \times ٣ = ٢٠$

② $ح_4 = ٣ + ٣ \times ٣ = ١٢$

$ح_8 = ٣ + ٧ \times ٣ = ٢٤$

$ح_{16} = ٣ + ١٥ \times ٣ = ٤٨$

(٧) ① -١٦ ② -٣ ③ ٣

(٨) ① $(ح_ن) = ٢ن + ١$

$ح_{ن+1} - ح_ن = [٢(ن + ١) + ١] - [٢ن + ١]$

$= ٢ن + ٢ + ١ - ٢ن - ١ = ٢ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = ٢ن + ١$ متتابعة حسابية

$ح_8 = ٢ \times ٨ + ١ = ١٧$

② $(ح_ن) = ٧ - ٢ن$

$ح_{ن+1} - ح_ن = [٧ - ٢(ن + ١)] - [٧ - ٢ن]$

$= ٧ - ٢ن - ٢ - ٧ + ٢ن = -٢ =$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = ٧ - ٢ن$ متتابعة حسابية أساسها = -٢

$ح_1 = ٧ - ٢ = ٥$ ، $ح_2 = ٧ - ٤ = ٣$

$ح_3 = ٧ - ٦ = ١$ ، $ح_4 = ٧ - ٨ = -١$

(٩) أ = ٦٧ ، د = -٣ ∴ $ع_{ن}$ < صفر

أ + (ن - ١) د < صفر

∴ ٦٧ + (ن - ١) × -٣ < صفر

-٣ (ن - ١) < -٦٧ ∴ (ن - ١) > $\frac{-٦٧}{-٣}$

ن > $\frac{٦٧}{٣}$ + ١ ∴ ن > ٢٣,٣ ∴ ن = ٢٤

$ع_{٢٤}$ = أ + ٢٣ د = ٦٧ + ٢٣ × -٣ ∴ $ع_{٢٤}$ = -٢

---

(١٠) أ = ١٣ ، د = ٣

$ع_{١٠}$ = أ + ٩د = ١٣ + ٩ × ٣ = ٤٠

$ع_{ن}$ = ١٠٠ ∴ ١٣ + (ن - ١) × ٣ = ١٠٠

ن = $\frac{١٠٠ - ١٣}{٣}$ + ١ = ٣٠ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٣٠ حداً

---

(١١) $ع_{٩}$ = أ + ٨د = ١٧ + ٨ × -٢ = ١

$ع_{ن}$ > ٠ ⇐ ١٧ + (ن - ١) × -٢ > ٠

١٧ - ٢ن + ٢ > ٠

-٢ن > -١٩ ⇐ ٢ن < ١٩ ∴ ن < ٩ $\frac{١}{٢}$

∴ آخر حد موجب هو $ع_{٩}$

---

(١٢) $ع_{٧}$ = ١١ + ٦ × -٣ = -٧ ⇐ $ع_{ن}$ = ٠

١١ - ٣ن + ٣ = ٠

-٣ن = -١٤ ∴ ن = ٤ $\frac{٢}{٣}$

∴ لا يوجد فى المتتابعة حد = ٠

---

(١٣) $ع_{ن}$ = ٢ + ٥ن

$ع_{١}$ = ٢ + ٥ × ١ = ٧ ، $ع_{٢}$ = ٢ + ٥ × ٢ = ١٢

$ع_{٣}$ = ٢ + ٥ × ٣ = ١٧ الحدود هي (٧ ، ١٢ ، ١٧)

٧٢ = ٢ + ٥ن ⇐ ٥ن = ٧٠ ∴ ن = ١٤

∴ $ع_{١٤}$ = ٧٢ ، ٢ + ٥ن > ١٠٠ ⇐ ٥ن > ٩٨

∴ ن > ١٩,٦ ∴ ن = ٢٠

---

(١٤) أ + د = ٤ ← ① ، أ + ٨د = -١٧ ← ②

من ① ، ② بالطرح

∴ ٧د = -٢١ ∴ د = -٣ بالتعويض فى ← ①

∴ أ = ٧ ∴ المتتابعة هى (٧ ، ٤ ، ١ ، ...) ∴ $ع_{٢٠}$ = -٥٠

---

(١٥) أ + ٥د = ١٦ ← (١) ، أ + ١٩د = -٢٦ ← (٢) ،

بطرح (١) من (٢): ∴ ١٤د = -٤٢ ∴ د = -٣

بالتعويض فى (١) ∴ أ = ٣١

∴ المتتابعة هى (٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ...) ، ∴ $ع_{٢٧}$ = -٤٧

---

(١٦) $ع_{٥}$ = ٢١ ⇐ أ + ٤د = ٢١ ← (١)

$ع_{١٠}$ = ٣$ع_{٢}$ ∴ أ + ٩د = ٣(أ + د)

٢أ - ٦د = ٠ ∴ أ - ٣د = ٠ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) ∴ أ = ٩ ، د = ٣

المتتابعة هي (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...)

---

(١٧) أ + ٣د = ١١ ← (١) ، أ + ٤د + أ + ٨د = ٤٠

∴ أ + ٦د = ٢٠ ← (٢) من (١) ، (٢) بالطرح ينتج أن:

٣د = ٩ ∴ د = ٣ وبالتعويض ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ،

∵ $ع_{ن}$ = أ + (ن - ١) د

∴ ١٥٢ = ٢ + (ن - ١) × ٣ ∴ ١٥٠ = ٣ن - ٣

∴ ١٥٣ = ٣ن ∴ ن = ٥١

---

(١٨) أ + أ + د = ٩ ∴ ٢أ + د = ٩ ← (١) ،

أ + ٤د = ٢٢ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) ∴ أ = ٢ ، د = ٥

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ...) ، $ع_{١٣}$ = ٦٢

---

(١٩) (أ + ٢د) - (أ + ٤د) = ٦ ⇐ أ + ٢د - أ - ٤د = ٦

-٢د = ٦ ⇐ د = -٣

$ع_{٤}$ = ١٦ ⇐ أ + ٣د = ١٦ ⇐ أ - ٩ = ١٦ ⇐ أ = ٢٥

∴ المتتابعة هى (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ...)

$ع_{ن}$ = أ + (ن - ١) د

= ٢٥ + (ن - ١) × -٣ = ٢٥ - ٣ن + ٣

∴ الحد النونى = $ع_{ن}$ = ٢٨ - ٣ن

$ع_{ن}$ < ٠ ⇐ ٢٨ - ٣ن < ٠ ⇐ ٢٨ < ٣ن

ن > ٩,٣ ∴ ن = ١٠

$ع_{١٠}$ = أ + ٩د = ٢٥ + ٩ × -٣ = -٢

---

(٢٠) نفرض أن الأعداد هى أ - د ، أ ، أ + د

أ - د + أ + أ + د = ١٥ ∴ ٣أ = ١٥ ∴ أ = ٥

(أ - د) × (أ) × (أ + د) = ١٠٥

(٥ - د) × ٥ × (٥ + د) = ١٠٥

٥(٢٥ - $د^{٢}$) = ١٠٥ ⇐ ١٢٥ - ٥$د^{٢}$ = ١٠٥

-٥$د^{٢}$ = -٢٠ ∴ $د^{٢}$ = ٤ ∴ د = ±٢

الأعداد هى ٥ - ٢ = ٣ ، ٥ ، ٥ + ٢ = ٧

∴ الأعداد هى ٣ ، ٥ ، ٧

(٢١) $ح_{٧} = ٢ح_{٤}$ ، $٢ح_{٧} - ح_{١٠} = ٦$

أ + ء = ٢ (أ + ٣ء) ⟸ أ + ء = ٢أ + ٦ء

⟸ أ + ٥ء = ٠ ← (١) ∴ ٢ (أ + ٦ء) − (أ + ٩ء) = ٦

٢أ + ١٢ء − أ − ٩ء = ٦ ⟸ أ + ٣ء = ٦ ← (٢)

بحل المعادلتين

أ + ٥ء = ٠

أ + ٣ء = ٦

٢ء = −٦ ∴ ء = −٣ بالتعويض فى المعادلة الأولى

أ − ١٥ = صفر ∴ أ = ١٥

∴ المتتابعة هى (١٥ ، ١٢ ، ٩ ، ...)

---

(٢٢) $ح_{٦} = ٢٠$ ∴ أ + ٥ء = ٢٠ ← (١)

$\frac{ح_{٤}}{ح_{١٠}} = \frac{٤}{٧}$ ⟸ $\frac{أ + ٣ء}{أ + ٩ء} = \frac{٤}{٧}$

٧أ + ٢١ء = ٤أ + ٣٦ء ∴ ٣أ − ١٥ء = ٠

أ − ٥ء = ٠ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) ∴ أ = ١٠ ، ء = ٢

المتتابعة هي (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)

---

(٢٣) $ح_{٢} + ح_{٤} = ٤٢$ ∴ (أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٤٢

٢أ + ٤ء = ٤٢ ∴ أ + ٢ء = ٢١ ← (١)

$ح_{٣} \times ح_{٥} = ٣١٥$

(أ + ٢ء) × (أ + ٤ء) = ٣١٥ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

٢١ × (٢١ + ٢ء) = ٣١٥ ∴ ٢١ + ٢ء = $\frac{٣١٥}{٢١}$ = ١٥

٢ء = ١٥ − ٢١ = −٦ ∴ ء = −٣

أ + ٢ × −٣ = ٢١ ∴ أ = ٢٧

المتتابعة هي (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)

---

(٢٤) أ − ٢ء + أ − ء + أ + أ + ء + أ + ٢ء = ٤٥

٥أ = ٤٥ ∴ أ = ٩

(أ − ٢ء) (أ + ٢ء) + (أ − ء) (أ + ء) = ١١٧

$أ^{٢} - ٤ء^{٢} + أ^{٢} - ء^{٢} = ١١٧$

$٢أ^{٢} - ٥ء^{٢} = ١١٧$ ⟸ $١٦٢ - ٥ء^{٢} = ١١٧$ ⟸ $-٥ء^{٢} = -٤٥$

$ء^{٢} = ٩$ ∴ ء = ±٣

إذا كانت ء = ٣

أ − ٢ء = ٩ − ٦ = ٣ ، أ − ء = ٩ − ٣ = ٦ ، أ = ٩

أ + ء = ٩ + ٣ = ١٢ ، أ + ٢ء = ٩ + ٦ = ١٥

الأعداد هى (٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥)

إذا كانت ء = −٣

أ − ٢ء = ٩ + ٦ = ١٥ ، | أ + ء = ٩ − ٣ = ٦

أ − ء = ٩ + ٣ = ١٢ ، | أ + ٢ء = ٩ − ٦ = ٣

∴ أ = ٩

∴ الأعداد هى (١٥ ، ١٢ ، ٩ ، ٦ ، ٣)

---

(٢٥) $ح_{١٥} = ٣ + ١٤ \times ٦ = ٨٧$ ، $ح_{ن} = ٩٩$

أ + (ن − ١) × ٦ = ٩٩ ⟸ ٣ + ٦ن − ٦ = ٩٩

٦ن = ١٠٢ ∴ ن = ١٧

---

(٢٦) أ = ٦ ، $ح_{٢} = ح_{١} + ٢ = ٦ + ٢ = ٨$

، $ح_{٣} = ح_{٢} + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠$ ، $ح_{٤} = ح_{٣} + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢$

∴ المتتابعة هى (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ...)

∴ $ح_{٤} + ح_{٥} = ١٢ + ١٤ = ٢٦$

---

(٢٧) $ح_{١} = ٣$ ⟸ أ = ٣ ، $ح_{ن} = ٣٩$

٣ + (ن − ١) ء = ٣٩ ∴ (ن − ١) × ء = ٣٦ ← (١)

$ح_{٢ن} = ٧٩$ ∴ ٣ + (٢ن − ١) ء = ٧٩

(٢ن − ١) ء = ٧٦ ← (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{ن - ١}{٢ن - ١} = \frac{٣٦}{٧٦}$ ∴ $\frac{ن - ١}{٢ن - ١} = \frac{٩}{١٩}$

١٩ن − ١٩ = ١٨ن − ٩ ∴ ن = ١٠

من (١) ∴ ء = ٤

المتتابعة هي (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

---

(٢٨) أ = ١٢ ، ل = −٢٦ ∵ عدد حدود المتتابعة = ٢٠

ل = $ح_{٢٠}$ = −٢٦

∴ ١٢ + ١٩ء = −٢٦ ⟸ ١٩ء = −٣٨ ∴ ء = −٢

∴ المتتابعة هى (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، −٢٦)

---

(٢٩) ∵ المتتابعة حسابية

∴ ء = أ − ٣ = ١٦٣ − ب ∴ ب = ١٦٦ − أ

∵ ب = ١٩أ + ٦ ∴ ١٩أ + ٦ = ١٦٦ − أ

٢٠أ = ١٦٠ ∴ أ = ٨

∵ ب = ١٦٦ − ٨ = ١٥٨ ∴ ء = ٨ − ٣ = ٥

∵ ل = ١٦٣ ∴ أ + (ن − ١) ء = ١٦٣

٣ + (ن − ١) × ٥ = ١٦٣

ن = $\frac{١٦٣ - ٣}{٥}$ + ١ ∴ ن = ٣٣

---

(٣٠) $ح_{١٦} = ٦٨$ ⟸ ٨ + ١٥ء = ٦٨

١٥ء = ٦٠ ⟸ ء = ٤

أ = ٨ + ٤ ⇐ أ = ١٢

ب = ٦٨ − ٤ ⇐ ب = ٦٤

(٣١) ح٣ − ح٥ = ١٨

أ + ٢د − أ − ٤د = ١٨ ∴ −٢د = ١٨ ∴ د = −٩

ح٤ − ٢ح٧ = ٣١ ⇐ (أ + ٣د) − ٢(أ + ٦د) = ٣١

أ + ٣د − ٢أ − ١٢د = ٣١ ⇐ −أ − ٩د = ٣١ ∴ أ = ٥٠

∴ المتتابعة هي (٥٠، ٤١، ٣٢، ...)

(٣٢) ٣س + ١٢ − ٥س − ١ = ٣٠س + ٦ − ٣٥س + ١٤

⇐ ٣س = ٩ ∴ س = ٣ ⇐ ل = أ + (ن − ١) د

⇐ ٩٦ = ١٦ + ٥ن − ٥

٥ن = ٨٥ ∴ ن = ١٧ ∴ عدد حدود المتتابعة = ١٧ حداً

(٣٣) (أ + ٢د) − أ = ٦ ⇐ أ + ٢د − أ = ٦ ∴ د = ٣

(أ + د)٢ + (أ + ٣د)٢ = ٣٦

أ٢ + ٢أد + د٢ + أ٢ + ٦أد + ٩د٢ = ٣٦

٢أ٢ + ٨أد + ١٠د٢ = ٣٦ ⇐ ٢أ٢ + ٢٤أ + ٩٠ − ٣٦ = ٠

٢أ٢ + ٢٤أ + ٦٤ = ٠ (÷٢) ⇐ أ٢ + ١٢أ + ٣٢ = ٠

(أ + ٤)(أ + ٨) = ٠ ⇐ أ = −٤ أو أ = −٨

عندما أ = −٤ المتتابعة هي (−٤، −١، ٢، ...)

عندما أ = −٨ المتتابعة هي (−٨، −٥، −٢، ...)

(٣٤) ٢ص − ٣ − ٢س − ص = ٢س + ص − ٣س

٢ص − ٢س − ٣ = ص − س

ص − س = ٣ ← (١)   (× ٥)

٢٤ − ٣س + ٣ = ٣ص − ٣ − ٢س − ص

٥ص − ٢س = ٣٠ ← (٢)

٥ص − ٥س = ١٥

٣س = ١٥ ∴ س = ٥

بالتعويض في (١) ص = ٨

∴ المتتابعة هي (١٥، ١٨، ٢١، ٢٤، ...، ٦٣)

٦٣ = ١٥ + ٣ن − ٣ ⇐ ٦٣ = ٣ن + ١٢

٣ن = ٥١ ∴ ن = ١٧ ∴ عدد الحدود = ١٧ حداً

(٣٥) عدد الأعداد المحصورة بين ٣، ٤٢ هو ٤١ − ٣ = ٣٨

عدد الأعداد المحصورة وكل منها يقبل القسمة على ٣ هي

٦، ٩، ١٢، ...، ٣٩

∴ ل = ٣٩ ∴ ٦ + (ن − ١) × ٣ = ٣٩

٦ + ٣ن − ٣ = ٣٩ ⇐ ٣ن = ٣٦ ∴ ن = ١٢

عدد الأعداد المحصورة بين ٣، ٤٢ وكل منها لا يقبل على ٣

= ٣٨ − ١٢ = ٢٦ ⇐ عدد الأعداد = ٢٦ عدد

(٣٦) ① ٦٧ ② ٢٦ ③ ١٨

④ ١٢ ⑤ ١٥ ⑥ ٣١

⑦ أ = ٣ ، ح٣ = ٧

∴ أ + ٢د = ٧ ← ٢د = ٧ − ٣ = ٤

∴ د = ٢ ∴ س = ٥

ل = ٨س + ١ = ٤١

ل = حن = أ + (ن − ١) × د

٤١ = ٣ + (ن − ١) × ٢

٣٨ = ٢ن − ٢ ← ٢ن = ٤٠ ∴ ن = ٢٠

∴ عدد الحدود = ٢٠ حداً

⑧ من المتتابعة الأصلية أ = ٢ ، د = ٣ ، ل = ١١٠

∴ ١١٠ = ٢ + (ن − ١) × ٣ ∴ ن = ٣٧

∴ عدد الحدود الفردية الرتبة = ١٩

⑨ ح٣ − ح٢ = ح٢ − ح١

(٦ك + ٣) − (٥ك − ١) = (٥ك − ١) − (٢ك + ١)

ك + ٤ = ٣ك − ٢ ∴ ٦ = ٢ك ∴ ك = ٣

⑩ أ = ٣٥ ← ح١٠ = ٣٥ + ٩د

٣٥ + ٩د < ٠ ← ٩د < −٣٥

∴ د < −٣٥/٩ ∴ د < −٣ ٨/٩

∵ د عدد صحيح ∴ د = −٤

∴ ح١٠ = ٣٥ + ٩ × −٤ = −١

⑪ أ = −٥١ ، ح١٩ = −٥١ + ١٨د

−٥١ + ١٨د > ٠ ← ١٨د > ٥١

د > ٢ ٥/٦ ∵ عدد صحيح ∴ د = ٣

∴ ح١٩ = −٥١ + ١٨ × ٣ = ٣

⑫ ∵ حن = أ + (ن − ١) د

حن+١ = أ + (ن + ١ − ١) د ⇐ ٢١ = ٥ + ن د

ن د = ١٦ ← (١)

ح٣ن−٢ = أ + (٣ن − ٢ − ١) د

٤١ = ٥ + ٣(ن − ١) د

٣٦ = ٣(ن − ١) د ← (٢) بالقسمة

ن د / (ن − ١) د = ١٦/١٢ = ٤/٣

٤ن − ٤ = ٣ن ∴ ن = ٤

⑬ ∵ أ ، ٧ ، .... ، ب ، ٢٥ فى تتابع حسابى

∴ أ + ٢٥ = ب + ٧   ∴ أ + ٢٥ = ٥أ + ٢ + ٧

٤أ = ١٦ ← أ = ٤   ∴ د = ٣ ، ل = ٢٥

ل = أ + (ن − ١) د

٢٥ = ٤ + (ن − ١) × ٣   ∴ ٢١ = (ن − ١) × ٣

٧ = ن − ١   ∴ ن = ٨

⑭ ح٣ن = أ + (٣ن − ١) د

ح٥ن = أ + (٥ن − ١) د ، ح٢ن = أ + (٢ن − ١) د

∴ ح٣ن + ح٥ن − ح٢ن = أ + (٦ن − ١) د = ح٦ن

⑮ ∵ حن = أ + (ن − ١) د

حم = أ + (م − ١) د

م² = أ + (م − ١) د ← (١)

ن² = أ + (ن − ١) د ← (٢)   بطرح (٢) من (١)

م² − ن² = (م − ١ − ن + ١) د

(م + ن) (م − ن) = (م − ن) د

∴ د = م + ن

⑯ ∵ حن = أ + (ن − ١) د

حم = أ + (م − ١) د

١/ن = أ + (م − ١) د ← (١)

١/م = أ + (ن − ١) د ← (٢) بالطرح

١/ن − ١/م = (م − ن) د

(م − ن)/(م ن) = (م − ن) د   ∴ د = ١/(م ن) بالتعويض فى (١)

أ + (م − ١) × ١/(م ن) = ١/ن

أ = ١/ن − (م − ١)/(م ن) = (م − م + ١)/(م ن)   ∴ أ = ١/(م ن)

حم+ن = أ + (م + ن − ١) د

= ١/(م ن) + (م + ن − ١)/(م ن) = (م + ن)/(م ن) = م/(م ن) + ن/(م ن)

= ١/ن + ١/م

∴ حم+ن = حم + حن

⑰ نفرض أن الأعداد هى :

أ − ٣د ، أ − د ، أ + د ، أ + ٣د

∴ مجموعهم = ٤أ   ∴ ٢٠ = ٤أ   ∴ أ = ٥

∴ الأعداد : ٥ − ٣د ، ٥ − د ، ٥ + د ، ٥ + ٣د

∴ ١/(٥ − د) + ١/(٥ + د) = ٥/١٢

(٥ + د + ٥ − د)/(٢٥ − د²) = ٥/١٢   ∴ ١٠/(٢٥ − د²) = ٥/١٢

٢/(٢٥ − د²) = ١/١٢   ∴ ٢٥ − د² = ٢٤   ∴ د² = ١   ∴ د = ±١

∴ الأعداد هى ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨

⑱ المتتابعة ١٣ ، ١٣ ١/٢ ، ١٤ ، ......

أ = ١٣   ،   د = ١/٢

ح٣ن+١ = أ + (٣ن + ١ − ١) د = ١٣ + ٣ن × ١/٢

ح٣ن+١ = ١٣ + ٣/٢ ن ← (١)

المتتابعة الثانية ٤٦ ، ٤٤,٥ ، ٤٣ ، ......

أ' = ٤٦   ،   د' = −١,٥

ح٦ن+٢ = أ' + (٦ن + ٢ − ١) د'

= ٤٦ + (٦ن + ١) × −٣/٢ = ٤٦ − ٩ن − ٣/٢

ح٦ن+٢ = ٤٤,٥ − ٩ن ← (٢)

١٣ + ٣/٢ ن = ٤٤,٥ − ٩ن

١,٥ن + ٩ن = ٤٤,٥ − ١٣

١٠,٥ن = ٣١,٥   ∴ ن = ٣١,٥/١٠,٥   ∴ ن = ٣

⑲ د = (٣س + ٢ص) − (س − ص)

= ٣س + ٢ص − س + ص

د = ٢س + ٣ص ، أ = س − ص

بفرض أن :

حن = ٩س + ١١ص

أ + (ن − ١) د = ٩س + ١١ص

(س − ص) + (ن − ١) د = ٩س + ١١ص

(ن − ١) د = ٩س + ١١ص − س + ص

= ٨س + ١٢ص

(ن − ١) (٢س + ٣ص) = ٤ (٢س + ٣ص)

ن − ١ = ٤   ∴ ن = ٥

㉗ ∵ س ، ص ، ع متتابعة حسابية

∴ ص − س = ع − ص = الأساس

∵ ٣ص + ١ − ٣س − ١ = ٣ع + ١ − ٣ص − ١

٣ص − ٣س = ٣ع − ٣ص

∴ ص − س = ع − ص = مقدار ثابت

∴ (٣س + ١، ٣ص + ١، ٣ع + ١) تكون متتابعة حسابية

(٣٨) نفرض أن المتتابعة الأولى أ، أ + د، أ + ٢د، ...

والمتتابعة الثانية أَ، أَ + دَ، أَ + ٢دَ، ...

أ = أَ + دَ (١)

أ + ٢د = أَ + ٤دَ

∴ ٢د = أَ + ٤دَ − أ (٢) بالتعويض فى (١)

∴ ٢د = ٣دَ (٣)

ح$_{٥}$ (من المتتابعة الأولى) = أ + ٤د بالتعويض من (١) فى (٣)

∴ ح$_{٥}$ = أَ + دَ + ٦دَ = أَ + ٧دَ = ح$_{٨}$ (من المتتابعة الثانية)

(٣٩) أ + (ن − ١) د = ١٠أ ∴ (ن − ١) د = ٩أ ← (١)

١٠أ − د = أ + ٣د + أ + ٤د ∴ أ = د

بالتعويض فى (١) ∴ ن − ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

(٤٠) أ + ٦د = ٣٠ (أ + ٢د)^{٢} = أ × (أ + ١٠د)

أ = ٣٠ − ٦د أ^{٢} + ٤أد + ٤د^{٢} = أ^{٢} + ١٠أد

٤د^{٢} − ٦أد = ٠

∴ ٢د (٢د − ٣أ) = ٠ ∴ ٢د = ٣أ

٢د = ٣(٣٠ − ٦د) ∴ ٢د = ٩٠ − ١٨د

٢٠د = ٩٠ ∴ د = ٤,٥ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى (٣، ٧,٥، ١٢، ...)

ح$_{ن}$ = ٦٦ ∴ ٣ + (ن − ١) × ٤,٥ = ٦٦

٣ + ٤,٥ن − ٤,٥ = ٦٦ ∴ ٤,٥ن = ٦٧,٥ ∴ ن = ١٥

(٤١) بفرض أن المتتابعة هى أ، أ + د، أ + ٢د، أ + ٣د

∴ (أ + د)(أ + ٢د) − أ(أ + ٣د) = ٣٢

أ^{٢} + ٣أد + ٢د^{٢} − أ^{٢} − ٣أد = ٣٢

٢د^{٢} = ٣٢ ∴ د^{٢} = ١٦ ∴ د = ٤ لأن حدودها موجبة

(أ + د)(أ + ٣د) − ٢أ(أ + ٢د) = ٣٩

أ^{٢} + ٤أد + ٣د^{٢} − ٢أ^{٢} − ٤أد = ٣٩

−أ^{٢} + ٣د^{٢} = ٣٩ ∴ ٣ × ١٦ − ٣٩ = أ^{٢}

∴ أ^{٢} = ٩ ∴ أ = ٣ ∴ ح$_{ن}$ = ١٩٩

∴ ٣ + (ن − ١) × ٤ = ١٩٩

٣ + ٤ن − ٤ = ١٩٩ ∴ ٤ن = ٢٠٠ ∴ ن = ٥٠

(٤٢) بفرض أن المتتابعة (أ − ٣د، أ − د، أ + د، أ + ٣د، ...)

أ − ٣د + أ + ٣د = ٤ ∴ أ = ٢ (لاحظ أن أ ليس الحد الأول)

(أ − د)^{٢} + (أ + د)^{٢} = ٢(أ − ٣د)

∴ ٢أ^{٢} + ٢د^{٢} = ٢(أ − ٣د)

أ^{٢} + د^{٢} = أ − ٣د وبوضع أ = ٢

∴ ٤ + د^{٢} = ٢ − ٣د

∴ د^{٢} + ٣د + ٢ = ٠ ∴ (د + ٢)(د + ١) = ٠

∴ د = −٢ أو −١

∴ المتتابعة هى (٨، ٤، ٠، ...) أو (٥، ٣، ١، ...)

(٤٣) بفرض أن المتتابعة هى (أ − د، أ، أ + د، ...)

∴ ٣أ = ١٢ ∴ أ = ٤ (أ − د) أ (أ + د) = ٤٨

(٤ − د)(٤ + د) = ١٢ ∴ ١٦ − د^{٢} = ١٢

∴ د^{٢} = ٤ ∴ د = −٢ لأنها متناقصة

∴ المتتابعة (٦، ٤، ٢، ...)

ح$_{ن}$ = ٦ + (ن − ١) × −٢ = −٢ن + ٨

∴ −٢ن + ٨ < −٥٠١ ⟸ −٢ن < −٥٠٩

٢ن > ٥٠٩ ⟸ ن > ٢٥٤ $\frac{١}{٢}$ ∴ ن = ٢٥٥

(٤٤) ح$_{ن-١}$ − ح$_{ن}$ = ٥ ∴ ح$_{ن}$ متتابعة حسابية أساسها = ٥

حَ$_{ن+١}$ − حَ$_{ن}$ = ٧ح$_{ن+١}$ + ٢ − ٧ح$_{ن}$ − ٢

= ٧ح$_{ن+١}$ − ٧ح$_{ن}$ = ٧(ح$_{ن+١}$ − ح$_{ن}$)

= ٧ × ٥ = ٣٥ ∴ المتتابعة حسابية

ح$_{ن}$ = −٥٠ + (ن − ١)٥ = −٥٠ + ٥ن − ٥

= ٥ن − ٥٥ = ٥(ن − ١١)

∴ ح$_{١}$ = −٥٠، ح$_{٢}$ = −٤٥، ح$_{٣}$ = −٤٠

∴ المتتابعة هى (−٥٠، −٤٥، −٤٠، ...)

حَ$_{ن}$ = ٧ح$_{ن}$ + ٢ = ٧[٥ن − ٥٥] + ٢ = ٣٥ن − ٣٨٥ + ٢

= ٣٥ن − ٣٨٣ عند ن = (١، ٢، ٣، ...)

∴ المتتابعة هى (−٣٤٨، −٣١٣، −٢٧٨، ...)

حَ$_{ن}$ > ٠ عندما ٣٥ن > ٣٨٣ ∴ ن > $\frac{٣٨٣}{٣٥}$

∴ ن > ١٠ $\frac{٣٣}{٣٥}$ ∴ ن = ١١

∴ أول حد موجب هو حَ$_{١١}$ = ٣٥ × ١١ − ٣٨٣ = ٢

تمارين (٣) على الأوساط الحسابية

١) ① ٢٠ ② ٣ ③ ٣٥ ④ ٩

⑤ أ = ٦٧ ، د = −٣

$ح_ن$ < ٠ ∴ أ + (ن − ١) + د < ٠

٦٧ + (ن − ١) × −٣ < ٠

٦٧ − ٣ن + ٣ < ٠ ⟸ ٧٠ − ٣ن < ٠

∴ −٣ن < −٧٠ (÷ −٣) ∴ ن > ٢٣ $\frac{1}{3}$

رتبة أول حد سالب هو $ح_{٢٤}$

$ح_{٢٤}$ = أ + ٢٣د = ٦٧ + ٢٣ × −٣ = −٢

⑥ $ح_١$ + $ح_٢$ = ٩

∴ أ + أ + د = ٩

∴ ٢أ + د = ٩ ← ①

$ح_٥$ = ٢٢ ← أ + ٤د = ٢٢ ← ②

بحل ① ، ② معاً

٢أ + د = ٩

٢أ + ٨د = ٤٤ بالطرح

−٧د = −٣٥ (÷ −٧)

د = ٥ بالتعويض في ①

٢أ + ٥ = ٩

٢أ = ٤ (÷٢) ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٧ ، ١٢ ، .....)

$ح_ن$ = أ + (ن − ١) × د

٦٢ = ٢ + (ن − ١) × ٥

٦٢ − ٢ = ٥ن − ٥

٦٠ + ٥ = ٥ن

٦٥ = ٥ن (÷٥) ∴ ن = ١٣

٢) ① أوساط حسابية ② −٢ ③ +٢ ④ ١٠ ⑤ س = ١٦

٣) ① $ح_٨$ ② ٢ن ③ ٣٦ ④ ٣ ⑤ $ح_٩$ ⑥ ل − د ⑦ ٣

٤) ∵ عدد الأوساط = ٥ ∴ ن = ٧ ، أ = ٦ ، $ح_٧$ = ٤٨

أ + ٦د = ٤٨ ∴ ٦ + ٦د = ٤٨ ⟸ د = ٧

∴ الأوساط هي: (١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١)

٥) ∵ عدد الأوساط = ٥ ∴ عدد الحدود = ٧

أ = ٤ ، ل = ٢٢ ، ن = ٧

ل = أ + (ن − ١) د ⟸ ٢٢ = ٤ + ٦د

⟸ ١٨ = ٦د ∴ د = ٣

الأوساط هي (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩) ∴ الوسط الرابع = ١٦

٦) ∵ عدد الأوساط = ١٢ ∴ عدد الحدود = ١٢ + ٢ = ١٤

أ = ٦٤ ، ل = ٢٥ ، ن = ١٤

ل = أ + (ن − ١) د ⟸ ٢٥ = ٦٤ + ١٣د

١٣د = −٣٩ ∴ د = −٣

∴ الأوساط هي: (٦١ ، ٥٨ ، ٥٥ ، ... ، ٢٨)

٧) ∵ عدد الأوساط = ١٦ ∴ عدد الحدود = ١٨

أ = ٢٧ ، ل = −٢٤ ، ن = ١٨

ل = أ + (ن − ١) د ⟸ −٢٤ = ٢٧ + ١٧د

−٥١ = ١٧د ∴ د = −٣

∴ الأوساط هي: (٢٤ ، ٢١ ، ١٨ ، ... ، −٢١)

٨) العددان هما ٣س ، ١٠س

$\frac{٣س + ١٠س}{٢}$ = ١٣ ⟸ ١٣س = ٢٦ ∴ س = ٢

∴ العددان هما ٦ ، ٢٠

٩) نفرض أن العددين هما س ، ص

س − ٢ص = ٣ ← (١) ⟸ $\frac{س + ص}{٢}$ = $\frac{٢١}{٢}$

∴ س + ص = ٢١ ← (٢)

بحل المعادلتين س − ٢ص = ٣

س + ص = ٢١

−٣ص = −١٨ ∴ ص = ٦

بالتعويض في (١) ⟸ س − ١٢ = ٣ ∴ س = ١٥

∴ العددان هما ١٥ ، ٦

١٠) أ + ٥د = ٢٣ ⟸ ٣ + ٥د = ٢٣ ∴ ٥د = ٢٠ ∴ د = ٤

أ + (ن − ١) د = ٤٧ ⟸ ٣ + ٤ن − ٤ = ٤٧

∴ ٤ن = ٤٨ ∴ ن = ١٢ ∴ عدد الأوساط = ١٠

الوسط التاسع = أ + ٩د = ٣ + ٩ × ٤ = ٣٩

١١) $ح_٩$ = ٢٥ ⟸ أ + ٨د = ٢٥ ← (١)

$ح_٣$ + $ح_٥$ = ٢٠ ∴ أ + ٢د + أ + ٤د = ٢٠

٢أ + ٦د = ٢٠ ∴ أ + ٣د = ١٠ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) ∴ أ = ١ ، د = ٣

المتتابعة هي (١ ، ٤ ، ٧ ، ...)

⑫ أ = (٣٦ + ٢٤)/٢ = ٣٠ ، (أ + ب)/٢ = ٢٤

(٣٠ + ب)/٢ = ٢٤ ∴ ٣٠ + ب = ٤٨ ∴ ب = ١٨

⑬ (أ + ب)/٢ = ٨ ∴ أ + ب = ١٦ ← (١)

(٤أ + ٢ب)/٢ = ٢٠ ∴ ٢أ + ب = ٢٠ ← (٢)

بحل (١)، (٢) ∴ أ = ٤ ، ب = ١٢

⑭ أ = ١ ، ح٨ = ٣ ح٢

١ + ٧د = ٣(١ + ٢د)

١ + ٧د = ٣ + ٦د ∴ د = ٢ ∴ حن = ١٧

١ + (ن − ١) × ٢ = ١٧ ∴ ن = (١٧ − ١)/٢ + ١ = ٩

∴ عدد الأوساط = ٩ − ٢ = ٧

⑮ (ح٣ + ح٧)/٢ = ١٩ ∴ (أ + ٢د + أ + ٦د)/٢ = ١٩

(٢أ + ٨د)/٢ = ١٩ ∴ أ + ٤د = ١٩ ← (١)

ح١٠ − ٢ح٤ = ٢ ⇐ أ + ٩د − ٢أ − ٦د = ٢

∴ أ − ٣د = −٢ ← (٢)

بحل (١)، (٢) ∴ أ = ٧ ، د = ٣

المتتابعة هى (٧، ١٠، ١٣، ...)

⑯ أ + أ + ٣د = ١٦ ⇐ ٢أ + ٣د = ١٦ ← (١)

(أ + د + أ + ٣د)/٢ = ٦ ⇐ أ + ٢د = ٦ ← (٢) × ٢

٢أ + ٣د = ١٦ ← (١)

٢أ + ٤د = ١٢ ← (٢)

− د = ٤ ∴ د = −٤ بالتعويض فى (١)

٢أ − ١٢ = ١٦ ∴ ٢أ = ٢٨ ∴ أ = ١٤

∴ المتتابعة هى (١٤، ١٠، ٦، ...)

ح٦ = أ + ٥د = ١٤ − ٢٠ = −٦

⑰ نفرض أن أساس المتتابعة = د

∴ الوسطين الأول والثانى = ٣ + د ، ٣ + ٢د

∴ الوسطين الأخيرين = ٣٥ − د ، ٣٥ − ٢د

(٣ + د + ٣ + ٢د)/(٣٥ − د + ٣٥ − ٢د) = ٣/١٦ ⇐ (٦ + ٣د)/(٧٠ − ٣د) = ٣/١٦

٩٦ + ٤٨د = ٢١٠ − ٩د ⇐ ٥٧د = ١١٤ ∴ د = ٢

٣٥ = ٣ + ٢(ن − ١) ∴ ٢ن = ٣٤ ∴ ن = ١٧

∴ عدد الأوساط = ١٥

⑱ س ، أ ، ب ، ص متتابعة حسابية

٢أ = س + ب ∴ س = ٢أ − ب

٢ب = أ + ص ∴ ص = ٢ب − أ

س − ص = ٢أ − ب − ٢ب + أ

= ٣أ − ٣ب = ٣(أ − ب)

⑲ نفرض أن أساس المتتابعة = د

الوسط الذى ترتيبه ن − ١ = ٢٨ − ٢د

(٢ + ٣د)/(٢٨ − ٢د) = ١/٣ ∴ د = ٢

ل = أ + (ن − ١) د ⇐ ٢٨ = ٢ + ٢ن − ٢

∴ ن = ١٤ حيث ن عدد الحدود

∴ عدد الأوساط = ١٢ وسط

⑳ ① ٢ص = س + ع

(س + ٢ص + ع) (٢ص − س − ع)

= ٤ص (٢ص − ٢ص) = ٤ص × صفر = صفر

② بضرب البسط والمقام × ٢

∴ (٢ص + ٤س)/(٢ص − ٢ع) + (٢ص + ٤ع)/(٢ص − ٢س)

= (س + ع + ٤س)/(س + ع − ٢ع) + (س + ع + ٤ع)/(س + ع − ٢س)

= (٥س + ع)/(س − ع) + (س + ٥ع)/(ع − س) = (٥س + ع − س − ٥ع)/(س − ع)

= (٤س − ٤ع)/(س − ع) = ٤

㉑ ① (س² + ع²)/٢ ② ل − ٢د ③ ٢٢

④ ٢ ⑤ ٢٨ ⑥ ٣

⑦ −٧ ⑧ −٩، ٢ ⑨ −١/٢

⑩ أ + ب = ١٠ ∴ أ = ١٠ − ب ← (١)

أ² + ب² = ٢ × ٢٦ ⇐ (١٠ − ب)² + ب² = ٥٢

١٠٠ − ٢٠ب + ب² + ب² = ٥٢

٢ب² − ٢٠ب + ٤٨ = ٠ (÷ ٢)

ب² − ١٠ب + ٢٤ = ٠ ⇐ (ب − ٦)(ب − ٤) = ٠

ب = ٦	ب = ٤
أ = ٤	أ = ٦
أ : ب = ٢ : ٣ مرفوض	أ : ب = ٣ : ٢

(١١) ∵ ب وسط حسابي بين أ ، هـ   ∴ ٢ب = أ + هـ

ب² − (هـ − ب)² = ب² − (هـ² − ٢هـ ب + ب²)

= ب² − هـ² + ٢هـ ب − ب²

= هـ (٢ب − هـ) = هـ (أ + هـ − هـ)

ب² − (هـ − ب)² = هـ أ

---

(١٢) ∵ ص وسط حسابي بين س ، ع

∴ س + ع = ٢ص   ∴ س = ٢ص − ع

(ص + ٢ع)/(ص − س) − (ص + ٢س)/(ع − ص)

= (ص + ٢ع)/(ص − ٢ص + ع) − (ص + ٤ص − ٢ع)/(ع − ص)

= (ص + ٢ع)/(ع − ص) − (٥ص − ٢ع)/(ع − ص) = (ص + ٢ع − ٥ص + ٢ع)/(ع − ص)

= (٤ع − ٤ص)/(ع − ص) = ٤(ع − ص)/(ع − ص) = ٤

حل آخر:

س ، ص ، ع في تتابع حسابي

∴ بوضع س = أ − د ، ص = أ ، ع = أ + د

∴ (أ + ٢(أ + د))/(أ − (أ − د)) − (أ + ٢(أ − د))/(أ + د − أ)

= (٣أ + ٢د)/د − (٣أ − ٢د)/د = (٣أ + ٢د − ٣أ + ٢د)/د = ٤د/د = ٤

---

(١٣) ∵ أ ، ب ، ٢هـ في تتابع حسابي

∴ ٢ب = أ + ٢هـ   ∴ أ = ٢ب − ٢هـ ← (١)

∵ ٢ب ، ٣هـ ، د في تتابع حسابي

٦هـ = ٢ب + د   ∴ د = ٦هـ − ٢ب ← (٢)

٣أ + د = ٣(٢ب − ٢هـ) + ٦هـ − ٢ب

= ٦ب − ٦هـ + ٦هـ − ٢ب = ٤ب

---

(١٤) ∵ أ ، ب ، هـ ، د ، ه في تتابع حسابي

بفرض أن ، أ = أَ − ٢د

ب = أَ − د ، هـ = أَ

د = أَ + د ، ه = أَ + ٢د

∴ (هـ − ب)/(ه − أ) = (أَ − أَ + د)/(أَ + ٢د − أَ + ٢د) = د/٤د = ١/٤

---

(١٥) ح١٢ + ح٢٥ = ٢ × ٢٨,٥

أ + ١٢د + أ + ٢٤د = ٢ × ٢٨,٥

٢أ + ٣٦د = ٢ × ٢٨,٥

أ + ١٨د = ٢٨,٥ ← (١)

أ + ١٨د + أ + ١٩د + أ + ٢٠د = ٨٤

٣أ + ٥٧د = ٨٤   (÷٣)

أ + ١٩د = ٢٨ ← (٢)

أ + ١٨د = ٢٨,٥ ← (١) بالطرح

د = −١/٢   ∴ أ − ٩ = ٢٨,٥   ∴ أ = ٣٧,٥

---

(١٦) ٢(٣س + ٢) = ١٥ + ٤س − ٥

٦س + ٤ = ١٠ + ٤س   ∴ ٢س = ٦   ∴ س = ٣

(١٥ ، ١١ ، ٧ ، ......)   ∴ أ = ١٥ ، د = −٤

بفرض أن ح_ن < −٥٠

أ + (ن − ١)د < −٥٠ ⟸ ١٥ + (ن − ١)د < −٥٠

١٥ − ٤ن + ٤ < −٥٠ ⟸ ١٩ − ٤ن < −٥٠

١٩ + ٥٠ < ٤ن ⟸ ن > ٦٩/٤

ن > ١٧ ١/٤ ⟸ ن = ١٨ حيث ن ∈ ص+

∴ ح١٨ أول حد قيمته تقل عن −٥٠

---

(٢٢) زوايا Δ هي أ ، ب ، هـ

أ + هـ = ٢ب (١)   ، هـ − أ = ٨٠°

−أ + هـ = ٨٠°   بالجمع

٢هـ = ٢ب + ٨٠° ⟸ هـ = ب + ٤٠°

∵ أ + ب + هـ = ١٨٠°   ∴ ٣ب = ١٨٠°   ∴ ب = ٦٠°

∴ هـ = ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠   ∴ أ = ٢٠°

قياسات زوايا Δ هي ٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°

---

(٢٣) ن = ٨ ، أ = لو ٢ ، لو ٢٥٦ = لو ٢ + (٨ − ١) د

٧د = لو ٢٥٦ − لو ٢ = لو (٢٥٦/٢)

٧د = لو ٢^٧ ⟸ ٧د = ٧ لو ٢   ∴ د = لو ٢

∴ الأوساط هي (٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٧ لو ٢)

---

(٢٤) مجموع الأوساط الثلاثة = ٤٢

∴ أ + د + أ + ٢د + أ + ٣د = ٤٢

∴ أ + ٢د = ١٤ ← (١)

أ + د − أ − دَ = ٢   ∴ د − دَ = ٢ ← (٢) د = ٢ + دَ

ب = أ + ٤د من الأولى ، ب = أ + ٦دَ من الثانية

∴ أ + ٤د = أ + ٦دَ   ∴ ٤د = ٦دَ ← (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣)

∴ ٤(٢ + دَ) = ٦دَ ⟸ ٨ + ٤دَ = ٦دَ   ∴ ٢دَ = ٨

∴ دَ = ٤   ∴ د = ٦   ∴ أ = ٢ ، ب = ٢٦

---

(٢٥) بفرض أطوال أضلاع المثلث حـَ ، أَ ، بَ في متتابعة حسابية

نفرض أن حـَ ، أَ ، بَ تكون المتتابعة (أ − د ، أ ، أ + د)

∵ Δ قائم الزاوية ∴ (أ + د)^{٢} = أ^{٢} + (أ − د)^{٢}

∴ أ^{٢} + د^{٢} + ٢أد = أ^{٢} + أ^{٢} + د^{٢} − ٢أد

أ^{٢} − ٤أد = ٠ ⟸ أ(أ − ٤د) = ٠

أ = ٠ مرفوضة ∴ أ = ٤د

∴ النسبة بين الأضلاع ٤د − د ، ٤د ، ٤د + د

= ٣د : ٤د : ٥د = ٣ : ٤ : ٥

٢٦ س، ص، ع متتابعة حسابية ∴ ٢ص = س + ع ← (١)

(س + ص) + (ص + ع) = ٢ص + س + ع

بالتعويض من (٢)

= س + ع + س + ع = ٢(س + ع)

∴ (س + ع) وسط حسابي بين (س + ص)، (ص + ع)

∴ س + ص، س + ع، ص + ع في تتابع حسابي أيضاً

تمارين (٤) على المتسلسلات الحسابية

١ ① −١٠ ② ح$_{١}$ ③ ٤٨ ④ ٢٠

⑤ (٦س − ٢) − (٢س + ٢) = ٧س − (٦س − ٢)

٦س − ٢ − ٢س − ٢ = ٧س − ٦س + ٢

٤س − ٤ = س + ٢

٣س = ٦ (÷٣) ∴ س = ٢

⑥ ∵ ح$_{٢}$ + ح$_{٤}$ = ٢

∴ أ + د + أ + ٣د = ٢

٢أ + ٤د = ٢ (÷٢)

∴ أ + ٢د = ١ ← (١)

∵ ح$_{٦}$ + ح$_{٧}$ + ح$_{٨}$ = −٤٥

أ + ٥د + أ + ٦د + أ + ٧د = −٤٥

٣أ + ١٨د = −٤٥ (÷٣)

∴ أ + ٦د = −١٥ ← (٢) بحل (١)، (٢) بالطرح

∴ ٤د = −١٦ (÷٤)

∴ د = −٤ بالتعويض في (١)

أ + ٢ × −٤ = ١ ∴ أ = ٩

∴ المتتابعة هي (٩، ٥، ١ ......)

٢ ① هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

② هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

③ ٩٠ ④ ٢١٠ ⑤ ٩٠

⑥ ٣٥ ⑦ ٢٠٠ ⑧ ٢٤٣

٣ ① ٢٥ ② $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ر − ١)

③ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ر + ٢) ④ $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٤ر − ١)

⑤ صفر ⑥ ٢٤

٤ ① هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

هـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٦ + ١٨] = ١٢٠

② ل = ٨٠ ⟸ ٢ + ٣ن − ٣ = ٨٠

⟸ ٣ن = ٨١ ∴ ن = ٢٧

هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] ⟸ هـ$_{٢٧}$ = $\frac{٢٧}{٢}$ × (٢ + ٨٠) = ١١٠٧

③ ل = ١٠٢ ⟸ ٩ + ٣ن − ٣ = ١٠٢

⟸ ٣ن = ٩٦ ∴ ن = ٣٢

هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] ⟸ هـ$_{٣٢}$ = $\frac{٣٢}{٢}$ × ١١١ = ١٧٧٦

٥ ∵ ن = ٣٠ ، ح$_{١}$ = أ = ٢ × ١ + ٣ = ٥

ل = ٢ × ٣٠ + ٣ = ٦٣

∵ هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] ∴ هـ$_{٣٠}$ = $\frac{٣٠}{٢}$ [٥ + ٦٣] = ١٠٢٠

حل آخر:

$\sum_{ر=١}^{٣٠}$ (٢ر + ٣) = ٢ × $\frac{٣٠ \times ٣١}{٢}$ + ٣ × ٣٠ = ١٠٢٠

٦ أ + ٥د = ١٦ ← (١)

، أ + ١٩د = −٢٦ ← (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ١٤د = −٤٢ ∴ د = −٣

بالتعويض في (١) ∴ أ = ٣١

∴ المتتابعة هي (٣١، ٢٨، ٢٥، ...)

∵ هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] ∴ هـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٣١ − ٢٦] = ٥٠

٧ أ + د + أ + ٢د = ١٢

∴ ٢أ + ٣د = ١٢ ← (١) ،

أ + ٩د = ٢١ ← (٢) بضرب (٢) × ٢ ثم طرح (١)

∴ ١٥د = ٣٠ ∴ د = ٢ ، أ = ٣

∴ المتتابعة هي (٣، ٥، ٧، ...)

، هـ$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٣ + ١٩ × ٢] = ٤٤٠

(٨) أ = ١ ، د = ٢ ∵ هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

∴ ٤٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ + (ن − ١) × ٢] ∴ ن^{٢} = ٤٠٠

∴ ن = ٢٠ والحل الآخر = − ٢٠ مرفوض

∴ عدد الحدود التي يجب أخذها = ٢٠ حداً

(٩) أ = ٩ ، د = ٣

① هـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢ × ٩ + ١٤ × ٣] = ٤٥٠

② ح$_{٥}$ = ٩ + ٤ × ٣ = ٢١ ، ح$_{١٥}$ = ٩ + ١٤ × ٣ = ٥١

هـ$_{١١}$ = $\frac{١١}{٢}$ [٢١ + ٥١] = ٣٩٦

③ هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٩ + (ن − ١) × ٣] = ٧٥٠

$\frac{ن}{٢}$ [١٨ + ٣ن − ٣] = ٧٥٠ ∴ ن (١٥ + ٣ن) = ١٥٠٠

٣ن^{٢} + ١٥ن − ١٥٠٠ = ٠ (÷ ٣)

ن^{٢} + ٥ن − ٥٠٠ = ٠ ⇐ (ن + ٢٥) (ن − ٢٠) = ٠

∴ ن = ٢٠ ، ن = − ٢٥ (مرفوض)

∴ عدد الحدود = ٢٠ حداً

(١٠) أ = ٢٧ ، د = − ٣ ، هـ$_{ن}$ = صفر

هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢٧ + (ن − ١) × − ٣] = صفر

٥٤ − ٣ن + ٣ = صفر ∴ ٣ن = ٥٧ ⇐ ن = ١٩

∴ عدد الحدود = ١٩ حداً

(١١) أ = ٨٩ ، د = − ٨ ، هـ$_{ن}$ < صفر

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٨٩ + (ن − ١) × − ٨] < صفر

١٧٨ − ٨(ن − ١) < صفر ∴ ن > $\frac{١٧٨}{٨}$ + ١

ن > ٢٣,٢٥ ∴ ن = ٢٤ حداً

(١٢) أ = ٢٥ ، د = − ٤ ، هـ$_{ن}$ > صفر

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢٥ + (ن − ١) × − ٤] > صفر

٥٠ − ٤(ن − ١) > صفر ∴ ن < $\frac{٥٠}{٤}$ + ١

ن < ١٣,٥ ∴ ن = ١٣ حداً

(١٣) ح$_{ن}$ > ٠ ⇐ ٣٥ − ١,٥ن + ١,٥ > ٠

− ١,٥ن > − ٣٦,٥ ∴ ن < ٢٤ $\frac{١}{٣}$ ∴ ن = ٢٤

هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

هـ$_{٢٤}$ = ١٢[٧٠ − ٣٤,٥] = ٤٢٦

(١٤) (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...)

ح$_{١٥}$ = أ + ١٤د = ٢٥ + ١٤ × (− ٤) = − ٣١

هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢ح$_{١٥}$ + (ن − ١) د]

− ١٩٥ = $\frac{ن}{٢}$ × [− ٦٢ − ٤ن + ٤]

− ١٩٥ = ن(− ٢٩ − ٢ن)

٢ن^{٢} + ٢٩ن − ١٩٥ = ٠

(٢ن + ٣٩)(ن − ٥) = ٠ ∴ ن = ٥

(١٥) أ = ٣٢ ، د = − ٤

① ح$_{ن}$ < صفر

٣٢ + (ن − ١) × − ٤ < صفر ∴ ن > $\frac{٣٢}{٤}$ + ١

ن > ٩ ⇐ ن = ١٠

ح$_{١٠}$ = ٣٢ + ٩ × − ٤ = − ٤ ∴ ح$_{١٠}$ = − ٤

② هـ$_{ن}$ > صفر

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣٢ + (ن − ١) − ٤] > صفر

٦٤ − ٤(ن − ١) > صفر

ن < $\frac{٦٤}{٤}$ + ١ ⇐ ن < ١٧ ∴ ن = ١٦ حداً

(١٦) أ = ٢٥ ، د = − ٢

① ح$_{ن}$ > صفر

٢٥ + (ن − ١) × − ٢ > صفر ∴ ن < $\frac{٢٥}{٢}$ + ١

ن < ١٣,٥ ⇐ ن = ١٣

∴ عدد الحدود الموجبة = ١٣ حداً

هـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ [٢ × ٢٥ + ١٢ × − ٢] ∴ هـ$_{١٣}$ = ١٦٩

② هـ$_{ن}$ = ١٢٠

$\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢٥ + (ن − ١) × − ٢] = ١٢٠

ن (٢٥ − ن + ١) = ١٢٠ ⇐ ن^{٢} − ٢٦ن + ١٢٠ = ٠

ن = ٦ أو ن = ٢٠

(١٧) (أ ، أ + د ، أ + ٢د ، ...)

أ + د = ١٣ ← (١) ، هـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

٢٣٥ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢أ + ٩د] ⇐ ٤٧ = ٢أ + ٩د ← (٢)

٢أ + ٩د = ٤٧ (٢)
٢أ + ٢د = ٢٦ (١) } بالطرح

٧د = ٢١ ∴ د = ٣ ∴ أ = ١٠

المتتابعة (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

(١٨) حـ_ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

٩٦٠٠ = ن/٢ [٢٠٠ + ٤٠ن − ٤٠]

١٩٢٠٠ = ن [٤٠ن + ١٦٠] ⟸ ١٩٢٠٠ = ٤٠ن² + ١٦٠ن

٤٠ن² + ١٦٠ن − ١٩٢٠٠ = ٠ ⟸ ن² + ٤ن − ٤٨٠ = ٠

(ن − ٢٠)(ن + ٢٤) = ٠ ⟸ ن = ٢٠ ، ن = −٢٤ مرفوضة

---

(١٩) ∵ ل = ح_ن = أ + (ن − ١) ء

∴ −٢٦ = ١٢ + (ن − ١) ء

∴ (ن − ١) ء = −٣٨ ← (١) ، ∵ حـ_ن = ن/٢ × (أ + ل)

∴ −١٤٠ = ن/٢ (١٢ − ٢٦) ∴ −١٤٠ = ن/٢ × (−١٤)

∴ ن = ٢٠ ← (٢) وبالتعويض فى ← (١)

∴ ١٩ء = −٣٨ ∴ ء = −٢

∴ المتتابعة هي (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، −٢٦)

---

(٢٠) (١) أ = ٢٣ ، ح_ن = ٨٦ ، حـ_ن = ٥٤٥

حـ_ن = ٥٤٥ ∴ ن/٢ [٢٣ + ٨٦] = ٥٤٥

ن/٢ × ١٠٩ = ٥٤٥ ∴ ن = ١٠ حدود

ح_١٠ = ٢٣ + ٩ء ∴ ٢٣ + ٩ء = ٨٦ ⟸ ء = ٧

المتتابعة هي: (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ... ، ٨٦)

(٢) أ = ١٧ ، ل = −٩٥ ، حـ_ن = −٥٨٥

حـ_ن = −٥٨٥ ∴ ن/٢ [١٧ − ٩٥] = −٥٨٥

ن/٢ × −٧٨ = −٥٨٥ ∴ ن = ١٥ حداً

ح_١٥ = أ + ١٤ء ∴ أ + ١٤ء = −٩٥

∴ ١٧ + ١٤ء = −٩٥ ∴ ء = (−٩٥ − ١٧)/١٤

∴ ء = −٨ ∴ المتتابعة هي: (١٧ ، ٩ ، ١ ، ...)

---

(٢١) أ + ء = ١٢ ⟸ أ = ١٢ − ء ، ل − ء = ٤٨ ، ل = ٤٨ + ء

حـ_ن = ن/٢ [أ + ل]

٤٥٠ = ن/٢ [١٢ − ء + ٤٨ + ء]

٩٠٠ = ن [١٢ + ٤٨] ⟸ ٩٠٠ = ٦٠ن ∴ ن = ١٥

---

(٢٢) أ + ٢ء − أ = ٤ ⟸ ء = ٢

حـ_ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

٤/٢ [٢أ + ٣ء] = صفر ⟸ ٢(٢أ + ٦) = ٠

أ = −٣ ∴ المتتابعة (−٣ ، −١ ، ١ ، ٣ ، ...)

حـ_ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

٣٢٠ = ن/٢ [−٦ + ٢ن − ٢] ⟸ ٣٢٠ = ن² − ٤ن

ن² − ٤ن − ٣٢٠ = ٠ ⟸ (ن − ٢٠)(ن + ١٦) = ٠

∴ ن = ٢٠ حداً

---

(٢٣) حـ_ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

∴ ٢٠/٢ [٢أ + ١٩ء] = ٨٦٠

٢أ + ١٩ء = ٨٦ ← (١)

(أ + ٢ء + أ + ٣ء) − (أ + ٥ء) = ٥

∴ أ = ٥ ← (٢) من (١) ، (٢) ∴ ١٠ + ١٩ء = ٨٦

∴ ١٩ء = ٧٦ ⟸ ء = ٤

∴ المتتابعة هي (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...)

---

(٢٤) ح_٤ + ح_٥ = ١٣

أ + ٣ء + أ + ٤ء = ١٣ ⟸ ٢أ + ٧ء = ١٣ ← ①

٢أ = ١٣ − ٧ء ∴ أ = (١٣ − ٧ء)/٢

ح_٤ × ح_٥ = ٤٠ ⟸ (أ + ٣ء)(أ + ٤ء) = ٤٠

((١٣ − ٧ء)/٢ + ٣ء)((١٣ − ٧ء)/٢ + ٤ء) = ٤٠

((١٣ − ٧ء + ٦ء)/٢)((١٣ − ٧ء + ٨ء)/٢) = ٤٠

((١٣ − ء)/٢)((١٣ + ء)/٢) = ٤٠ ⟸ (١٦٩ − ء²)/٤ = ٤٠

١٦٩ − ء² = ١٦٠ ⟸ ء² = ١٦٩ − ١٦٠ ∴ ء = −٣

بالتعويض فى (١) ∴ ٢أ − ٢١ = ١٣ ∴ أ = ١٧

∴ المتتابعة هى (١٧ ، ١٤ ، ١١ ، ...)

حـ_١٢ = ٦[٣٤ − ٣٣] ∴ حـ_١٢ = ٦

---

(٢٥) ح_٣ + ح_٥ = ٢٤

أ + ٢ء + أ + ٤ء = ٢٤ ⟸ ٢أ + ٦ء = ٢٤

أ + ٣ء = ١٢ (١)

(أ + ٥ء)² = ٣٢٤ ∴ المتتابعة تزايدية

∴ أ + ٥ء = ١٨ (٢) بحل (١) ، (٢)

∴ أ = ٣ ، ء = ٣

المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)

حـ_ن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

حـ_٢٠ = ٢٠/٢ [٢ × ٣ + ١٩ × ٣] = ٦٣٠

٢٦) أ + د = ٩١ ← (١)

أ + ٤د = ٦٤ ← (٢)

−٣د = ٢٧ ∴ د = −٩ بالتعويض في (١)

أ − ٩ = ٩١ ∴ أ = ١٠٠

∴ المتتابعة هي (١٠٠، ٩١، ٨٢، ...)

ح$_{ن}$ > ٠ ⟸ أ + (ن − ١) د > ٠

١٠٠ − ٩ن + ٩ > ٠ ⟸ ن = ١٢

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

⟸ جـ$_{١٢}$ = ٦ [٢٠٠ − ٩٩] = ٦٠٦

---

٢٧) $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤ × ٤] = ٠ ∴ أ = −٨

∴ المتتابعة هي (−٨، −٤، ٠، ...)

∴ ح$_{ن}$ > ١٢٢ ⟸ −٨ + (ن − ١) × ٤ > ١٢٢

∴ ن > ٣٣ $\frac{١}{٢}$ ∴ رتبة الحد المطلوب = ٣٤

---

٢٨) جـ$_{١٠}$ = −٧٥ ⟸ −٧٥ = ٥ [٢أ + ٩ × −٣]

−٧٥ = ١٠أ − ١٣٥ ⟸ ٦٠ = ١٠أ

∴ أ = ٦ ، ح$_{ن}$ = ٦ ⟸

١٨ − ٣ن + ٣ = ٦ ∴ −٣ن = −١٥

∴ ن = ٥ ∴ ح$_{٥}$

---

٢٩) جـ$_{٧}$ الأولى = $\frac{٧}{٢}$ (٢أ + ٦د) = ٩١

∴ أ + ٣د = ١٣ ← ①

جـ$_{٧}$ الأخيرة = $\frac{٧}{٢}$ (ح$_{١٥}$ + ح$_{٢١}$) = $\frac{٧}{٢}$ (٢أ + ٣٤د) = ٣٨٥

∴ أ + ١٧د = ٥٥ ← ② بطرح ① من ② ∴ ١٤د = ٤٢

∴ د = ٣ ومن ① ∴ أ = ٤

∴ المتتابعة هي (٤، ٧، ١٠، ...، ٦٤)

---

٣٠) جـ$_{ن}$ = ٢ن (٧ − ن)

① جـ$_{٧}$ = ٢ × ٧ (٧ − ٧) = صفر

جـ$_{٦}$ = ٢ × ٦ (٧ − ٦) = ١٢

ح$_{٧}$ = جـ$_{٧}$ − جـ$_{٦}$ = ٠ − ١٢ = −١٢ ∴ ح$_{٧}$ = −١٢

② −٢٤٠ = ٢ن (٧ − ن) ⟸ ن^{٢} − ٧ن − ١٢٠ = ٠

(ن − ١٥)(ن + ٨) = ٠

ن = ١٥ ، ن = −٨ (مرفوض)

∴ عدد الحدود = ١٥ حداً

---

٣١) ح$_{٤}$ = ٢٤ ⟸ أ + ٣د = ٢٤ ← (١)

جـ$_{٥}$ (الأولى) = $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤د] = ٥ (أ + ٢د)

جـ$_{٥}$ (الثانية) = $\frac{٥}{٢}$ [ح$_{٦}$ + ح$_{١٠}$]

= $\frac{٥}{٢}$ [أ + ٥د + أ + ٩د]

= $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ١٤د] = ٥ [أ + ٧د]

$\frac{٥(أ + ٢د)}{٥(أ + ٧د)} = \frac{١}{٢}$ ⟸ $\frac{أ + ٢د}{أ + ٧د} = \frac{١}{٢}$

٢أ + ٤د = أ + ٧د ∴ أ − ٣د = صفر ← (٢)

بحل (١)، (٢) ∴ أ = ١٢ ∴ د = ٤

المتتابعة هي (١٢، ١٦، ٢٠، ...)

حل آخر: لاحظ أن مجموع الخمس حدود الأولى

= ٥ × الحد الأوسط للخمسة حدود الأولى

جـ$_{٥}$ = ٥ ح$_{٣}$

مجموع الخمس حدود التالية = ٥ × الحد الأوسط لهم = ٥ ح$_{٨}$

$\frac{٥ ح_{٣}}{٥ ح_{٨}} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{٥(أ + ٢د)}{٥(أ + ٧د)} = \frac{١}{٢}$ ونكمل الحل كما سبق

---

٣٢) ح$_{٣٦}$ = ٠ ⟸ أ + ٣٥د = ٠ ⟸ أ = −٣٥د

$\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د] = ٢ × $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤د]

$\frac{ن}{٢}$ [−٧٠د + (ن − ١) د] = ٥ [−٧٠د + ٤د]

$\frac{دن}{٢}$ [ن − ٧١] = ٥ × −٦٦د

ن^{٢} − ٧١ن + ٦٦٠ = ٠ ⟸ (ن − ١١)(ن − ٦٠) = ٠

ن = ١١ ، ن = ٦٠

---

٣٣) جـ$_{٩}$ − جـ$_{٦}$ = ٦٩ ، ٩ (أ + ٤د) − ٣ (٢أ + ٥د) = ٦٩

∴ ٣أ + ٢١د = ٦٩ (÷٣)

أ + ٧د = ٢٣ ⟸ ح$_{٨}$ = ٢٣

جـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢أ + ١٤د] = ١٥ [أ + ٧د]

= ١٥ × ح$_{٨}$ = ١٥ × ٢٣ = ٣٤٥

---

٣٤) ح$_{١}$ − ٢ح$_{٥}$ = ٢ ⟸ أ − ٢أ − ٨د = ٢ ⟸ −أ − ٨د = ٢ ← (١)

$\frac{أ + ٢د + أ + ٥د}{٢}$ = ١٦

٢أ + ٧د = ٣٢ ← (٢) ، −أ − ٨د = ٢ ← (١) × ٢

−٢أ − ١٦د = ٤

٢أ + ٧د = ٣٢

−٩د = ٣٦ ∴ د = −٤ بالتعويض في (١)

- أ + ٣٢ = ٢ ⟸ - أ = - ٣٠ ∴ أ = ٣٠

حـ_ن = ٠ ⟸ ن/٢ [٢أ + (ن - ١) ء] = ٠

ن/٢ [-٦٠ - ٤ن + ٤] = ٠ ⟸ [-٤ن + ٦٤] = ٠

-٤ن = -٦٤ ∴ ن = ١٦

(٣٥) ح_٧ / (ل - ء) = ١٥/٢٩ ∴ (١ + ٧ء) / (٣١ - ء) = ١٥/٢٩

٢٩ + ٢٠٣ء = ٤٦٥ - ١٥ء

٢٠٣ء + ١٥ء = ٤٦٥ - ٢٩

∴ ٢١٨ء = ٤٣٦ ∴ ء = ٢

٣١ = ١ + (ن - ١) × ٢ ∴ ن = ١٦

∴ عدد الأوساط = ١٤ وسطاً

حـ_١٦ = ١٦/٢ (١ + ٣١) = ٢٥٦

(٣٦) أ + ء + أ + ٣ء + أ + ٤ء = ١٨ ⟸ ٣أ + ٨ء = ١٨ ← (١)

حـ_١٣ = ١٣/٢ [٢أ + ١٢ء] = ١٣

٢٦ = ١٣[٢أ + ١٢ء]

أ + ٦ء = ١ ← (٢) × ٣

٣أ + ٨ء = ١٨ ← (١)

٣أ + ١٨ء = ٣ ← (٢)

-١٠ء = ١٥ ∴ ء = -١,٥ بالتعويض في (١)

٣أ - ١٢ = ١٨ ⟸ ٣أ = ٣٠ ∴ أ = ١٠

ح_ن < ٠ ⟸ ١٠ - ١,٥ن + ١,٥ < ٠

⟸ -١,٥ن < -١١,٥

∴ ن > ٧ ٢/٣ ⟸ ∴ أول حد سالب هو ح_٨

حـ_ن < ٠ ⟸ ن/٢ [٢٠ - ١,٥ن + ١,٥] < ٠

٢/ن × ن/٢ × [-١,٥ + ٢١,٥] < ٠ × ٢/ن

-١,٥ن + ٢١,٥ < ٠ ⟸ -١,٥ن < -٢١,٥

ن > ١٤ ١/٣ ∴ ن = ١٥

(٣٧) نفرض أن الثلاثة أعداد هي أ - ء ، أ ، أ + ء

أ - ء + أ + أ + ء = ٢٤ ⟸ ٣أ = ٢٤ ∴ أ = ٨

٨ - ء ، ٨ ، ٨ + ء ⟸ ١/(٨ - ء) ، ١/٦ ، ١/(٨ + ء)

١/(٨ - ء) - ١/٦ = ١/٦ - ١/(٨ + ء) ⟸ (-ء + ٢)/(٤٨ - ٦ء) = (-ء - ٢)/(٤٨ + ٦ء)

-٤٨ء + ٩٦ - ٦ء² + ١٢ء = -٤٨ء + ٦ء² - ٩٦ + ١٢ء

∴ ١٢ء² - ١٩٢ = ٠ ∴ ء² = ١٦

∴ ء = ٤ أو ء = -٤ ∴ الأعداد هي (٤ ، ٨ ، ١٢)

(٣٨) ح_١ = ١٠٠٠ ، ح_٢ = ١١٠٠ ، ح_٣ = ١٢٠٠ ، ء = ١٠٠

م . ح (١٠٠٠ ، ١١٠٠ ، ١٢٠٠ ، ...)

حـ_٥ = ٥/٢ [٢أ + ٤ء] = ٥[١٠٠٠ + ٢ × ١٠٠]

= ٥ × ١٢٠٠ = ٦٠٠٠ جنيهاً

(٣٩) ① س - ٢٩ = ٩٥ - ٣س

٤س = ١٢٤ ← س = ٣١

∴ ء = ٣١ - ٢٩ = ٢ ∴ ٩٥ = ٢٩ + (ن - ١) × ٢

٦٦ = ٢ن - ٢ ∴ ن = ٣٤

حـ_٣٤ = ٣٤/٢ [٢٩ + ٩٥] = ٢١٠٨

② ح_١ = أ = ٣ - ٢ × ١ = ١ ، ح_٢ = ٣ - ٢ × ٢ = -١

∴ ء = -٢ ، ل = ٣ - ٢ن

حـ_ن = ن/٢ [أ + ل]

∴ -٣٦٠ = ن/٢ [١ + ٣ - ٢ن]

-٣٦٠ = ن/٢ (٤ - ٢ن)

-٣٦٠ = ٢ن - ن² ∴ ن² - ٢ن - ٣٦٠ = ٠

ن = ٢٠ ، ن = -١٨ (مرفوض)

③ ح_٥ = حـ_٥ - حـ_٤

= (٥² - ٢ × ٥) - (٤² - ٢ × ٤) = ٧

④ حـ_ن = ٢ن² + ن ، ح_ن = حـ_ن - حـ_ن-١

ح_ن = ٢ن² + ن - [٢(ن - ١)² + (ن - ١)]

= ٢ن² + ن - [٢(ن² - ٢ن + ١) + ن - ١]

= ٢ن² + ن - [٢ن² - ٤ن + ٢ + ن - ١]

= ٢ن² + ن - ٢ن² + ٣ن - ١ = ٤ن - ١

⑤ نفرض أن المتتابعة هي أ ، أ + ء ، أ + ٢ء

∴ ح_٣ = ح_١² ⟸ أ + ٢ء = أ²

المتتابعة الجديدة أ + ١ ، أ + ء + ١ ، أ + ٢ء + ١

ح'_٣ = (ح'_١)² ∴ أ + ٢ء + ١ = (أ + ١)²

أ³ + ١ = (أ + ١)²

(أ + ١)(أ² - أ + ١) - (أ + ١)² = ٠

(أ + ١)[أ² - أ + ١ - أ - ١] = ٠

(أ + ١)(أ² - ٢أ) = ٠ ∴ (أ + ١) × أ(أ - ٢) = ٠

أ + ١ = ٠ ⟸ أ = -١ (مرفوض)

أ = صفر (مرفوض)

أ - ٢ = ٠ ∴ أ = ٢

⑥ $ح_ن = أ + (ن - ١) د$

$\therefore أ + (ن - ١) د = ن \quad \leftarrow (١)$

$ح_{٢ن} = أ + (٢ن - ١) د$

$\therefore أ + (٢ن - ١) د = -٢ن \quad \leftarrow (٢)$ بالطرح

$٢ن د - د - ن د + د = -٢ن - ن$

$ن د = -٣ن$ $\quad \therefore د = -٣$ بالتعويض في (١)

$أ + (ن - ١)(-٣) = ن$

$أ - ٣ن + ٣ = ن \quad \therefore أ = ٤ن - ٣$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

$جـ_{٣ن} = \frac{٣ن}{٢} [٢(٤ن - ٣) + (٣ن - ١)(-٣)]$

$-٦٠ = \frac{٣ن}{٢} [٨ن - ٦ - ٩ن + ٣]$

$-٦٠ = \frac{٣ن}{٢} [-ن - ٣] \quad (\times \frac{٢}{٣})$

$-٤٠ = -ن^٢ - ٣ن$

$ن^٢ + ٣ن - ٤٠ = ٠$

$(ن + ٨)(ن - ٥) = ٠$

$ن = -٨$ (مرفوض)

$ن - ٥ = ٠ \quad \therefore ن = ٥$

---

⑦ أولاً: أ الحد الأول ، م من الأوساط الحسابية ، ب الحد الأخير

$\therefore$ الوسط الأول $= أ + د$ ، الوسط الأخير $= ب - د$

$\therefore جـ_١ = \frac{م}{٢} [أ + ل]$

$= \frac{م}{٢} [أ + د + ب - د] = \frac{م}{٢} (أ + ب)$

ثانياً: أ ، ن (وسط حسابي) ، ب

بفرض أن الأساس هـ

$\therefore$ الوسط الأول $= أ + هـ$ ، الوسط الأخير $= ب - هـ$

$جـ_٢ = \frac{ن}{٢}$ (الوسط الأول + الوسط الأخير)

$= \frac{ن}{٢} [أ + هـ + ب - هـ] = \frac{ن}{٢} (أ + ب)$

$\therefore \frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{م}{٢} (أ + ب) : \frac{ن}{٢} (أ + ب)$

$\therefore جـ_١ : جـ_٢ = م : ن$

---

⑧ $أ = ٢ك + ١$

$د = ٢ك + ٣ - (٢ك + ١) = ٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

$ن^٣ = \frac{ن}{٢} [٤ك + ٢ + (ن - ١)(٢)]$

$ن^٣ = \frac{ن}{٢} [٤ك + ٢ + ٢ن - ٢]$

$ن^٣ = ن(٢ك + ن) \quad \Leftarrow \quad ن^٢ = ٢ك + ن$

$٢ك = ن^٢ - ن \quad \Leftarrow \quad ك = \frac{١}{٢} (ن^٢ - ن)$

---

⑨ $\because جـ_ن$ للمتتابعة الحسابية دالة من الدرجة الثانية في ن

$\frac{جـ_ن}{جـ'_ن} = \frac{٣ن + ١}{٢ن + ٤} \times \frac{ن}{ن} = \frac{٣ن^٢ + ن}{٢ن^٢ + ٤ن}$

$ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$

$= ٣ن^٢ + ن - [٣(ن - ١)^٢ + ن - ١]$

$= ٣ن^٢ + ن - [٣ن^٢ - ٦ن + ٣ + ن - ١]$

$= ٣ن^٢ + ن - [٣ن^٢ - ٥ن + ٢]$

$= ٣ن^٢ + ن - ٣ن^٢ + ٥ن - ٢$

$ح_ن = ٦ن - ٢$

بالمثل $ح'_ن = جـ'_ن - جـ'_{ن-١}$

$= ٢ن^٢ + ٤ن - [٢(ن - ١)^٢ + ٤(ن - ١)]$

$= ٢ن^٢ + ٤ن - [٢ن^٢ - ٤ن + ٢ + ٤ن - ٤]$

$= ٢ن^٢ + ٤ن - ٢ن^٢ + ٢$

$ح'_ن = ٤ن + ٢$

$\therefore \frac{ح_ن}{ح'_ن} = \frac{٢(٣ن - ١)}{٢(٢ن + ١)}$

$\frac{ح_{١٢}}{ح'_{١٢}} = \frac{٣ \times ١٢ - ١}{٢ \times ١٢ + ١} = \frac{٣٥}{٢٥} = \frac{٧}{٥}$

---

⑩ $س = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د] \quad \leftarrow (١)$

$ص = \frac{ن}{٢} [ح_{ن+١} + ح_{٢ن}]$

$= \frac{ن}{٢} [أ + ن د + أ + (٢ن - ١) د]$

$= \frac{ن}{٢} [٢أ + ن د + ٢ن د - د]$

$ص = \frac{ن}{٢} [٢أ + (٣ن - ١) د] \quad \leftarrow (٢)$

$ع = \frac{ن}{٢} [ح_{٢ن+١} + ح_{٣ن}]$

$= \frac{ن}{٢} [أ + (٢ن + ١ - ١) د + أ + (٣ن - ١) د]$

$= \frac{ن}{٢} [٢أ + (٥ن - ١) د] \quad \leftarrow (٣)$

$جـ = \frac{٣ن}{٢} [٢أ + (٣ن - ١) د]$

$= ٣ \times \frac{ن}{٢} [٢أ + (٣ن - ١) د] \quad \therefore جـ = ٣ص$

---

⑪ $جـ_ن \propto ن^٢ \quad \therefore جـ_ن = ك ن^٢$

$ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$

$= ك\,ن^{٢} - ك(ن-١)^{٢} = ك[ن^{٢} - ن^{٢} + ٢ن - ١]$

$ح_{ن} \propto ٢ن - ١$

---

(١٢) $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$٢ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$٢أ + (ن-١)د = ٤ \leftarrow (١)$

$جـ_{٢ن} = \frac{٢ن}{٢}[٢أ + (٢ن-١)د]$

$ن = ن[٢أ + (٢ن-١)د]$

$٢أ + (٢ن-١)د = ١ \leftarrow (٢)$ بطرح (١) من (٢)

$-ن\,د = ٣ \Leftarrow ن\,د = -٣$

$جـ_{٤ن} = \frac{٤ن}{٢}[٢أ + (٤ن-١)د]$

$= ٢ن[٢أ + ٤ن\,د - د]$

$= ٢ن[٢أ + ن\,د - د + ٣ن\,د]$

$= ٢ن[٢أ + (ن-١)د + ٣ن\,د]$ من رقم (١)

$جـ_{٤ن} = ٢ن[٤ + ٣(-٣)] = ٢ن \times -٥$

$\therefore جـ_{٤ن} = -١٠ن$

---

(١٣) $ح_{٨} = أ + (٨-١)د$

$ن = أ + ٧د \leftarrow (١)$

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$ن^{٢} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$٢ن = ٢أ + (ن-١)د$ من (١)

$٢(أ + ٧د) = ٢أ + (ن-١)د$

$٢أ + ١٤د = ٢أ + (ن-١)د$

$١٤د = (ن-١)د$ $\therefore ن = ١٥$

---

(١٤) $\because$ عدد حدودها زوجي $\therefore$ نفرض أن عدد الحدود ٢ن

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما $ح_{ن}$ ، $ح_{ن+١}$

$ح_{ن} = أ + (ن-١)د$

$٢٢,٥ = أ + (ن-١)د \leftarrow (١)$

$ح_{ن+١} = أ + (ن+١-١)د$

$٢٤ = أ + ن\,د \leftarrow (٢)$ بالجمع

$٤٦,٥ = ٢أ + (٢ن-١)د$

$جـ_{٢ن} = \frac{٢ن}{٢}[٢أ + (٢ن-١)د]$

$٩٣٠ = ن \times ٤٦,٥$ $\therefore ن = ٢٠$

$\because$ عدد الحدود ٢ن = ٢ × ٢٠ = ٤٠ بالتعويض في (١) ، (٢)

$\begin{cases} ٢٢,٥ = أ + ١٩د \\ ٢٤ = أ + ٢٠د \end{cases}$ بالطرح

$د = ١,٥ \Leftarrow أ = -٦$

$\therefore$ الحد الأخير $ل = ح_{٤٠}$

$ل = أ + ٣٩د = -٦ + ٣٩ \times ١,٥$ $\therefore ل = ٥٢,٥$

---

(٤٠) $ح_{ن} = ٢ن + ٣$ المتتابعة هي (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...)

بفرض أن عدد الحدود = ٣ن

$\frac{جـ_{ن}}{جـ_{٣ن}} = \frac{\frac{ن}{٢}[١٠ + (ن-١) \times ٢]}{\frac{٣ن}{٢}[١٠ + (٣ن-١) \times ٢]} = \frac{٧}{٥١}$

$\frac{١٠ + ٢ن - ٢}{٣٠ + ١٨ن - ٦} = \frac{٧}{٥١} \Leftarrow \frac{٨ + ٢ن}{٢٤ + ١٨ن} = \frac{٧}{٥١}$

$٨٤ + ٦٣ن = ٢٠٤ + ٥١ن \Leftarrow ١٢ن = ١٢٠$

$\therefore ن = ١٠$ عدد الحدود = ٣٠ حداً

---

(٤١) $ح_{١} = ٤ + ٢ = ٦$

$ح_{٢} = ٨ + ٢ = ١٠ \Leftarrow ح_{٣} = ١٢ + ٢ = ١٤$

المتتابعة (٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ...)

نفرض أن عدد الحدود = ٣ن

مجموع الثلث الأخير = ٤ مجموع الثلث الأول

$\frac{ن}{٢}(ح_{٢ن+١} + ح_{٣ن}) = ٤ \times \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن})$

$أ + ٢ن\,د + أ + ٣ن\,د - د = ٤(أ + أ + ن\,د - د)$

$٦ + ٨ن + ٦ + ١٢ن - ٤ = ٤(٦ + ٦ + ٤ن - ٤)$

$٨ + ٢٠ن = ٣٢ + ١٦ن$

$٤ن = ٢٤$ $\therefore ن = ٦$

$\therefore$ عدد الحدود = ٣ن = ١٨ حداً

---

(٤٢) $ح_{١} = \text{لو } س\,ص^{\text{صفر}} = \text{لو } س$

$ح_{٢} = \text{لو } س\,ص = \text{لو } س + \text{لو } ص$

$ح_{٣} = \text{لو } س\,ص^{٢} = \text{لو } س + ٢\,\text{لو } ص$

$\because ح_{٢} - ح_{١} = \text{لو } ص$ ، $ح_{٣} - ح_{٢} = \text{لو } ص$

$\therefore$ (لو س ، لو س ص ، لو س $ص^{٢}$ ، ...) متتابعة حسابية

(لو ١٦٠ ، لو ٨٠ ، لو ٤٠ ، ...)

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$جـ_{٩} = \frac{٩}{٢}[٢\,\text{لو } ١٦٠ + ٨\,\text{لو } \frac{١}{٢}] = \frac{٩}{٢}\,\text{لو } \frac{١٦٠ \times ١٦٠ \times ١}{٢^{٨}}$

$= \frac{٩}{٢}\,\text{لو } ١٠٠ = \frac{٩}{٢} \times ٢ = ٩$

٤٣ نفرض أن المبلغ المودع شهرياً = م جنيهاً

فائدة الشهر الأول = $\frac{١٠}{١٠٠}$ م = $\frac{١}{١٠}$ م

فائدة الشهر الثاني = $\frac{١٠}{١٠٠}$ م × $\frac{١١}{١٢}$ = $\frac{١١٠}{١٢٠٠}$ م

(لأنه ١١ شهر فقط)

فائدة الشهر الثالث = $\frac{١٠}{١٠٠}$ م × $\frac{١٠}{١٢}$ = $\frac{١}{١٢}$ م

(لأنه ١٠ أشهر فقط)

∴ فوائد السنة ($\frac{١}{١٠}$ م ، $\frac{١١}{١٢٠}$ م ، $\frac{١}{١٢}$ ، ....)

مجموع فوائد السنة (١٢ شهر) = ١١٧

∴ ١١٧ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + ١١ د]

∵ د = $\frac{١١}{١٢٠}$ م − $\frac{١}{١٠}$ م = $\frac{-١}{١٢٠}$ م

∴ ١١٧ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ × $\frac{١}{١٠}$ م + ١١ × $\frac{-١}{١٢٠}$ م]

= ٦م [٢ × $\frac{١}{١٠}$ − $\frac{١١}{١٢٠}$] = ٦م × $\frac{١٣}{١٢٠}$ = $\frac{١٣م}{٢٠}$

١٣م = ٢٣٤٠ ∴ م = ١٨٠

∴ المبلغ الذي يودعه الرجل شهرياً = ١٨٠ جنيهاً

٤٤ ح$_{١}$ = ٢ + ٣ = ٥ ، ح$_{٣}$ = ٦ + ٣ = ٩ ، ح$_{٥}$ = ١٠ + ٣ = ١٣

∴ متتابعة الحدود الفردية هي (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) إلى ١٣ حداً

، ح$_{٢}$ = ٦ + ٢ = ٨ ، ح$_{٤}$ = ١٢ + ٢ = ١٤ ، ح$_{٦}$ = ١٨ + ٢ = ٢٠

∴ متتابعة الحدود الزوجية هي (٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ...) إلى ١٢ حداً

∴ جـ = جـ$_{ن}$ + جـ$_{ر}$

= $\frac{١٣}{٢}$ [١٠ + ١٢ × ٤] + $\frac{١٢}{٢}$ [١٦ + ١١ × ٦]

= ١٣ × ٢٩ + ٦ × ٨٢ = ٨٦٩

٤٥ الفردية (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) ، الزوجية (٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ...)

وبنفس عدد الحدود ن

∴ ٢٧٣ = $\frac{ن}{٢}$ [١٠ + ٤(ن − ١)] + $\frac{ن}{٢}$ [٨ + ٦(ن − ١)]

ومنها ٥ن^{٢} + ٤ن − ٢٧٣ = ٠

∴ (٥ن + ٣٩)(ن − ٧) = ٠

∴ ن = ٧ ∴ جـ$_{١}$ = $\frac{٧}{٢}$ [١٠ + ٤(٧ − ١)] = ١١٩

جـ$_{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ [٨ + ٦(٧ − ١)] = ١٥٤

٤٦ ٢(٥ب − أ) = أ + ب + ٣أ + ب ومنها

أ = $\frac{٤}{٣}$ ب ← (١) ، ٢ب^{٢} = أ^{٢} + ٢ب − أ

بالتعويض من (١) ∴ $\frac{٢}{٩}$ ب^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ ب = ٠

∴ ب = ٣ ∴ أ = ٤

∴ المتتابعتان هما (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) ، (١٦ ، ٩ ، ٢ ، ...)

$\frac{جـ_{١}}{جـ_{٢}}$ = $\frac{\frac{ن}{٢}[١٤ + ٤(ن − ١)]}{\frac{ن}{٢}[٣٢ − ٧(ن − ١)]}$ = $\frac{-٥٠}{٣١}$

$\frac{١٤ + ٤ن − ٤}{٣٢ − ٧ن + ٧}$ = $\frac{-٥٠}{٣١}$

٣١٠ + ١٢٤ن = −١٩٥٠٠ + ٣٥٠ن

∴ ٢٢٦٠ = ٢٢٦ن ∴ ن = ١٠

٤٧ أ + ٧د = ن (١) ⇐ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د] = ن^{٢}

∴ ٢أ + (ن − ١)د = ٢ن ⇐ بضرب (١) × ٢

∴ ٢أ + ١٤د = ٢ن بالطرح

∴ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

∴ الحد الأوسط ح$_{٨}$ = أ + ٧د = ١٥

٤٨ نفرض أن عدد الحدود ٢ن

جـ$_{ن}$ = أ + (أ + ٢د) + (أ + ٤د) + ... ن حداً = ٢٤

جـ$_{ر}$ = (أ + د) + (أ + ٣د) + (أ + ٥د) + ... ن حداً = ٣٠

بالطرح ∴ د + د + د + ... ن حداً = ٦

ن × د = ٦ ← (١) ، ل − أ = ١٠,٥

أ + (٢ن − ١)د − أ = ١٠,٥

∴ (٢ن − ١)د = ١٠,٥ ← (٢) من (١) ، (٢) بالقسمة

∴ $\frac{٢ن − ١}{ن}$ = $\frac{٧}{٤}$ ومنها ن = ٤

∴ عدد حدود المتتابعة ٢ن = ٨

٤٩ ح$_{٣٦}$ = أ + ٣٥د = ٠ ∴ أ = −٣٥د ← (١)

جـ$_{ن}$ = ٢جـ$_{٥}$

∴ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د] = ٢ × $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤د]

= ١٠أ + ٢٠د ومن (١)

∴ $\frac{ن}{٢}$ [−٧٠د + (ن − ١)د] = −٣٥٠د + ٢٠د

بالقسمة على د

∴ −٧٠ن + ن^{٢} − ن = ٢ × −٣٣٠

∴ ن^{٢} − ٧١ن + ٦٦٠ = ٠ ∴ (ن − ١١)(ن − ٦٠) = ٠

∴ ن = ١١ أو ٦٠ ∴ جـ$_{٦٠}$ = جـ$_{١١}$

∴ جـ$_{٦٠}$ − جـ$_{١١}$ = ٠ = مجموع ٤٩ حداً ابتداء من ح$_{١٢}$

تمارين (٥) على المتتابعة الهندسية

١ ① تزايدية ② $\sum_{ر=١}^{٩}$ (٤ر − ١)

③ ٢ ④ ٧٢

⑤ (أ) أ = ٣ ، د = ٣ ، ن = ١٥

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) × د]$

$ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢} [٢ × ٣ + ١٤ × ٣]$ ∴ $ح_{١٥} = ٣٦٠$

(ب) $ح_{٥} = أ + ٤د = ٣ + ٤ × ٣ = ١٥$

$ح_{١٥} = أ + ١٤د = ٣ + ١٤ × ٣ = ٤٥$

ن = ١٥ - ٥ + ١ = ١١

$ح_{١١} = \frac{١١}{٢} [١٥ + ٤٥] = ٣٣٠$

⑥ أ = ٣ ، ل = ٣٩ ، $ح_{ن} = ٢١٠$

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$ ⇐ $٢١٠ = \frac{ن}{٢} [٣ + ٣٩]$

$٢١٠ = \frac{ن}{٢} × ٤٢$

∴ ٢١ ن = ٢١٠ (÷٢١) ∴ ن = ١٠

٢ ① $ح_{٦} = أ ر^{٥} = ٣ × ٢^{٥} = ٩٦$

$ح_{٩} = أ ر^{٨} = ٣ × ٢^{٨} = ٧٦٨$

② $\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٨}{٤} = ٢$

∴ المتتابعة هندسية $ح_{١٠} = أ ر^{٩} = ٢ × ٢^{٩} = ١٠٢٤$

③ $ح_{١} = أ = ٤$ ، ر = ٢ ، $ح_{٢} = أ ر = ٤ × ٢ = ٨$

$ح_{٣} = أ ر^{٢} = ٤ × ٤ = ١٦$ ، $ح_{٤} = أ ر^{٣} = ٤ × ٨ = ٣٢$

$ح_{٥} = أ ر^{٤} = ٤ × ١٦ = ٦٤$

④ $٢٥٦ = أ ر^{٨}$ ⇐ $٢٥٦ = أ × ٢^{٨}$ ⇐ ٢٥٦ = ٢٥٦ أ

∴ أ = ١ ∴ المتتابعة هي (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

$ح_{٥} = أ ر^{٤} = ١ × ٢^{٤} = ١٦$ ، $ح_{٧} = أ ر^{٦} = ١ × ٢^{٦} = ٦٤$

⑤ $ح_{٧} = أ ر^{٦} = ١٤٤ × (\frac{١}{٢})^{٦} = \frac{٩}{٤}$

$ح_{٩} = أ ر^{٨} = ١٤٤ × (\frac{١}{٢})^{٨} = \frac{٩}{١٦}$

الحد النوني = $١٤٤ × (\frac{١}{٢})^{ن - ١}$

⑥ $أ ر^{ن - ١} = \frac{١}{٨}$ ⇐ $٥١٢ × (\frac{١}{٢})^{ن - ١} = \frac{١}{٨}$

$(\frac{١}{٢})^{ن - ١} = \frac{١}{٤٠٩٦}$ ⇐ $٢^{-ن + ١} = ٢^{-١٢}$

∴ -ن + ١ = -١٢ ⇐ -ن = -١٣

∴ ن (عدد الحدود) = ١٣ حداً

⑦ ر = $\frac{١}{٢}$ ، $ح_{٣} = ٢٤$

$أ ر^{٢} = ٢٤$ ⇐ $أ (\frac{١}{٢})^{٢} = ٢٤$

∴ أ = ٩٦ ∴ المتتابعة هي (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

⑧ $ح_{٥} = أ ر^{٤} = ١ × (٣)^{٤} = ٨١$

$ح_{١٠} = أ ر^{٩} = ١ × (٣)^{٩} = ١٩٦٨٣$

٣ ① ١٦٢ ② ١ ③ $٣ (-٢)^{ن - ١}$

④ ٩٦ ⑤ ١

٤ ① $\frac{٨١}{٣٢}$ ② (لو أ ، لو $أ^{٢}$ ، لو $أ^{٣}$ ، ...)

③ منحنى دالة أسية ④ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$

⑤ $ح_{ن} = (\frac{١}{٤} × ح_{ن-١})$ ⑥ ∋]١٠٠ ، ١[

٥ ① $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٥ × ٢^{ن+١}}{٥ × ٢^{ن}} = ٢^{١} = ٢$ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية

$ح_{١} = ١٠$ ، $ح_{٢} = ٢٠$ ، $ح_{٣} = ٤٠$

② $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٢^{ن+١+١٠}}{٢^{ن+١٠}} = \frac{٢^{ن+٢٠}}{٢^{ن+١٠}} = ٢$ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية ⇐ $ح_{١} = ٢^{١+١} = ٤$

$ح_{٢} = ٢^{٢+١} = ٨$ ، $ح_{٣} = ٢^{٣+١} = ١٦$ ، $ح_{٤} = ٢^{٤+١} = ٣٢$

③ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٢ × ٣^{ن-٤}}{٢ × ٣^{ن-٥}} = ٣$ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية ⇐ $ح_{٧} = ٢ × ٣^{٧-٥} = ١٨$

٦ ① $ل = أ ر^{ن-١}$ ⇐ $١٤٥٨ = ٢ × ٣^{ن-١}$

$٧٢٩ = ٣^{ن-١}$ ⇐ $٣^{ن-١} = ٣^{٦}$ ∴ ن - ١ = ٦

∴ ن (عدد الحدود) = ٧

② أ = $\frac{١}{٨}$ ، ر = ٢

(أ) $ح_{١٠} = أ ر^{٩} = \frac{١}{٨} × ٢^{٩} = ٦٤$

(ب) $ح_{ن} = ١٠٢٤$ ∴ $أ ر^{ن-١} = ١٠٢٤$

$\frac{١}{٨} × ٢^{ن-١} = ١٠٢٤$ ∴ $٢^{-٣} × ٢^{ن-١} = ١٠٢٤$

$٢^{ن-٤} = ١٠٢٤$ ∴ $٢^{ن-٤} = ٢^{١٠}$ ⇐ ن - ٤ = ١٠

∴ ن = ١٤ ⇐ ∴ $ح_{١١} = ١٠٢٤$

⑦ $ا ر^{ن-١} < ١ \Rightarrow ٧٢٩ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١} < ١$

$\Rightarrow \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١} < \frac{١}{٣^{٦}}$

$٣^{-ن+١} < ٣^{-٦} \Rightarrow -ن+١ < -٦ \Rightarrow -ن < -٧$

$\therefore ن > ٧ \qquad \therefore ن = ٨$

---

⑧ $ا ر^{٣} = ٨ \to (١)$ ، $ا ر^{٦} = ٦٤ \to (٢)$

بقسمة (٢) على (١): $\therefore ر^{٣} = ٨ \qquad \therefore ر = ٢$

ومن (١) $\therefore ا = ١$

∴ المتتابعة الهندسية هي (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

---

⑨ $ا ر^{٢} = ١٢ \to (١)$ ، $ا ر^{٧} = ٣٨٤ \to (٢)$

وبالقسمة $\therefore ر^{٥} = ٣٢ \qquad \therefore ر = ٢$

بالتعويض في (١) $\therefore ا = ٣$

المتتابعة هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

---

⑩ $ا ر = \frac{١}{٤} \to (١)$ ، $ا ر^{٤} = \frac{١}{٣٢} \to (٢)$

بقسمة (٢) على (١) $\frac{ا ر^{٤}}{ا ر} = \frac{\frac{١}{٣٢}}{\frac{١}{٤}}$

$\therefore ر^{٣} = \frac{١}{٨} \qquad \therefore ر = \frac{١}{٢}$

بالتعويض في (١) $\frac{١}{٢} ا = \frac{١}{٤} \qquad \therefore ا = \frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ...)

---

⑪ $ح_{١} = ٤ ح_{٣} \Rightarrow ا = ٤ ا ر^{٢} \Rightarrow ر^{٢} = \frac{١}{٤}$

$ر = \frac{١}{٢} \Rightarrow ر = -\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

$ح_{٢} + ح_{٥} = ٣٦ \qquad \therefore ا ر + ا ر^{٤} = ٣٦$

$ا \times \frac{١}{٢} + ا\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = ٣٦$

$\frac{٩}{١٦} ا = ٣٦ \qquad \therefore ا = ٦٤$

∴ المتتابعة هي (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

---

⑫ $ا = \frac{١}{٢}$ ، $ل = ٦٤ \Rightarrow \frac{١}{٢} ر^{٧} = ٦٤ \Rightarrow ر^{٧} = ١٢٨$

$\therefore ر = ٢$ ∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٦٤)

---

⑬ $ا ر^{٢} = ١٢ \to ①$ ، $ا ر^{٢} + ا ر^{٤} = ٣٠$

$\Rightarrow ا ر^{٢}(١ + ر^{٢}) = ٣٠$

$\frac{ا ر^{٢}(١+ر^{٢})}{ا ر^{٢}} = \frac{٣٠}{١٢} = \frac{٥}{٢} \Rightarrow ٢ + ٢ر^{٢} = ٥ر$

$٢ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠ \Rightarrow (٢ر-١)(ر-٢) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢} \qquad \therefore ا = ٩٦$ أو $ر = ٢ \qquad \therefore ا = \frac{٣}{٢}$

(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) أو ($\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ٦ ، ...)

---

⑭ (ا ، ا ر ، ا $ر^{٢}$ ، ...) $\Rightarrow ا ر + ا ر^{٢} = ٢٠$

، $ا + ا ر + ا ر^{٢} = ٦٥$

$\therefore ا + ٢٠ = ٦٥ \Rightarrow ا = ٤٥$

$ا(١ + ر + ر^{٢}) = ٦٥ \Rightarrow ١ + ر + ر^{٢} = \frac{٦٥}{٤٥} = \frac{١٣}{٩}$

$٩ر^{٢} + ٩ر - ٤ = ٠ \Rightarrow (٣ر+٤)(٣ر-١) = ٠$

$ر = \frac{-٤}{٣}$ ، $ر = \frac{١}{٣}$

(٤٥ ، -٦٠ ، ٨٠ ، ...) (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...)

---

⑮ $ا + ا ر = ٩ \qquad \therefore ا(١ + ر) = ٩ \to ①$ ،

$ا ر^{٥} + ا ر^{٦} = ٢٨٨ \qquad \therefore ا ر^{٥}(١ + ر) = ٢٨٨ \to ②$

بقسمة ② على ① $\therefore ر^{٥} = ٣٢$

∴ ر = ٢ بالتعويض في ① $\therefore ا = ٣$

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

---

⑯ $ا ر^{٢} - ا ر = ١٦ \Rightarrow ا ر(ر - ١) = ١٦ \to ①$

$ا ر - ا = ٤٨ \Rightarrow ا(ر - ١) = ٤٨ \to ②$

بقسمة ② على ① $\Rightarrow \frac{ا(ر-١)}{ا ر(ر-١)} = \frac{٤٨}{١٦} = ٣$

$\frac{١}{ر} = ٣ \qquad \therefore ر = \frac{١}{٣}$

عندما $ر = \frac{١}{٣}$ بالتعويض في ① $ا\left(\frac{١}{٩} - \frac{١}{٣}\right) = ١٦$

$\therefore ا = -٧٢$ ∴ المتتابعة هي (-٧٢ ، -٢٤ ، -٨ ، ...)

---

⑰ $ا(ا ر^{٨}) = ١ \Rightarrow ا^{٢} ر^{٨} = ١ \Rightarrow ا ر^{٤} = \pm ١ \to ①$

$ا ر^{٩} - ا ر^{٤} = ٣١ \Rightarrow ا ر^{٤}(ر^{٥} - ١) = ٣١ \to ②$

بقسمة ② على ① $\Rightarrow \frac{ا ر^{٤}(ر^{٥}-١)}{(ا ر^{٤})} = \pm ٣١$

$ر^{٥} - ١ = ٣١ \Rightarrow ر^{٥} = ٣٢ \qquad \therefore ر = ٢ \qquad \therefore ا = \pm \frac{١}{١٦}$

∴ هما المتتابعتان ($\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...)

أو ($\frac{-١}{١٦}$ ، $\frac{-١}{٨}$ ، $\frac{-١}{٤}$ ، ...)

---

⑱ $ا ر = ٥ \to ①$

، $\frac{ا ر^{٤}}{ا ر} = ر^{٣} = \frac{١}{٢٧} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$

$\therefore ر = \frac{١}{٣}$ ، $ا = ١٥$

∴ المتتابعة هي (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...)

(19) $أر^2 + أر^3 = 6أر \Leftarrow ر + ر^2 = 6$

$ر^2 + ر - 6 = 0 \Leftarrow (ر+3)(ر-2) = 0$

ر = −3 مرفوض   ∴ ر = 2

$أر^6 = 320 \Leftarrow أ = 5$ ∴ المتتابعة (5، 10، 20، ...)

$أر^{ن-1} = 80 \Leftarrow 5 \times 2^{ن-1} = 80 \Leftarrow 2^{ن-1} = 16$

ن − 1 = 4   ∴ ن = 5

(20) $أر^4 = 8أر \Leftarrow ر^3 = 8$ ∴ ر = 2

$أر^3 + أر^5 = 240 \Leftarrow أ(8+32) = 240$ ∴ أ = 6

∴ المتتابعة (6، 12، 24، ...)

$ح_9 = أر^8 = 6 \times 2^8 = 1536$

، $ح_{15} = أر^{14} = 6 \times 2^{14} = 98304$

(21) $أر^2 - أر^4 = 20 \Leftarrow أر^2(1 - ر^2) = 20$ ← (1)

$أر^2 + أر^3 + أر^4 = 76$

$أر^2(1 + ر + ر^2) = 76$ ← (2)

بقسمة (2) على (1) $\Leftarrow \frac{1 + ر + ر^2}{1 - ر^2} = \frac{19}{5}$

$5 + 5ر + 5ر^2 = 19 - 19ر^2$

$5ر^2 + 19ر^2 + 5ر + 5 - 19 = 0$

$24ر^2 + 5ر - 14 = 0 \Leftarrow (3ر - 2)(8ر + 7) = 0$

$ر = \frac{2}{3}$ بالتعويض في (1) $ر = \frac{-7}{8}$ مرفوض

$\frac{4}{9} أ (1 - \frac{4}{9}) = 20$ ∴ أ = 81

∴ المتتابعة هي (81، 54، 36، ...)

(22) $أر^3 - أ = 21 \Leftarrow أ(ر^3 - 1) = 21$ ← (1)

$أر - أ = 3 \Leftarrow أ(ر - 1) = 3$ ← (2)

بقسمة (1) على (2)

$\Leftarrow \frac{أ(ر-1)(ر^2+ر+1)}{أ(ر-1)} = 7$

$ر^2 + ر - 6 = 0 \Leftarrow (ر - 2)(ر + 3) = 0$

ر = 2 ، ر = −3 مرفوض

بالتعويض في (2)   ∴ أ = 3

∴ المتتابعة هي (3، 6، 12، ...)

(23) $أ + أر + أر^2 = 21$

$أ(1 + ر + ر^2) = 21$ ← (1)

$أر^3 + أر^4 + أر^5 = 168$

$أر^3(1 + ر + ر^2) = 168$ ← (2)

بقسمة (2) على (1) $\frac{أر^3(1+ر+ر^2)}{أ(1+ر+ر^2)} = \frac{168}{21} = 8$

∴ ر = 2 بالتعويض في (1)

$\Leftarrow أ(1 + 2 + 4) = 21$

∴ أ = 3   ∴ المتتابعة هي (3، 6، 12، ...)

(24) $ح_2 + ح_3 = أر + أر^2 \Leftarrow أر(1 + ر) = 12$ (1)

$ح_1 \times ح_4 = 27 \Leftarrow أ \times أر^3 = 27 \Leftarrow أ^2 ر^3 = 27$ (2)

بتربيع المعادلة (1) ثم القسمة

$\frac{أ^2 ر^2 (1+ر)^2}{أ^2 ر^3} = \frac{144}{27} \Leftarrow \frac{1 + 2ر + ر^2}{ر} = \frac{16}{3}$

$3ر^2 + 6ر + 3 = 16ر \Leftarrow 3ر^2 - 10ر + 3 = 0$

$(3ر - 1)(ر - 3) = 0$

$ر = \frac{1}{3}$ ∴ أ = 27   أو   ر = 3 ∴ أ = 1

م.هـ = (27، 9، 3، 1، ...) أو (1، 3، 9، 27، ...)

(25) $\frac{2ك}{ك} = \frac{3ك + 1}{2ك} \Leftarrow 4ك = 3ك + 1$ ∴ ك = 1

(26) س − 2 ، س + 1 ، س + 7 $\Leftarrow \frac{س + 7}{س + 1} = \frac{س + 1}{س - 2}$

$(س + 7)(س - 2) = (س + 1)(س + 1)$

$س^2 + 5س - 14 = س^2 + 2س + 1 \Leftarrow 3س = 15$

∴ س = 5   ⇐   المتتابعة هي (3، 6، 12، ...)

$ح_7 = 3 \times (2)^6 = 192$

(27) $ح_ن = أر^{ن-1}$ حيث ر = 1,06

$ح_ن = 1200 (1,06)^{ن-1}$

$ح_6 = 1200 (1,06)^5 = 1605,87$ جنيهاً

(28) نفرض إن الأعداد هي: أ ، أر ، $أر^2$

$أ + أر + أر^2 = 21$ ← (1)

$أ \times أر \times أر^2 = 64 \Leftarrow أ^3 ر^3 = 64 \Leftarrow أر = 4$

∴ $أ = \frac{4}{ر}$ ← (2) ، بالتعويض من (2) في (1)

$\frac{4}{ر} + 4 + 4ر = 21$ بالضرب × ر

$4 + 4ر + 4ر^2 = 21ر \Leftarrow 4ر^2 - 17ر + 4 = 0$

$(4ر - 1)(ر - 4) = 0$

$ر = \frac{1}{4}$ ، ر = 4

عندما تكون $\text{ر} = \frac{١}{٤}$ بالتعويض في ② $\text{أ} = ١٦$

∴ الأعداد هي (١٦، ٤، ١)

عندما تكون $\text{ر} = ٤$ بالتعويض في ② $\text{أ} = ١$

∴ الأعداد هي (١، ٤، ١٦)

٢٩ ∵ $\text{ح}_{٥} = ٦$ ∴ $\text{أ}\,\text{ر}^{٤} = ٦$

∴ $٩٦\,\text{ر}^{٤} = ٦$ ∴ $\text{ر}^{٤} = \frac{١}{١٦} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

∴ $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{س} = ٩٦ \times \frac{١}{٢} = ٤٨$ ، $\text{ص} = ٤٨ \times \frac{١}{٢} = ٢٤$ ، $\text{ع} = ٢٤ \times \frac{١}{٢} = ١٢$

٣٠ $\frac{\text{أ} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢}}{\text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٣}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{\text{أ}(١ + \text{ر}^{٢})}{\text{أ}\,\text{ر}(١ + \text{ر}^{٢})} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢\,\text{أ} = \text{أ}\,\text{ر}$

∴ $\text{ر} = ٢$ ← ①

$\text{أ}\,\text{ر}^{٥} = ٣٢$ ← ② $\text{أ} = ١$

بالتعويض من ① في ②

∴ المتتابعة هي (١، ٢، ٤، ...) ، $\text{ح}_{٩} = ١ \times ٢^{٨} = ٢٥٦$

٣١ $\frac{\text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢}}{٢} = ١٥ \Leftarrow \text{أ}\,\text{ر}(١ + \text{ر}) = ٣٠$ ← ①

$\text{أ} \times \text{أ}\,\text{ر}^{٤} = ٩\,\text{أ}\,\text{ر}^{٢} \Leftarrow \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ٩$ ← ②

بقسمة ① على ② $\Leftarrow \frac{\text{أ}\,\text{ر}(١ + \text{ر})}{\text{أ}\,\text{ر}^{٢}} = \frac{١٠}{٣}$

$٣\,\text{ر}^{٢} - ١٠\,\text{ر} + ٣ = ٠ \Leftarrow (٣\,\text{ر} - ١)(\text{ر} - ٣) = ٠$

$\text{ر} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{أ} = ٨١$ ، $\text{ر} = ٣ \Leftarrow \text{أ} = ١$

∴ المتتابعة الأولى هي (٨١، ٢٧، ٩، ...)

المتتابعة الأخرى هي (١، ٣، ٩، ...)

٣٢ نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ ر²

$\text{أ} \times \text{أ}\,\text{ر} \times \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = \text{أ}^{٣}\,\text{ر}^{٣} = \frac{٣٤٣}{٦٤}$ ∴ $\text{أ}\,\text{ر} = \frac{٧}{٤}$

$٤\,\text{أ}\,\text{ر} = ٧$ ∴ $\text{أ} = \frac{٧}{٤\,\text{ر}}$ ← ①

$\frac{١}{\text{أ}} + \frac{١}{\text{أ}\,\text{ر}} + \frac{١}{\text{أ}\,\text{ر}^{٢}} = ٢ \Leftarrow \frac{\text{ر}^{٢} + \text{ر} + ١}{\text{أ}\,\text{ر}^{٢}} = ٢$ ← ②

$٢\,\text{أ}\,\text{ر}^{٢} = \text{ر}^{٢} + \text{ر} + ١ \Leftarrow ٢ \times \frac{٧}{٤\,\text{ر}} \times \text{ر}^{٢} = \text{ر}^{٢} + \text{ر} + ١$

$\frac{٧}{٢}\,\text{ر} = \text{ر}^{٢} + \text{ر} + ١$ بالضرب × ٢

$٧\,\text{ر} = ٢\,\text{ر}^{٢} + ٢\,\text{ر} + ٢ \Leftarrow ٢\,\text{ر}^{٢} - ٥\,\text{ر} + ٢ = ٠$

$(٢\,\text{ر} - ١)(\text{ر} - ٢) = ٠$ ∴ $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ر} = ٢$

عندما $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ بالتعويض في ① ∴ $\text{أ} = \frac{٧}{٢}$

∴ الأعداد هي: $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، $\frac{٧}{٨}$

عندما $\text{ر} = ٢$ بالتعويض في ① ∴ $\text{أ} = \frac{٧}{٨}$

∴ الأعداد هي: $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، $\frac{٧}{٢}$

٣٣ $\text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ١٨$ ∴ $\text{أ}\,\text{ر}(١ + \text{ر}) = ١٨$ ← ①

$\frac{١}{\text{أ}} + \frac{١}{\text{أ}\,\text{ر}} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{\text{ر} + ١}{\text{أ}\,\text{ر}} = \frac{١}{٢}$ ← ②

بضرب ① × ② ∴ $(١ + \text{ر})^{٢} = ٩$ ∴ $١ + \text{ر} = ٣$

∴ $\text{ر} = ٢$ أو $١ + \text{ر} = -٣$ ∴ $\text{ر} = -٤$ (مرفوضة)

∴ $\text{أ} = ٣$ ∴ المتتابعة هي (٣، ٦، ١٢، ...)

٣٤ نفرض أن أساس المتتابعة = ر

$(\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ}، \text{د}، ...) = (\text{أ}، \text{أ}\,\text{ر}، \text{أ}\,\text{ر}^{٢}، \text{أ}\,\text{ر}^{٣}، ...)$

∵ $\text{أ} + \text{ب} = ٦$ ∴ $\text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} = ٦$

$\Leftarrow \text{أ}(١ + \text{ر}) = ٦$ ← ①

∵ $\text{أ} + \text{د} = ٤\frac{١}{٢} \Leftarrow \text{أ}(١ + \text{ر}^{٣}) = ٤\frac{١}{٢}$ ← ②

بقسمة ② على ① ∴ $\frac{\text{أ}(١ + \text{ر}^{٣})}{\text{أ}(١ + \text{ر})} = \frac{٩}{٢ \times ٦}$

∴ $\frac{(١ + \text{ر})(١ - \text{ر} + \text{ر}^{٢})}{١ + \text{ر}} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ٤ - ٤\,\text{ر} + ٤\,\text{ر}^{٢} = ٣$

∴ $٤\,\text{ر}^{٢} - ٤\,\text{ر} + ١ = ٠ \Leftarrow (٢\,\text{ر} - ١)^{٢} = ٠$ ∴ $\text{ر} = \frac{١}{٢}$

بالتعويض في ① ∴ $\text{أ}(١ + \frac{١}{٢}) = ٦$ ∴ $\text{أ} \times \frac{٣}{٢} = ٦$

∴ $\text{أ} = ٤$ ∴ المتتابعة هي (٤، ٢، ١، ...)

$\text{ح}_{١٠} = \text{أ}\,\text{ر}^{٩} = ٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٩} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} = \frac{١}{١٢٨}$

٣٥ نفرض أن الأعداد الثلاثة هي أ ، أ ر ، أ ر²

$\text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ٢٨$

∴ $\text{أ}(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢}) = ٢٨$ ← ①

$\text{أ}^{٢} + \text{أ}^{٢}\,\text{ر}^{٢} + \text{أ}^{٢}\,\text{ر}^{٤} = ٣٣٦$

∴ $\text{أ}^{٢}(١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر}^{٤}) = ٣٣٦$ ← ②

بتربيع ① وقسمتها على ②

∴ $\frac{\text{أ}^{٢}(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢})^{٢}}{\text{أ}^{٢}(١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر}^{٤})} = \frac{٧٨٤}{٣٣٦}$

∴ $\frac{(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢})^{٢}}{١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر}^{٤}} = \frac{٧}{٣}$

∵ $١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر}^{٤} = (١ + \text{ر}^{٢})^{٢} - \text{ر}^{٢}$

$= (١ + \text{ر}^{٢} - \text{ر})(١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر})$

∴ $\frac{(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢})^{٢}}{(١ + \text{ر}^{٢} - \text{ر})(١ + \text{ر}^{٢} + \text{ر})} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore \frac{1+ر+ر^2}{1-ر+ر^2} = \frac{7}{3}$

$\therefore 7 - 7ر + 7ر^2 = 3 + 3ر + 3ر^2$

$\therefore 2ر^2 - 5ر + 2 = 0$

$(ر - 2)(2ر - 1) = 0$ $\therefore ر = 2$ أو $ر = \frac{1}{2}$

عندما $ر = 2$ $\therefore أ = 4$ $\therefore$ الأعداد هي 4 ، 8 ، 16

عندما $ر = \frac{1}{2}$ $\therefore أ = 16$ $\therefore$ الأعداد هي 16 ، 8 ، 4

36 $ح_ن = 3$ ، $أ ر^{ن-1} = 3$ $\therefore أ\left(\frac{1}{3}\right)^{ن-1} = 3$ ← ①

$ح_{2ن-1} = \frac{1}{9}$ ، $أ ر^{2ن-2} = \frac{1}{9}$

$\therefore أ\left(\frac{1}{3}\right)^{2ن-2} = \frac{1}{9}$ ← ②

بقسمة ① على ② $\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{ن-1-2ن+2} = 3 \times 9$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{-ن+1} = 27 \Leftarrow 3^{ن-1} = 3^3$ $\therefore ن - 1 = 3$

$\therefore ن = 4$ $\therefore أ \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$ $\therefore أ = 81$

$\therefore$ المتتابعة هي (81 ، 27 ، 9 ، ...)

37 $ح_{ن+1} = \frac{1}{2} ح_ن$ $\therefore \frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{1}{2} =$ ثابت

$\therefore$ المتتابعة هندسية ، $ر = \frac{1}{2}$

$\frac{ح_2^2}{ح_3 + ح_5} = \frac{8}{5} \Leftarrow \frac{أ^2 ر^2}{أر^2 + أر^4} = \frac{8}{5}$

$\frac{أ}{1 + ر^2} = \frac{8}{5} \Leftarrow \frac{أ}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{8}{5}$ $\therefore أ = 2$

$\therefore$ المتتابعة هي $(2 ، 1 ، \frac{1}{2} ، ...)$

38 نفرض أن المتتابعة هي $(16 ، 16ر ، 16ر^2 ، ...)$

$\therefore 16(1 + ر + ر^2) = 28$

ومنها $4ر^2 + 4ر - 3 = 0$

$(2ر - 1)(2ر + 3) = 0$ $\therefore ر = \frac{1}{2}$ أو $ر = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ المتتابعتان هما (16 ، 8 ، 4 ، ...) ، (16 ، −24 ، 36 ، ...)

39 نفرض أن $(أ ، ب ، جـ ، د) = (أ ، أر ، أر^2 ، أر^3)$

$\therefore \frac{ب+جـ}{أ+ب} = \frac{أر + أر^2}{أ + أر} = \frac{أر(1+ر)}{أ(1+ر)} = ر$

$\therefore \frac{جـ+د}{ب+جـ} = \frac{أر^2 + أر^3}{أر + أر^2} = \frac{أر^2(1+ر)}{أر(1+ر)} = ر$

$\therefore (أ+ب ، ب+جـ ، جـ+د)$ متتابعة هندسية

40 ① 3

② $أ = 256$ ، $ر = \frac{1}{2}$

$ح_ن = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1} < 1$ $\therefore 2^8 \times (2)^{1-ن} < 1$

$(2)^{9-ن} < 1$ بأخذ لو للطرفين

$(9 - ن)$ لو 2 $<$ لو 1 (÷ لو 2)

$(9 - ن) < \frac{لو 1}{لو 2}$

$9 - ن < 0 \Leftarrow -ن < -9$

$ن > 9$ $\therefore ن = 10 \Leftarrow ح_{10}$

③ $أ = 3$ ، $ر = 2$

$3(2)^{ن-1} > 200 \Leftarrow (2)^{ن-1} > \frac{200}{3}$

بأخذ لو للطرفين ← $(ن - 1)$ لو 2 $>$ لو $\frac{200}{3}$

$(ن - 1) > \frac{لو 200 - لو 3}{لو 2}$

$ن - 1 > 6.06 \Leftarrow ن > 7.062$ $\therefore ن = 8$

$ح_8 = 3(2)^7 = 384$

④ $ح_ن = أ(ر)^{ن-1}$

$2 = أ(2)^{ن-1}$ ← (1)

$ح_{2ن+1} = أ(ر)^{2ن+1-1}$

$128 = أ(2)^{2ن}$ ← (2) بالقسمة

$\frac{128}{2} = \frac{أ(2)^{2ن}}{أ(2)^{ن-1}}$

$64 = (2)^{ن+1} \Leftarrow 2^6 = 2^{ن+1}$

$ن + 1 = 6$ $\therefore ن = 5$ بالتعويض في (1)

$2 = أ \times (2)^{5-1} = أ \times 2^4$

$2 = 16أ$ $\therefore أ = \frac{1}{8}$

⑤ بفرض أن المتتابعة الهندسية حدها الأول أ وأساسها س

$ح_ن = أ(س)^{ن-1}$

$ح_{ر+5} = أ(س)^{ر+5-1}$

$م = أ(س)^{ر+4}$ ← (1)

$ح_{ر-5} = أ(س)^{ر-5-1}$

$ن = أ(س)^{ر-6}$ ← (2) بالقسمة

$\frac{ر}{م} = \frac{أ(س)^{ر-١٠٠}}{أ(س)^{ر١٠٠}} = س^{-١٠٠}$ ∴ $\frac{ر}{م} = س^{-١٠٠}$

∴ $\left(\frac{ر}{م}\right)^{٤} = (س^{-١٠٠})^{٤}$ ← (٣)

$م = أ(س)^{ر١٠٠}$ ← (٤) بضرب (٣) × م

$م\left(\frac{ر}{م}\right)^{٤} = أس^{ر١٠٠} \times س^{-١٠٠ \times ٤}$

$= أس^{ر١٠٠} \times س^{-ر٤٠٠} = أس^{٤}$

∴ $م\left(\frac{ر}{م}\right)^{٤} = ح_٥$

---

⑨ الأيمن $= ١ + أ + أ^{٢} + \dots\dots + أ^{س}$

تمثل متتابعة هندسية حدها الأول ١ ، ر = أ ، ن = س + ١

$= \frac{١[١ - أ^{س+١}]}{١ - أ} = \frac{١ - أ^{س+١}}{١ - أ}$

∴ $\frac{١ - أ^{س+١}}{١ - أ} = (١ + أ)(١ + أ^{٢})(١ + أ^{٤})(١ + أ^{٨})$

$١ - أ^{س+١} = (١ - أ)(١ + أ)(١ + أ^{٢}) \cdots (١ + أ^{٨})$

$= (١ - أ^{٢})(١ + أ^{٢})(١ + أ^{٤})(١ + أ^{٨})$

$= (١ - أ^{٤})(١ + أ^{٤})(١ + أ^{٨})$

$= (١ - أ^{٨})(١ + أ^{٨})$

$١ - أ^{س+١} = ١ - أ^{١٦}$ ∴ $أ^{س+١} = أ^{١٦}$

∴ $س + ١ = ١٦$ ∴ $س = ١٥$

تمارين (٦) على الأوساط الهندسية

١ ① $\frac{٥}{٣}$ ② $\frac{-٤}{٥}$

③ ١٦٢ ④ ١٤

---

⑤ $ح_٦ = \frac{١}{٩} ح_٤$ ∵ $أر^{٥} = \frac{١}{٩} أر^{٣}$

∴ $ر^{٢} = \frac{١}{٩}$ ∴ $ر = \pm \frac{١}{٣}$

∵ الحدود موجبة ∴ $ر = \frac{١}{٣}$

∵ $ح_٣ + ح_٦ = ٢٨$ ∴ $أر^{٢} + أر^{٥} = ٢٨$

$أ\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + أ\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} = ٢٨$

$\frac{١}{٩} أ + \frac{١}{٢٤٣} أ = ٢٨$ ⟸ $\frac{٢٨}{٢٤٣} أ = ٢٨$

∴ $أ = ٢٤٣$

∴ المتتابعة هي (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ....)

---

⑥ $ن = ١٦$ ، $أ = ١٦$ ، $ء = ٤$

المتتابعة حسابية هي (١٦ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ....)

$ج_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$

$ج_{١٦} = \frac{١٦}{٢}[٢ \times ١٦ + (١٦ - ١) \times ٤]$

$ج_{١٦} = ٧٣٦$ ∴ عدد المقاعد ٧٣٦

---

٢ ① $ب^{٢} = ٤ \times ٢٥ = ١٠٠$ ⟸ $ب = \pm\sqrt{٤ \times ٢٥}$

$ب = \pm ١٠$ ∴ $ب = ١٠$ أو $ب = -١٠$

② $ب^{٢} = ١٦ \times ٤٩ = ٧٨٤$ ⟸ $ب = \pm\sqrt{٧٨٤}$

∴ $ب = ٢٨$ أو $ب = -٢٨$

③ $٢٤٣ = ر^{٥}$ ∴ $ر = ٣$

∴ الأوساط هي (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١)

④ $٣٢٠ = ٥ر^{٦}$ ⟸ $٦٤ = ر^{٦}$ ∴ $ر = ٢$

∴ الأوساط هي (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ١٦٠)

⑤ $٣٢ = \frac{١}{٤} ر^{٧}$ ⟸ $١٢٨ = ر^{٧}$ ∴ $ر = ٢$

∴ الأوساط هي ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

⑥ $ح_١ = \frac{٨}{٢٧}$ ، $ح_٧ = \frac{٢٧}{٨}$

$أ = \frac{٨}{٢٧}$ ، $أر^{٦} = \frac{٢٧}{٨}$

$ر^{٦} = \frac{٢٧ \times ٢٧}{٨ \times ٨}$ ⟸ $ر = \frac{٣}{٢}$

الأوساط هي ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$)

---

٣ ① ± ٨ ② ٢٥ ③ $\frac{أ + ج}{٢}$ ④ ٣٢

---

٤ ① < ② $ب^{٢}$ ③ ٢

④ ٦ ⑤ $\frac{أ + ج}{٢}$ > ب

---

٥ ① نفرض أن العددين هما أ ، ج

أ + ج = ٢٠ ⟸ أ = ٢٠ − ج ← ①

$ب^{٢} = أج$ ⟸ $ب^{٢} = (٢٠ - ج)ج$ ⟸ $٦٤ = ٢٠ج - ج^{٢}$

$ج^{٢} - ٢٠ج + ٦٤ = ٠$ ⟸ $(ج - ٤)(ج - ١٦) = ٠$

ج = ٤ ، ج = ١٦ بالتعويض فى ①

أ = ١٦ ، أ = ٤ ∴ العددان هما ٤ ، ١٦

---

② نفرض أن العددين هما س ، ص

س − ص = ٨ ⟸ س = ٨ + ص ← ①

س ص = ٩ ← ② بالتعويض من ① فى ②

ص (٨ + ص) = ٩

$ص^{٢} + ٨ص - ٩ = ٠$ ∴ $(ص + ٩)(ص - ١) = ٠$

ص = −٩ (مرفوض) ، ص = ١ ∴ س = ٩

∴ العددان هما ١ ، ٩

(٦) العددان س ، ص

$\frac{س+ص}{٢} = ٥ \Leftarrow س + ص = ١٠$

ص = ١٠ − س ← ① ∴ س ص = ٩ ← ②

بالتعويض من ① في ②

س(١٠ − س) = ٩ ، $س^٢ − ١٠س + ٩ = ٠$

(س − ٩)(س − ١) = ٠

∴ س = ٩ ، س = ١

ص = ١ ، ص = ٩ ∴ العددان هما ١ ، ٩

(٧) نفرض أن العددين أ ، ب

∴ أ + ب = ٥٠ ، أ ب = ٤٠٠

∴ أ(٥٠ − أ) = ٤٠٠ ∴ $٥٠أ − أ^٢ = ٤٠٠$

∴ $أ^٢ − ٥٠أ + ٤٠٠ = ٠$ ∴ (أ − ١٠)(أ − ٤٠) = ٠

∴ أ = ١٠ أو أ = ٤٠

∴ ب = ٤٠ أو ب = ١٠ ∴ العددان هما ١٠ ، ٤٠

(٨) $\frac{س+ص}{٢} = \frac{٥}{٣}\sqrt{س ص}$ ، الأصغر س = ٩

$\frac{٩+ص}{٢} = \frac{٥}{٣} \times \sqrt{٩ص} \Leftarrow ٩ + ص = ١٠\sqrt{ص}$

بالتربيع $٨١ + ١٨ص + ص^٢ = ١٠٠ص$

$ص^٢ − ٨٢ص + ٨١ = ٠ \Leftarrow (ص − ٨١)(ص − ١) = ٠$

∴ ص = ٨١ ∴ العدد الآخر هو ٨١

(٩) $أر + أر^٤ = ٩٠ \Leftarrow أر(١ + ر^٣) = ٩٠$ ← ①

$أر^٢ + أر^٣ = ٦٠ \Leftarrow أر^٢(١ + ر) = ٦٠$ ← ②

بقسمة ② على ① $\Leftarrow \frac{أر^٢(١+ر)}{أر(١+ر^٣)} = \frac{٦٠}{٩٠}$

$\frac{ر(١+ر)}{(١+ر)(١−ر+ر^٢)} = \frac{٢}{٣}$

$٣ر = ٢ − ٢ر + ٢ر^٢$ ∴ $٢ر^٢ − ٥ر + ٢ = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ ، ر = ٢

أ = ١٦٠ ، أ = ٥

العددان هما ١٦٠ ، ٥

(١٠) (٢ ، ... ، ١٤٥٨)

$\frac{٢ر + ٢ر^٢}{\frac{١٤٥٨}{ر} + \frac{١٤٥٨}{ر^٢}} = \frac{١}{٢٧} \Leftarrow \frac{٢ر(١+ر)}{\frac{١٤٥٨(ر+١)}{ر^٢}} = \frac{١}{٢٧}$

$\frac{ر^٣}{٧٢٩} = \frac{١}{٢٧} \Leftarrow ر^٣ = ٢٧$ ∴ ر = ٣

$ح_ن = أر^{ن−١} \Leftarrow ١٤٥٨ = ٢ \times ٣^{ن−١}$

$٧٢٩ = ٣^{ن−١} \Leftarrow ٣^٦ = ٣^{ن−١} \Leftarrow ن = ٧$

عدد الأوساط = ٥ أوساط

(١١) س ص = ٣٦ ← ① ، س + ٤ + ص + ٦ = ٣٠

س + ص = ٢٠ ∴ س = ٢٠ − ص ← ②

بالتعويض في ① $\Leftarrow ٣٦ = ٢٠ص − ص^٢$

$ص^٢ − ٢٠ص + ٣٦ = ٠ \Leftarrow (ص − ٢)(ص − ١٨) = ٠$

ص = ٢ أو ص = ١٨ بالتعويض في ②

س = ١٨ أو س = ٢

(١٢) $\frac{أر + أر^٣}{٢} = ٦٨$ ∴ $أر(١ + ر^٢) = ١٣٦$ ← ①،

$أر \times أر^٣ = ٣٢$ ∴ $أر^٢ = ٣٢$ ← ②

من ① ، ② بالقسمة $\frac{١+ر^٢}{ر} = \frac{١٧}{٤}$

∴ $٤ر^٢ − ١٧ر + ٤ = ٠$

∴ (٤ر − ١)(ر − ٤) = ٠

∴ $ر = \frac{١}{٤}$ (مرفوض) لأن المتتابعة تزايدية

أو ر = ٤ بالتعويض ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة الهندسية هي (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...)

(١٣) نفرض أن العددين أ ، ب ووسطهما الهندسي = $\sqrt{أب}$

∴ $\sqrt{أب} − أ = ٢$ ①

$ب − \sqrt{أب} = ٣$ ② بالجمع

∴ ب − أ = ٥ ∴ ب = أ + ٥ ③

بالتعويض في ①

$\sqrt{أ(أ + ٥)} = أ + ٢$ (بتربيع الطرفين)

$أ^٢ + ٥أ = أ^٢ + ٤أ + ٤ \Leftarrow ٥أ − ٤أ = ٤$

∴ أ = ٤ ، ب = ٩

∴ العددان هما ٤ ، ٩

(١٤) $أر^٢ + أر^٤ = ٦٠ \Leftarrow أر^٢(١ + ر^٢) = ٦٠$ ← ①

$٢٤ = \sqrt{أر^٢ \times أر^٤} \Leftarrow ٢٤ = أر^٣$ ← ②

بقسمة ① على ② $\Leftarrow \frac{أر^٢(١+ر^٢)}{أر^٣} = \frac{٦٠}{٢٤}$

$٢٤ + ٢٤ر^٢ = ٦٠ر \Leftarrow ٢ر^٢ − ٥ر + ٢ = ٠$

(٢ر − ١)(ر − ٢) = ٠ ∴ $ر = \frac{١}{٢}$ ، ر = ٢ مرفوض

∴ أ = ١٩٢ ∴ المتتابعة هي (١٩٢ ، ٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

(١٥) أ + أ $ر^{٢}$ = ٩ ⇐ أ(١ + $ر^{٢}$) = ٩ ← ①

أ ر + أ $ر^{٢}$ = ٦ ⇐ أ ر(١ + ر) = ٦ ← ②

بقسمة ② على ①

$\frac{أ ر(١+ر)}{أ(١+ر)(ر^{٢}-ر+١)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٣ر = ٢$ر^{٢}$ − ٢ر + ٢ ⇐ ٢$ر^{٢}$ − ٥ر + ٢ = ٠

(٢ر − ١)(ر − ٢) = ٠ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ر = ٢

∴ يوجد متتابعتان هندسيتان   بالتعويض في ①

أ = ٨ ، أ = ١

∴ المتتابعة الأولى هي: (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

∴ المتتابعة الثانية هي: (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

---

(١٦) أ + د ، أ + ٤د ، أ + ١٠د في تتابع هندسي

$(أ + ٤د)^{٢}$ = (أ + د)(أ + ١٠د)

$أ^{٢}$ + ٨أد + ١٦$د^{٢}$ = $أ^{٢}$ + ١١أد + ١٠$د^{٢}$

⇐ ٦$د^{٢}$ = ٣أد

٢$د^{٢}$ = أد ∴ أ = ٢د ، ٤ = ٢د ∴ د = ٢ ∵ أ = ٤

∴ المتتابعة هي (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

---

(١٧) نفرض أن الأعداد أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$

أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ = ١٣ ⇐ أ(١ + ر + $ر^{٢}$) = ١٣ ← ①

أ ، أ ر + ٢ ، أ $ر^{٢}$ في تتابع حسابي

٢أ ر + ٤ = أ + أ $ر^{٢}$

أ $ر^{٢}$ − ٢أ ر + أ = ٤ ⇐ أ($ر^{٢}$ − ٢ر + ١) = ٤ ← ②

بقسمة ② على ①

$\frac{أ(ر^{٢}-٢ر+١)}{أ(١+ر+ر^{٢})} = \frac{٤}{١٣}$

١٣$ر^{٢}$ − ٢٦ر + ١٣ = ٤ + ٤ر + ٤$ر^{٢}$

٩$ر^{٢}$ − ٣٠ر + ٩ = ٠ (÷٣) ⇐ ٣$ر^{٢}$ − ١٠ر + ٣ = ٠

(٣ر − ١)(ر − ٣) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ، ر = ٣ ⇐ أ = ٩ ، أ = ١

عندما ر = $\frac{١}{٣}$ ، أ = ٩   الأعداد هي (٩ ، ٣ ، ١)

عندما ر = ٣ ، أ = ١   الأعداد هي (١ ، ٣ ، ٩)

∴ الأعداد هي (٩ ، ٣ ، ١)

---

(١٨) (أ ، أ + د ، أ + ٢د ، ...) ، أ + ٨د = ١٩ ← ①

(أ ، أ + ٣د ، أ + ١٢د) م.هـ

$(أ + ٣د)^{٢}$ = أ(أ + ١٢د)

$أ^{٢}$ + ٦أد + ٩$د^{٢}$ = $أ^{٢}$ + ١٢أد ⇐ ٩$د^{٢}$ = ٦أد ⇐ ٣د = ٢أ

بضرب المعادلة ① في ٢

∴ ٢أ + ١٦د = ٣٨

∴ ٣د + ١٦د = ٣٨ ⇐ د = ٢   ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

---

(١٩) أ + ٧د = ١٥ ← ①

أ ، أ + د ، أ + ٤د في تتابع هندسي

$(أ + د)^{٢}$ = $أ^{٢}$ + ٤أد ⇐ $أ^{٢}$ + ٢أد + $د^{٢}$ = $أ^{٢}$ + ٤أد

$د^{٢}$ = ٢أد   ∴ د = ٢أ

أ + ١٤أ = ١٥   ∴ أ = ١

بالتعويض في ①   ∴ د = ٢

∴ المتتابعة الحسابية هي (١ ، ٣ ، ٥ ، ...)

---

(٢٠) (أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ...)

$ح_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د] ⇐ $\frac{٥}{٢}$[٢أ + ٤د] = ٥٠

(٢أ + ٤د) = ٥٠ × $\frac{٢}{٥}$ ∴ أ + ٢د = ١٠ ← ①

أ ، أ + د ، أ + ٤د   (م.هـ)

$(أ + د)^{٢}$ = أ(أ + ٤د)

$أ^{٢}$ + ٢أد + $د^{٢}$ = $أ^{٢}$ + ٤أد

$د^{٢}$ = ٢أد   د = ٢أ ← ② بالتعويض في ①

أ + ٤أ = ١٠ ⇐ أ = ٢

∴ د = ٤   ∴ المتتابعة الحسابية هي (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...)

---

(٢١) نفرض الأعداد ، أ − د ، أ ، أ + د

أ − د + أ + أ + د = ١٥

∴ ٣أ = ١٥   ∴ أ = ٥

الأعداد هي ، ٥ − د ، ٥ ، ٥ + د

(١٠ − ٢د ، ١٢ ، ٢٢ + د)   (م.هـ)

١٤٤ = (١٠ − ٢د)(٢٢ + د)

١٤٤ = ٢٢٠ − ٣٤د − ٢$د^{٢}$

∴ $د^{٢}$ + ١٧د − ٣٨ = ٠   ∴ (د + ١٩)(د − ٢) = ٠

∴ د = −١٩ (مرفوض)   أو   د = ٢

∴ الأعداد هي: ٣ ، ٥ ، ٧

---

(٢٢) نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$ في تتابع هندسي

أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ = ١٣ ⇐ أ(١ + ر + $ر^{٢}$) = ١٣ ← ①

أ ، ٢أ ر ، ٣أ $ر^{٢}$ في تتابع حسابي

$4أر = أ + 3أر^2 \Leftarrow 4أر = أ(1 + 3ر^2)$

$4ر = 1 + 3ر^2 \Leftarrow 3ر^2 - 4ر + 1 = 0$

$(3ر - 1)(ر - 1) = 0$ ∴ $ر = \frac{1}{3}$ ، $ر = 1$

بالتعويض في ① $\Leftarrow أ(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) = 13$

∴ $أ = 9$ ∴ الأعداد هي: (٩، ٣، ١)

أو $أ = \frac{13}{3}$ ∴ الأعداد هي: $(\frac{13}{3}، \frac{13}{3}، \frac{13}{3})$

---

(٢٣) نفرض أن الأعداد هي أ، أر، أر² في تتابع هندسي

$أ + أر + أر^2 = 35 \Leftarrow أ(1 + ر + ر^2) = 35 \leftarrow$ ①

أ ، أر + ٦ ، أر² + ٧ في تتابع حسابي

$2أر + 12 = أ + أر^2 + 7 \Leftarrow أر^2 - 2أر + أ = 5$

$أ(ر^2 - 2ر + 1) = 5 \leftarrow$ ② بقسمة ① على ②

$$\frac{أ(1 + ر + ر^2)}{أ(ر^2 - 2ر + 1)} = 7$$

$7ر^2 - 14ر + 7 = 1 + ر + ر^2$

$6ر^2 - 15ر + 6 = 0$ (÷٣) $\Leftarrow 2ر^2 - 5ر + 2 = 0$

$(2ر - 1)(ر - 2) = 0$ ∴ $ر = \frac{1}{2}$ ، $ر = 2$

بالتعويض في ① $\Leftarrow أ = 20$ ، $أ = 5$

∴ الأعداد عندما $ر = \frac{1}{2}$ ، $أ = 20$ هي: ٢٠، ١٠، ٥

∴ الأعداد عندما $ر = 2$ ، $أ = 5$ هي: ٥، ١٠، ٢٠

∴ الأعداد هي: ٥، ١٠، ٢٠

---

(٢٤) نفرض أن الحدود الثلاثة الأولى أ، أر، أر² تتابع هندسي

$\frac{أ}{6}، \frac{أر}{4}، \frac{أر^2}{3}$ تتابع حسابي

$\frac{أر}{2} = \frac{أ}{6} + \frac{أر^2}{3} \Leftarrow \frac{أر}{2} = \frac{أ + 2أر^2}{6}$

$2أ + 4أر^2 = 6أر$ (÷٢)

$2أر^2 - 3أر + أ = 0 \Leftarrow أ(2ر^2 - 3ر + 1) = 0$

$(2ر - 1)(ر - 1) = 0$

∴ $ر = \frac{1}{2}$ ، $ر = 1$ ∴ يوجد متتابعتان

---

(٢٥) $2أ = 1 + ب \leftarrow$ ① ، $أ = ب^2 \leftarrow$ ②

بالتعويض من ② في ①

$2ب^2 = 1 + ب \Leftarrow 2ب^2 - ب - 1 = 0$

$\Leftarrow (2ب + 1)(ب - 1) = 0$

$ب = \frac{-1}{2}$ ، $ب = 1$ مرفوض

$\Leftarrow$ بالتعويض في ② ∴ $أ = \frac{1}{4}$

---

(٢٦) ب وسط هندسي بين ٤أ، ٣هـ $\Leftarrow 4أ + 3هـ > 2ب$

∵ ٣هـ وسط هندسي بين ب، ٤د $\Leftarrow ب + 4د > 6هـ$

∴ $(4أ + 3هـ)(ب + 4د) > 12ب هـ$

---

(٢٧) ∵ ب وسط هندسي بين أ، هـ ∴ $أ + هـ > 2ب \leftarrow$ ①

∵ هـ وسط هندسي بين ب، د ∴ $ب + د > 2هـ \leftarrow$ ②

∴ $(أ + هـ)(ب + د) > 4ب هـ$

---

(٢٨) ① ٣ب وسط حسابي بين ٦أ، ٢هـ

وحيث إن الوسط الحسابي > الوسط الهندسي الموجب

∴ $3ب > \sqrt{6أ \times 2هـ}$ وبتربيع الطرفين

∴ $9ب^2 > 12أهـ \leftarrow (1)$

وبالمثل ٢هـ وسط حسابي بين ٣ب، ٢د

∴ $2هـ > \sqrt{3ب \times 2د}$ وبتربيع الطرفين

$4هـ^2 > 6ب د \leftarrow (2)$

ومن (١)، (٢)

$9ب^2 \times 4هـ^2 > 12أهـ \times 6ب د$

وبقسمة الطرفين على ٣٦ب هـ (ب، هـ $\in ح_+$)

∴ $ب هـ > 2أد$

② ٣ب وسط حسابي بين ٦أ، ٢هـ

$(3ب)^2 > 6أ \times 2هـ \Leftarrow 3ب^2 > 4أهـ$

٢هـ وسط حسابي بين ٣ب، ٢د

$(2هـ)^2 > 3ب \times 2د$

$2هـ^2 > 3ب د$ ∴ $3ب^2 + 2هـ^2 > 4أهـ + 3ب د$

---

(٢٩) ① $2ص < س + ع$

② الوسط الهندسي $= \sqrt[3]{1 \times 3 \times 9} = 3$

③ $ع_4 = (3)^{4-1} = 27$ ، $ع_6 = 243$

الوسط الهندسي $= \sqrt{27 \times 243} = 81$

④ $(س - 1)^2 = (س - 2)(3س - 5)$

$س^2 - 2س + 1 = 3س^2 - 11س + 10$

$2س^2 - 9س + 9 = 0$

$(2س - 3)(س - 3) = 0$

$س = \frac{3}{2}$ أو $س = 3$

⑤ الوسط الهندسي $= \sqrt[5]{1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16} = 4$

⑥ ∵ ب وسط هندسي بين أ ، جـ

والوسط الحسابي بين أ ، جـ = (أ + جـ)/٢

∵ الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

∴ (أ + جـ)/٢ > ب (× ٢)

∴ أ + جـ > ٢ب ← (١)

بالمثل جـ وسط هندسي بين ب ، د

∴ (ب + د)/٢ > جـ ← ب + د > ٢جـ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ أ + جـ + ب + د > ٢ب + ٢جـ

∴ أ + د > ب + جـ

⑦ أ + ب = ٢ع ⇐ أب = و²

أ³ + ب³ = (أ + ب)(أ² + ب² − أب)

= ٢ع[(أ + ب)² − ٣أب]

= ٢ع[(٢ع)² − ٣و²]

= ٢ع[٤ع² − ٣و²]

= ٨ع³ − ٦ع و²

ك ع³ − م و² ع = ٨ع³ − ٦ع و²

∴ ك = ٨ ، م = ٦

ك + م = ٨ + ٦ ∴ ك + م = ١٤

⑧ ∵ س ، ص ، ع في تتابع حسابي

∴ س + ع = ٢ص ← (١)

∵ س ، ص − س ، ع − س في تتابع هندسي

∴ (ص − س)² = س(ع − س)

((س + ع)/٢ − س)² = س ع − س²

¼ (ع − س)² = س ع − س²

ع² − ٢ع س + س² = ٤س ع − ٤س²

٥س² − ٦س ع + ع² = صفر

(٥س − ع)(س − ع) = ٠

٥س = ع أو س = ع (مرفوض) بالتعويض في (١)

س + ٥س = ٢ص ∴ ص = ٣س

∴ ١٥س = ٣ع = ٥ص ∴ ك = ٣ ، م = ٥

ك × م = ٣ × ٥ = ١٥

⑨ المتتابعة أ ، أ ر ، أ ر²

أ = أ ، ب = أ ر ، جـ = أ ر²

٢د = أ + ب = أ + أ ر = أ(١ + ر)

د = أ(١ + ر)/٢ ← (١)

و = (ب + جـ)/٢ = (أ ر + أ ر²)/٢ = أ ر(١ + ر)/٢ ← (٢)

∴ أ/د + جـ/و = (٢ × أ)/(أ(١ + ر)) + (٢ × أ ر²)/(أ ر(١ + ر))

= ٢[١/(١ + ر) + ر/(١ + ر)] = ٢ × (١ + ر)/(١ + ر) = ٢

⑩ ∵ ٢أ ، ٣ب ، ٤جـ في تتابع حسابي

∴ ٣ب = (٢أ + ٤جـ)/٢ ∴ ٣ب = أ + ٢جـ

∵ ٢أ ، ٣ب − ٢أ ، ٤جـ − ٢أ في تتابع هندسي

∴ (٣ب − ٢أ)² = ٢أ(٤جـ − ٢أ)

(أ + ٢جـ − ٢أ)² = ٤أ(٢جـ − أ)

(٢جـ − أ)² − ٤أ(٢جـ − أ)

(٢جـ − أ)[٢جـ − أ − ٤أ] = ٠

(٢جـ − أ)(٢جـ − ٥أ) = ٠

٢جـ = أ ← جـ/أ = ١/٢

٢جـ = ٥أ ← جـ/أ = ٥/٢

٣٠ نفرض أن الأعداد هي:

أ ، أ ر ، أ ر² ، أ ر³ تكون متتابعة هندسية

أ + ٤ ، أ ر + ٢١ ، أ ر² + ٢٩ ، أ ر³ + ١ تكون متتابعة حسابية

من المتتابعة الحسابية ح٢ − ح١ = ح٣ − ح٢

(أ ر + ٢١) − (أ + ٤) = (أ ر² + ٢٩) − (أ ر + ٢١)

٢أ ر + ٤٢ = أ ر² + ٢٩ + أ + ٤

٤٢ − ٢٩ − ٤ = أ ر² − ٢أ ر + أ

أ(ر² − ٢ر + ١) = ٩ ∴ أ(ر − ١)² = ٩ ← ①

بالمثل ح٣ − ح٢ = ح٤ − ح٣

(أ ر² + ٢٩) − (أ ر + ٢١) = (أ ر³ + ١) − (أ ر² + ٢٩)

أ ر(ر − ١) + ٢٩ − ٢١ = أ ر²(ر − ١) + ١ − ٢٩

أ ر²(ر − ١) − أ ر(ر − ١) = ٨ + ٢٨

(ر − ١)أ ر(ر − ١) = ٣٦ ⇐ أ ر(ر − ١)² = ٣٦ ← ②

بقسمة ② على ①

∴ أ ر(ر − ١)² / أ(ر − ١)² = ٣٦/٩ ⇐ ر = ٤

∴ أ(٤ − ١)² = ٩ ⇐ ٩أ = ٩ ⇐ أ = ١

∴ المتتابعة الهندسية هي: (١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ...)

(٣١) أ + ٢ د ، أ + ٧ د ، أ + ١٧ د   تتابع هندسي

(أ + ٧ د)^٢ = (أ + ٢ د)(أ + ١٧ د)

أ^٢ + ١٤ أ د + ٤٩ د^٢ = أ^٢ + ١٩ أ د + ٣٤ د^٢

١٥ د^٢ = ٥ أ د   ∴ أ = ٣ د   ∴ د = أ/٣ ← ①

أ + ٢أ/٣ ، أ + ٧أ/٣ ، أ + ١٧أ/٣

(٣أ + ٢أ)/٣ ، (٣أ + ٧أ)/٣ ، (٣أ + ١٧أ)/٣ ⟸ ٥/٣ أ ، ١٠/٣ أ ، ٢٠/٣ أ

ر = ح٢/ح١   ∴ ر = ١٠/٣ × ٣/٥ = ٢

∵ ح٣ في المتتابعة الحسابية = ح١ في المتتابعة الهندسية = ٣

∴ أ = ٣ ، ر = ٢

∴ المتتابعة الهندسية هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

أ + ٢ د = ٣ ← ②   بالتعويض من ① في ②

∴ أ + ٢أ/٣ = ٣   بالضرب × ٣

∴ ٣أ + ٢أ = ٩ ⟸ ٥أ = ٩

∴ أ = ١,٨   ∴ د = ١,٨/٣ = ٠,٦

∴ المتتابعة الحسابية هي (١,٨ ، ٢,٤ ، ٣ ، ...)

(٣٢) ص هي الوسط الحسابي بين س ، ع

والوسط الحسابي > الوسط الهندسي

∴ ص > √(س ع) ← ①   أ وسط هندسي بين س ، ص

∴ أ = √(س ص)

بالمثل ب = √(ص ع)   ∴ أ ب = √(س ص) × √(ص ع)

∴ أ ب = ص √(س ع) ⟸ √(س ع) = أ ب/ص ← ②

بالتعويض في ①

∴ ص > أ ب/ص   ∴ ص^٢ > أ ب

(٣٣) ب^٢ = أ هـ ← لو ب^٢ = لو أ هـ

٢ لو ب = لو أ + لو هـ

∴ (لو أ ، لو ب ، لو هـ) في تتابع حسابي

(٣٤) ① أ + ب + هـ = ١

∴ ب + هـ = ١ − أ ، أ + هـ = ١ − ب ، أ + ب = ١ − هـ

∵ الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

∴ أ + ب > ٢ √(أ ب)

ب + هـ > ٢ √(ب هـ)

أ + هـ > ٢ √(أ هـ)

∴ (أ + ب)(ب + هـ)(أ + هـ) > ٨ √(أ^٢ ب^٢ هـ^٢)

∴ (١ − هـ)(١ − أ)(١ − ب) > ٨ أ ب هـ

② الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

(س + ١/س)/٢ > √(س × ١/س)

س + ١/س > ٢ √١   ∴ س + ١/س > ٢

تمارين (٧) على المتسلسلات الهندسية

(١) ① ٩   ② ±١٢

③ ٨٠   ④ ١٩

⑤ أ = ١/٤ ، ل = ٣٢

ن = عدد الأوساط + ٢   ∴ ن = ٦ + ٢ = ٨

ل = أ ر^(ن − ١)   ∴ ٣٢ = ١/٤ × (ر)^(٨ − ١)

١٢٨ = (ر)^٧   ∴ (ر)^٧ = (٢)^٧   ∴ ر = ٢

∴ الأوساط الهندسية هي: (١/٢ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

⑥ أ = ٢٧ ، د = −٣ ، جـن = صفر

جـن = ن/٢ [٢أ + (ن − ١) × د]

صفر = ن/٢ [٢ × ٢٧ + (ن − ١) × −٣]

∴ ن/٢ [٥٤ − ٣ن + ٣] = ٠

٥٧ − ٣ن = ٠   ∴ ٥٧ = ٣ن   ∴ ن = ١٩

∴ عدد الحدود = ١٩ حداً

(٢) ① ٦٣   ② ٤٠,٥   ③ ٣

④ ٢ ، −٣   ⑤ ٨   ⑥ ٤٠,٥

⑦ ٦٤/٣   ⑧ أولاً ٣/٤   ثانياً ٧٨١/٦٤

(٣) ① ر = ٤٥/٧٥ = ٣/٥ < ١

يمكن جمعها إلى عدد لا نهائي

② ر = ٣٦/٢٤ = ٣/٢ > ١

لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

③ ر = ٢١/٧ = ٣ > ١

لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

④ ر = ٩/٢ + ٢٧/٤ = ٢/٣ < ١

يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

⑤ ر = ٢٧/٤ + ٨١/٨ = ٢/٣ < ١

يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

⑨ $ر = \frac{٥}{٦} + \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٤} > ١$

لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

---

٤ ① $ر = \frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢} < ١$ ∴ يمكن جمعها إلى ∞

$جـ_{∞} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤٨$

② $ر = \frac{-٦}{٣} = -٢$ ∴ $ر \notin]-١ ، ١[$

∴ لا يمكن جمعها إلى ∞

③ $ر = \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} = ٢ > ١$ ∴ لا يمكن جمعها إلى ∞

④ $ر = \frac{٢ \times ٥^{١-ن-١}}{٢ \times ٥^{١-ن}} = \frac{١}{٥} < ١$ ∴ يمكن جمعها إلى ∞

$جـ_{∞} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٢}$

---

٥ ① $أ = ٤$ ، $ر = ٣$ ، $ن = ٦$

$جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{٦} = \frac{٤(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١} = ١٤٥٦$

② $أ = ١٠٢٤$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ ، $ن = ١٠$

$جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{١٠} = \frac{١٠٢٤\left[(\frac{١}{٢})^{١٠} - ١\right]}{\frac{١}{٢} - ١} = ٢٠٤٦$

③ $أ = ٩$ ، $ر = ٣$ ، $ل = ٦٥٦١$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{ن} = \frac{٦٥٦١ \times ٣ - ٩}{٣ - ١} = ٩٨٣٧$

④ $أ = ٢٠٤٨$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ ، $ل = ١٢٨$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{ن} = \frac{١٢٨ \times \frac{١}{٢} - ٢٠٤٨}{\frac{١}{٢} - ١} = ٣٩٦٨$

---

٦ ① $أ = ٦$ ، $ر = ٢$ ، $ن = ٦$

∴ $جـ_{٦} = \frac{٦(٢^{٦} - ١)}{٢ - ١} = ٣٧٨$

② $أ = ١٢٥$ ، $ر = \frac{١}{٥}$ ، $ن = ٦$

∴ $جـ_{٦} = \frac{١٢٥\left[(\frac{١}{٥})^{٦} - ١\right]}{\frac{١}{٥} - ١} = ١٥٦,٢٤$

③ $أ = ٣$ ، $ر = -٢$ ، $ل = ٧٦٨$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{٧٦٨ \times (-٢) - ٣}{-٢ - ١} = ٥١٣$

---

٧ ① $ح_{١} = أ = ٦٤$ ، $ح_{٨} = ١٢٨$ ، $ر = ٢$

$ل = ح_{١٦} = ٢^{١٥} = ٣٢٧٦٨$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{٣٢٧٦٨ \times ٢ - ٦٤}{٢ - ١} = ٦٥٤٧٢$

② $ح_{٣} = أ = ٤$ ، $ح_{٤} = ٢$ ، $ر = \frac{١}{٢}$

$ل = ح_{١١} = \frac{١}{٦٤}$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{\frac{١}{٦٤} \times \frac{١}{٢} - ٤}{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{٥١١}{٦٤}$

---

٨ ① ٣١ ② ١٦ ③ ٣

④ $\frac{٧}{٨}$ ⑤ ٠,٥ ⑥ ٥٤

---

٩ $جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{٦٤ \times ٢ - \frac{١}{٢}}{٢ - ١}$

$= ١٢٨ - \frac{١}{٢} = ١٢٧\frac{١}{٢}$

$ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$ ⇐ $٦٤ = \frac{١}{٢} \times ٢^{ن-١}$

$١٢٨ = ٢^{ن-١}$ ⇐ $٢^{ن-١} = ٢^{٧}$ ∴ $ن = ٨$

---

١٠ $أ ر^{٢} = ٩$ ← ① ، $أ ر^{٥} = ٢٤٣$ ← ②

بقسمة ② على ①:

∴ $ر^{٣} = ٢٧$ ∴ $ر = ٣$ بالتعويض في ①

∴ $أ = ١$ ∴ المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

$جـ_{٦} = \frac{١ \times (ر^{٦} - ١)}{ر - ١} = \frac{١ \times (٧٢٩ - ١)}{٣ - ١} = \frac{٧٢٨}{٢} = ٣٦٤$

---

١١ $أ = ٣$ ، $ر = ٢$

$جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $٣٨١ = \frac{٣(٢^{ن} - ١)}{٢ - ١}$

$٢^{ن} = \frac{٣٨١}{٣} + ١$

$٢^{ن} = ١٢٨$ ⇐ $٢^{ن} = ٢^{٧}$ ∴ $ن = ٧$

عدد الحدود = ٧ حدود

---

١٢ $أ = ٢٤٣$ ، $ل = ١$ ، $جـ_{ن} = ٣٦٤$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ⇐ $٣٦٤ = \frac{ر - ٢٤٣}{ر - ١}$

$٣٦٤ ر - ٣٦٤ = ر - ٢٤٣$

$٣٦٣ ر = ٣٦٤ - ٢٤٣$ ∴ $٣٦٣ ر = ١٢١$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$ ∴ المتتابعة هي (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ...)

---

١٣ $جـ_{ن} = ١٠٩٣$ ، $ل = ٧٢٩$ ، $ر = ٣$

$جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $١٠٩٣ = \frac{٧٢٩ \times ٣ - أ}{٣ - ١}$

$٧٢٩ \times ٣ - أ = ١٠٩٣ \times ٢$

$أ = ٧٢٩ \times ٣ - ١٠٩٣ \times ٢$ ∴ $أ = ١$

المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

(١٤) $ا ر^{٣} = ٢٤ \leftarrow ①$ ، $ا ر^{٦} = ١٩٢ \leftarrow ②$

بقسمة ② على ① ∴ $ر^{٣} = ٨$ ∴ $ر = ٢$

∴ $ا = ٣$ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

$$∴ جـ_{١٥} = \frac{٣(٢^{١٥} - ١)}{٢ - ١} = ٩٨٣٠١$$

(١٥) $ح_{٢} = ٦ \Leftarrow ا ر = ٦ \leftarrow (١)$

$ح_{٣} - ح_{١} = ٩ \Leftarrow ا ر^{٢} - ا = ٩$

$ا(ر^{٢} - ١) = ٩ \leftarrow (٢)$ بقسمة (١) على (٢)

$$\frac{ا ر}{ا(ر^{٢} - ١)} = \frac{٦}{٩} \Leftarrow \frac{ر}{(ر^{٢} - ١)} = \frac{٢}{٣}$$

$٣ر = ٢ر^{٢} - ٢$ ، $٢ر^{٢} - ٣ر - ٢ = ٠$

$(٢ر + ١)(ر - ٢) = ٠$

$ر = -\frac{١}{٢}$ (مرفوض) ، $ر = ٢$ ∴ $ا = \frac{٦}{٢} = ٣$

المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

$$جـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$$

(١٦) $ا ر^{٣} = ٤ ا ر^{٥} \Leftarrow ٤ر^{٢} = ١ \Leftarrow ر^{٢} = \frac{١}{٤} \leftarrow ①$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = \frac{-١}{٢}$ مرفوض

$$٩٣ = \frac{ا(ر^{٥} - ١)}{ر - ١}$$

$\Leftarrow ٩٣ر - ٩٣ = ا(ر^{٥} - ١) \leftarrow ②$

بالتعويض فى ② $\Leftarrow ٩٣ \times \frac{١}{٢} - ٩٣ = ا\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} - ١\right)$

$\frac{-٩٣}{٢} = \frac{-٣١}{٣٢} ا$ ∴ $ا = \frac{-٩٣}{٢} \times \frac{٣٢}{-٣١}$ ∴ $ا = ٤٨$

∴ المتتابعة هى (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...)

(١٧) $\frac{ا(ر^{٤} - ١)}{ر - ١} = ٤٥ \leftarrow ①$ ، $ا ر^{٥} - ا ر = ٩٠$

∴ $ا ر (ر^{٤} - ١) = ٩٠ \leftarrow ②$ بقسمة ② على ①

∴ $ر(ر - ١) = ٢$ ∴ $ر^{٢} - ر - ٢ = ٠$

∴ $(ر - ٢)(ر + ١) = ٠$ ∴ $ر = ٢$ والآخر مرفوض

بالتعويض فى ②

∴ $ا \times ٢(١٦ - ١) = ٩٠$ ∴ $ا = ٣$

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

(١٨) $ا = ٣ \Leftarrow ح_{ن+١} = ٢ ح_{ن} \Leftarrow \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = ٢$

∴ $ر = ٢ \Leftarrow جـ_{ن} = \frac{ا(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$$∴ جـ_{٦} = \frac{٣(٢^{٦} - ١)}{٢ - ١} = ١٨٩$$

(١٩) $ح_{ن} = ٣^{ن-١}$ ، $ا = ح_{١} = ٣^{٣} = ٢٧$ ، $ح_{٥} = ٨١$

$ل = ح_{١١} = ٣^{٩} = ١٩٦٨٣$ ∴ $ر = ٣$

$$جـ_{ن} = \frac{ل ر - ا}{ر - ١} = \frac{١٩٦٨٣ \times ٣ - ٢٧}{٣ - ١} = ٢٩٥١١$$

(٢٠) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{١٠ \times ٢^{ن+١-٢}}{١٠ \times ٢^{ن-٢}} = ٢$ = مقدار ثابت

∴ $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية

$ا = ح_{١} = ١٠ \times (٢)^{١-٢} = ٥$ ، $ر = ٢$

$جـ_{ن} = \frac{ا(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $\frac{٥(٢^{ن} - ١)}{٢ - ١} = ٢٥٥٥$

$٢^{ن} = \frac{٢٥٥٥}{٥} + ١ = ٥١٢$

$٢^{ن} = ٢^{٩}$ ∴ $ن = ٩$

(٢١) بوضع ن = ١ ∴ $جـ_{١} = ١٢٨ - ٢^{٧-١} = ٦٤$ ∴ $ح_{١} = ٦٤$

بوضع ن = ٢ ∴ $جـ_{٢} = ١٢٨ - ٢^{٧-٢} = ٩٦$

∵ $ح_{١} + ح_{٢} = جـ_{٢}$ ∴ $٦٤ + ح_{٢} = ٩٦$ ∴ $ح_{٢} = ٣٢$

بوضع ن = ٣ ∴ $جـ_{٣} = ١٢٨ - ٢^{٧-٣} = ١١٢$

∵ $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} = جـ_{٣}$

∴ $ح_{٣} = ١١٢ - ٩٦ = ١٦$

∴ المتتابعة هى (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) ،

$ح_{٧} = ا ر^{٦} = ٦٤\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = ١$

(٢٢) $جـ_{٥} = \frac{ا(ر^{٥} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $\frac{ا(ر^{٥} - ١)}{ر - ١} = ٧,٧٥ \leftarrow (١)$

$جـ_{٥} = \frac{ح_{٦}(ر^{٥} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $\frac{ا ر^{٥}(ر^{٥} - ١)}{ر - ١} = ٢٤٨ \leftarrow (٢)$

بقسمة (٢) على (١) ∴ $ر^{٥} = \frac{٢٤٨}{٧,٧٥} = ٣٢$ ∴ $ر = ٢$

من (١) ∴ $ا = \frac{١}{٤}$ ∴ المتتابعة هى $(\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، ١ ، ...)$

(٢٣) $جـ_{ن} = \frac{ا(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} \Leftarrow ٦٢ = \frac{ا(٢^{٥} - ١)}{٢ - ١}$

$٦٢ = ٣١ ا$ ∴ $ا = ٢$

∴ الحد الذى تبدأ به هو $ح_{١}$

(٢٤) $ح_1 = 2 \times 3^{0} = 2$

$ح_2 = 2 \times 3^{2-1} = 6$ ، $ح_3 = 2 \times 3^{3-1} = 18$

∴ المتتابعة هي (٢، ٦، ١٨، ...)

$جـ_ن = \frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1}$ ∴ $\frac{2(3^{ن}-1)}{3-1} > 300$

∴ $3^{ن} - 1 > 300$ ، $3^{ن} > 301$

$ن \, لو 3 > لو 301$ ∴ $ن > \frac{لو 301}{لو 3}$

∴ $ن > 5.19$ ∴ $ن = 6$

---

(٢٥) $جـ_ن = 121\frac{4}{9}$ ، $أ = 81$ ، $ل = \frac{1}{9}$

$جـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر-1}$ ∴ $\frac{\frac{1}{9}ر - 81}{ر-1} = \frac{1093}{9}$

$\frac{ر - 729}{9(ر-1)} = \frac{1093}{9}$

$1093 ر - 1093 = ر - 729$

$1092 ر = 364 \Leftarrow ر = \frac{1}{3}$

$ح_ن = أ ر^{ن-1}$ ∴ $\frac{1}{9} = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{ن-1}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{ن-1} = \frac{1}{729} \Leftarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{ن-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6}$

$ن - 1 = 6 \Leftarrow ن = 7$

عدد الحدود = ٧ حدود

---

(٢٦) $جـ_5 = \frac{أ(ر^{5}-1)}{ر-1} = 242$ ← ①

$جـ_5 = \frac{أر(ر^{5}-1)}{ر-1} = 726$ ← ②

بقسمة ② على ①

$\frac{أر(ر^{5}-1)}{ر-1} \times \frac{ر-1}{أ(ر^{5}-1)} = \frac{726}{242} = 3$

∴ $ر = 3$ ∴ $أ = 2$

∴ المتتابعة هي (٢، ٦، ١٨، ...، ٤٨٦)

---

(٢٧) $أ + ب = 68 \Leftarrow ب = 68 - أ$ ← ①

$أ ب = 256$ بالتعويض من ← ②

$أ^{2} - 68 أ + 256 = 0 \Leftarrow (أ-4)(أ-64) = صفر$

$أ = 4$ ، $ب = 64$ أو $أ = 64$ ، $ب = 4$ مرفوض

∴ العددان هما ٤ ، ٦٤

المتتابعة هي (٤، ٨، ١٦، ...)

$جـ_6 = \frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1} = \frac{4(2^{6}-1)}{2-1} \Leftarrow جـ_6 = 252$

---

(٢٨) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{2 \times 3^{-ن-1}}{2 \times 3^{-ن}} = \frac{1}{3}$ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية

∵ $|ر| = |\frac{1}{3}| < 1$

∴ يمكن جمع عدد لا نهائي من الحدود

وبوضع ن = ١ في الحد العام ⇐ $أ = \frac{2}{3}$

$جـ_\infty = \frac{أ}{1-ر} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

---

(٢٩) $ر = \frac{2}{3}$ ، $جـ_\infty = 6 \Leftarrow 6 = \frac{أ}{1-\frac{2}{3}}$ ∴ $أ = 2$

∴ المتتابعة هي (٢، $\frac{4}{3}$، $\frac{8}{9}$، ...)

---

(٣٠) $جـ_\infty = \frac{أ}{1-ر}$ ∴ $\frac{أ}{1-ر} = 48$ (١)

$أ ر = 12$ (٢) بقسمة (١) على (٢)

$\frac{أ}{1-ر} \times \frac{1}{أر} = \frac{48}{12} = 4$

$\frac{1}{ر - ر^{2}} = 4 \Leftarrow 1 = 4ر - 4ر^{2}$

$4ر^{2} - 4ر + 1 = 0$

$(2ر - 1)(2ر - 1) = 0$

∴ $ر = \frac{1}{2}$ بالتعويض في (٢)

$أ \times \frac{1}{2} = 12$ ∴ $أ = 24$

المتتابعة هي (٢٤، ١٢، ٦، ...)

---

(٣١) $ح_1 + ح_2 = 16$ ∴ $أ + أ ر = 16$

$أ(1 + ر) = 16$ ← (١) ، $جـ_\infty = 25$

$\frac{أ}{1-ر} = 25$ ← (٢) بقسمة (١) على (٢)

$(1 - ر)(1 + ر) = \frac{16}{25}$

$1 - ر^{2} = \frac{16}{25} \Leftarrow ر^{2} = \frac{9}{25}$

$ر = \pm \frac{3}{5}$ ، $أ = 10$ ، $أ = 40$

∴ المتتابعة هي (١٠، ٦، $\frac{18}{5}$، ...) أو (٤٠، −٢٤، $\frac{72}{5}$، ...)

---

(٣٢) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{1}{2}$ ∴ المتتابعة هندسية أساسها = $\frac{1}{2}$

∵ $ر = \frac{1}{2}$ ∴ يمكن جمع عدد غير منته من حدودها

$جـ_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

٣٣ $ا ر^{٢} = ٣$ ∴ $ا ر^{٧} = \frac{١}{٨١}$

بحل المعادلتين ∴ $ر^{٥} = \frac{١}{٢٤٣} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$

بالتعويض في إحدى المعادلتين ∴ $ا = ٢٧$

∴ المتتابعة هي (٢٧، ٩، ٣، ...)

∵ $|ر| = \frac{١}{٣} < ١$ يمكن جمع عدد غير منته من حدود المتتابعة

$هـ_{\infty} = \frac{ا}{١ - ر} = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = ٤٠,٥$

---

٣٤ $ح_{١} - ح_{٢} = ٣٠$ ∴ $ا - ا ر = ٣٠$

$ا(١ - ر) = ٣٠ \leftarrow (١)$ ∵ $هـ_{\infty} = \frac{١٣٥}{٢}$

∴ $\frac{ا}{١ - ر} = \frac{١٣٥}{٢} \leftarrow (٢)$ بقسمة (١) على (٢)

$(١ - ر)^{٢} = \frac{٤}{٩}$ ∴ $١ - ر = \pm \frac{٢}{٣}$

$١ - ر = \frac{٢}{٣}$ أو $١ - ر = -\frac{٢}{٣}$

$ر = \frac{١}{٣}$ ، $ر = \frac{٥}{٣}$ (مرفوض)

بالتعويض في (١) ∴ $ا = ٤٥$

المتتابعة هي (٤٥، ١٥، ٥، ...)

---

٣٥ $ح_{١} + ح_{٤} = ٧٠$ ∴ $ا + ا ر^{٣} = ٧٠$

$ا(١ + ر^{٣}) = ٧٠ \leftarrow (١)$

$ح_{٢} + ح_{٣} = ٦٠$ ∴ $ا ر + ا ر^{٢} = ٦٠$

$ا ر(١ + ر) = ٦٠ \leftarrow (٢)$

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{٧٠}{٦٠} = \frac{ا(١ + ر^{٣})}{ا ر(١ + ر)}$ ∴ $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})}{ر(١ + ر)} = \frac{٧}{٦}$

$\frac{١ - ر + ر^{٢}}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$٦ - ٦ر + ٦ر^{٢} = ٧ر$ ∴ $٦ر^{٢} - ١٣ر + ٦ = ٠$

$(٢ر - ٣)(٣ر - ٢) = ٠$

$ر = \frac{٣}{٢}$ ، $ر = \frac{٢}{٣}$ ∴ $ا = ١٦$ ، $ا = ٥٤$

المتتابعة الأولى (١٦، ٢٤، ٣٦، ...)

المتتابعة الثانية (٥٤، ٣٦، ٢٤، ...)

∴ توجد متتابعتان

والمتتابعة الثانية يمكن جمع حدودها إلى ∞ لأن ر < ١

$هـ_{\infty} = \frac{٥٤}{١ - \frac{٢}{٣}} = ١٦٢$

---

٣٦ $ح_{٤} = ا ر^{٣} = ١ \leftarrow ①$

$ح_{٩} = ا ر^{٨} = \frac{١}{٢٤٣} \leftarrow ②$

بقسمة ② على ① ∴ $ر^{٥} = \frac{١}{٢٤٣} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$ بالتعويض في ① ∴ $ا = ٢٧$ ،

المتتابعة هي (٢٧، ٩، ٣، ....)،

$هـ_{\infty} = \frac{ا}{١ - ر} = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٨١}{٢} = ٤٠\frac{١}{٢}$

---

٣٧ $ح_{٢} - ح_{٦} = ٤٥$ ∴ $ا ر - ا ر^{٥} = ٤٥$

$ا ر(١ - ر^{٤}) = ٤٥ \leftarrow (١)$

$هـ_{٤} = ١٨٠ \Leftarrow \frac{ا(١ - ر^{٤})}{١ - ر} = ١٨٠ \leftarrow (٢)$

بقسمة (٢) على (١) ∴ $\frac{١}{(١ - ر) \times ر} = \frac{١٨٠}{٤٥} = ٤$

$٤ر^{٢} - ٤ر + ١ = ٠$ ∴ $(٢ر - ١)(٢ر - ١) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ ، $ا = ٩٦$

المتتابعة هي: (٩٦، ٤٨، ٢٤، ...)

∵ ر < ١ ∴ يمكن إيجاد $هـ_{\infty}$

$هـ_{\infty} = \frac{٩٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٩٢$

---

٣٨ $ا + ا ر^{٣} = ٣٨$ ∴ $ا(١ + ر^{٣}) = ٣٨ \leftarrow ①$

$ا ر + ا ر^{٢} = -١٢$ ∴ $ا ر(١ + ر) = -١٢ \leftarrow ②$

بقسمة ② على ①

$\frac{ا ر(١ + ر)}{ا(١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})} = \frac{-١٢}{٣٨}$

$\frac{ر}{١ - ر + ر^{٢}} = \frac{-٦}{١٩}$

$١٩ر = -٦ + ٦ر - ٦ر^{٢} \Leftarrow ٦ر^{٢} + ١٣ر + ٦ = ٠$

$(٣ر + ٢)(٢ر + ٣) = ٠$

∴ $ر = \frac{-٢}{٣}$ أو $ر = \frac{-٣}{٢}$ مرفوض

∴ $ا = ٥٤$ ← المتتابعة هي (٥٤، −٣٦، ٢٤، ...)

$هـ_{\infty} = \frac{٥٤}{١ + \frac{٢}{٣}} = \frac{١٦٢}{٥} = ٣٢,٤$

---

٣٩ ∵ $هـ_{\infty} = \frac{ا}{١ - ر}$ ∴ $\frac{ا ر}{١ - ر} = ١٠٠ \leftarrow ①$

$ا ر - ا ر^{٢} = ٤$ ∴ $ا ر(١ - ر) = ٤ \leftarrow ②$

بالقسمة ① على ②

$\therefore \frac{ر^{٢}}{\text{أ}ر(١-ر)^{٢}} = ٢٥$

$\therefore ٢٥(١-ر)^{٢} = ١$ $\qquad$ $\therefore ١ - ر = \pm \frac{١}{٥}$

$\therefore ر = \frac{٤}{٥}$ أو $ر = \frac{٦}{٥}$ $\qquad$ (مرفوض لأن $|ر| > ١$)

بالتعويض فى المعادلة الثانية

$\therefore \text{أ} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} = ٤$ $\qquad$ $\therefore \text{أ} = ٢٥$

∴ المتتابعة هى (٢٥ ، ٢٠ ، ١٦ ، ...)

---

(٤٠) $\frac{\text{أ}}{١-ر} = ٤\text{أ}(١-ر)$ $\qquad$ $\therefore (١-ر)^{٢} = \frac{١}{٤}$

$ر^{٢} - ٢ر + ١ = \frac{١}{٤}$ $\qquad$ $\therefore ٤ر^{٢} - ٨ر + ٤ = ١$

$٤ر^{٢} - ٨ر + ٣ = ٠$ $\Leftarrow$ $(٢ر - ١)(٢ر - ٣) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ ، $ر = \frac{٣}{٢}$ مرفوض

$\therefore \text{أ} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = ١٢$ $\qquad$ $\therefore \text{أ} = ٩٦$

∴ المتتابعة هى (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

---

(٤١) $\frac{\text{أ}ر^{٢} + \text{أ}ر^{٤}}{٢} = ٦٠$

$\therefore \text{أ}ر^{٢} + \text{أ}ر^{٤} = ١٢٠$

$\therefore \text{أ}ر^{٢}(١ + ر^{٢}) = ١٢٠ \leftarrow$ ① ،

$\text{أ}ر^{٢} \times \text{أ}ر^{٤} = (٤٨)^{٢}$ $\qquad$ $\therefore \text{أ}^{٢}ر^{٦} = (٤٨)^{٢}$

$\text{أ}ر^{٣} = ٤٨ \leftarrow$ ② $\qquad$ بقسمة ① على ②

$\therefore \frac{\text{أ}ر^{٢}(١+ر^{٢})}{\text{أ}ر^{٣}} = \frac{١٢٠}{٤٨} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore ٢ + ٢ر^{٢} = ٥ر$ $\qquad$ $\therefore ٢ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠$

$\therefore (٢ر - ١)(ر - ٢) = ٠$

$\therefore ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = ٢$ (مرفوض)

من ② $\therefore \text{أ} \times \frac{١}{٨} = ٤٨$ $\qquad$ $\therefore \text{أ} = ٣٨٤$

∴ المتتابعة هى (٣٨٤ ، ١٩٢ ، ٩٦ ، ...)

$هـ_{\infty} = \frac{٣٨٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٧٦٨$

---

(٤٢) فى المتتابعة الحسابية $\quad ٢س = ١ + ص \leftarrow$ ①

فى المتتابعة الهندسية $\quad ص^{٢} = ١ \times س$

$\therefore ص^{٢} = س \leftarrow$ ②

بالتعويض من ② فى ① $\qquad$ $\therefore ٢ص^{٢} = ١ + ص$

$\therefore ٢ص^{٢} - ص - ١ = ٠$ $\qquad$ $\therefore (٢ص + ١)(ص - ١) = ٠$

$\therefore ص = ١$ مرفوض $\qquad$ $\therefore ص = \frac{-١}{٢}$ ، $س = \frac{١}{٤}$

وفى المتتابعة الهندسية $ر = ص = \frac{-١}{٢}$

$\therefore |ر| < ١$

∴ يمكن جمع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية

$\therefore هـ_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١-ر} = \frac{١}{١+\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}$

---

(٤٣) $ح_{١} = ٢هـ_{\infty}$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ} = \frac{٢\text{أ}ر}{١-ر}$

$١ - ر = ٢ر$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $ر = \frac{١}{٣}$

$ح_{٤} = ٣$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ}ر^{٣} = ٣$

$\text{أ} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} = ٣$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ} = ٨١$

المتتابعة هي (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

---

(٤٤) $ح_{١} = هـ_{\infty}$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ} = \frac{\text{أ}ر}{١-ر}$

$١ - ر = ر$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $ر = \frac{١}{٢}$

$ح_{١} + ح_{٢} = ٩$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ} + \text{أ}ر = ٩$

$\text{أ} + \frac{١}{٢}\text{أ} = ٩$ $\qquad \Leftarrow \qquad$ $\text{أ} = ٦$

المتتابعة هي (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

---

(٤٥) $ح_{١} = ١٦ \Leftarrow \text{أ} = ١٦ \leftarrow$ ① ، $ح_{٢} \times ح_{٤} = ١٦$

$\text{أ}ر \times \text{أ}ر^{٣} = ١٦ \Leftarrow \text{أ}^{٢}ر^{٤} = ١٦ \Leftarrow (١٦)^{٢} \times ر^{٤} = ١٦$ ·

$١٦ر^{٤} = ١ \Leftarrow ر^{٤} = \frac{١}{١٦}$ $\therefore ر = \frac{١}{٢}$

الحدود موجبة $\qquad$ ∴ المتتابعة هى (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

$هـ_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١-ر} = \frac{١٦}{١-\frac{١}{٢}} = ٣٢$

---

(٤٦) $هـ_{\infty} = ١٦ \Leftarrow \frac{\text{أ}}{١-ر} = ١٦ \leftarrow$ ①

$\frac{ح_{٤}}{ح_{٢}} = \frac{١}{٤} \Leftarrow \frac{\text{أ}ر^{٣}}{\text{أ}ر} = \frac{١}{٤} \Leftarrow ر = \frac{١}{٢} \leftarrow$ ②

بالتعويض فى ① $\Leftarrow \frac{\text{أ}}{١-\frac{١}{٢}} = ١٦ \Leftarrow ٢\text{أ} = ١٦$

$\therefore \text{أ} = ٨$ $\qquad$ المتتابعة هى (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

---

(٤٧) $\text{أ}ر = ٥$ ، $\frac{\text{أ}ر^{٦}}{\text{أ}ر^{٣}} = \frac{١}{٢٧} \Leftarrow ر = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{أ} = ١٥$ $\qquad$ المتتابعة هى (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...)

$\because ر < ١$ $\qquad$ ∴ يمكن الجمع إلى ∞

$هـ_{\infty} = \frac{أ}{١-ر} = \frac{١٥}{١-\frac{١}{٣}} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢,٥$

٤٨ $٢ب = ٤ + هـ$ ← ① $\Leftarrow هـ = ٢ب - ٤$

$(ب + ٣)^٢ = ١٠هـ \Leftarrow ب^٢ + ٦ب + ٩ = ١٠(٢ب - ٤)$

$ب^٢ - ١٤ب + ٤٩ = ٠ \Leftarrow (ب - ٧)(ب - ٧) = ٠$

$\therefore ب = ٧ \Leftarrow هـ = ١٠$

∴ المتتابعة هي (٥٠، ١٠، ٢، ...)

$هـ_{\infty} = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٥٠}{١-\frac{١}{٥}} = \frac{١٢٥}{٢} = ٦٢\frac{١}{٢}$

٤٩ ① $٠,\overline{٧} = ٠,٧٧٧٧$

$= \frac{٧}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٧}{١٠٠٠} + ...\infty$

$= \frac{٧}{١٠}(١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + ...\infty)$

$= \frac{٧}{١٠}\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠}}\right) = \frac{٧}{٩}$ $\therefore ٠,\overline{٧} = \frac{٧}{٩}$

② $٠,٢\overline{٤} = ٠,٢٤٤٤$

$= ٠,٢ + ٠,٠٤ + ٠,٠٠٤ + ٠,٠٠٠٤ + ...\infty$

$= ٠,٢ + ٠,٠٤(١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + ...\infty)$

$= ٠,٢ + ٠,٠٤\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠}}\right) = \frac{١١}{٤٥}$ $\therefore ٠,٢\overline{٤} = \frac{١١}{٤٥}$

③ $٠,٨\overline{٦٣} = ٠,٨٦٣٦٣٦٣$

$= ٠,٨ + ٠,٠٦٣ + ٠,٠٠٠٦٣ + ...\infty$

$= ٠,٨ + ٠,٠٦٣(١ + \frac{١}{١٠٠} + ...\infty)$

$= ٠,٨ + ٠,٠٦٣\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠٠}}\right)$

$= ٠,٨ + \frac{٦٣}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩} = \frac{١٩}{٢٢}$ $\therefore ٠,٨\overline{٦٣} = \frac{١٩}{٢٢}$

④ $٠,\overline{٦} = ٠,٦٦٦٦٦$

$= ٠,٦ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + ...\infty$

$= ٠,٦\left[١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + ...\infty\right]$

$= ٠,٦\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠}}\right) = \frac{٢}{٣}$ $\therefore ٠,\overline{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑤ $٠,\overline{٦٣} = ٠,٦٣٦٣٦٣$

$= ٠,٦٣ + ٠,٠٠٦٣ + ٠,٠٠٠٠٦٣ + ...\infty$

$= ٠,٦٣(١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + ...\infty)$

$= ٠,٦٣\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠٠}}\right) = \frac{٧}{١١}$ $\therefore ٠,\overline{٦٣} = \frac{٧}{١١}$

⑥ $٠,٤\overline{٦} = ٠,٤ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + ...\infty$

$= ٠,٤ + ٠,٠٦(١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + ...\infty)$

$= ٠,٤ + ٠,٠٦ \times \left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠}}\right) = \frac{٧}{١٥}$ $\therefore ٠,٤\overline{٦} = \frac{٧}{١٥}$

⑦ $٠,٦\overline{٥٤} = ٠,٦٥٤٥٤٥٤$

$= ٠,٦ + ٠,٠٥٤ + ٠,٠٠٠٥٤ + ...\infty$

$= ٠,٦ + ٠,٠٥٤(١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + ...\infty)$

$= ٠,٦ + ٠,٠٥٤\left(\frac{١}{١-\frac{١}{١٠٠}}\right) = \frac{٣٦}{٥٥}$ $\therefore ٠,٦\overline{٥٤} = \frac{٣٦}{٥٥}$

٥٠ $أ = ٧٢٠٠$ ، $ر = ١,٠٦$

$ح_{٧} = أر^{٦} = ٧٢٠٠ \times (١,٠٦)^{٦} = ١٠٢١٣,٣٣٧٦١$ جنيهاً

$جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$

$\Leftarrow جـ_{٧} = \frac{٧٢٠٠[(١,٠٦)^{٧}-١]}{١,٠٦-١} = ٦٠٤٣٥,٦٣١$ جنيهاً

٥١ ① ٢٥٤ ② $\frac{٣٦٤}{٨١}$ ③ ٧٦٥ ④ ٣٠٦٠ ⑤ ٤٠ ⑥ ٦٤ ⑦ ٩ ⑧ $\frac{٧}{٨}$ ⑨ $\frac{١}{٢}$ ⑩ $\frac{٣}{٢}$ ⑪ $\frac{٤٥}{٢}$

٥٢ ① ١٦ ② $\frac{٧}{٩}$ ③ $\frac{٨}{٣٣}$ ④ $\frac{١}{٦}$ ⑤ $\frac{ر^{٢}}{١-ر}$ ⑥ $\frac{١}{١-ر^{٢}}$ ⑦ ١

⑧ $(م-١)^{٢} = (٢م+١)(م-٣)$

$م^{٢} - ٢م + ١ = ٢م^{٢} - ٥م - ٣$

$م^{٢} - ٣م - ٤ =$ صفر

$(م-٤)(م+١) =$ صفر

$م = ٤$ أو $م = -١$ مرفوض

∴ م.هـ (٩، ٣، ١، ....) $\therefore ر = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

$هـ_{\infty} = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٩}{١-\frac{١}{٣}} = \frac{٢٧}{٢}$

⑨ $س = جـ_{ن}$

$س = \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$ ← (١)

$ص = أ \times أر \times أر^{٢} \times أر^{٣} \times ... أر^{ن-١}$

$ص = أ^ن ر^{(١ + ٢ + ٣ + \dots + ن - ١)} = أ^ن ر^{\frac{ن-١}{٢}[١ + ن - ١]}$

$ص = (أ)^ن (ر)^{\frac{ن(ن-١)}{٢}}$ ← (٢)

مقلوبات م.هـ $\left(\frac{١}{أ} ، \frac{١}{أر} ، \frac{١}{أر^٢} ، \dots\right)$

$أ' = \frac{١}{أ}$ ، $ر' = \frac{١}{ر}$

$\therefore ع = \frac{\frac{١}{أ}\left[١ - \left(\frac{١}{ر}\right)^ن\right]}{١ - \frac{١}{ر}} = \frac{\frac{١}{أ}\left[١ - \frac{١}{ر^ن}\right]}{١ - \frac{١}{ر}}$

$= \frac{ر^ن - ١}{أ(ر^ن - ر^{ن-١})}$

$ع = \frac{ر^ن - ١}{أر^{ن-١}(ر - ١)}$ ← (٣)

$\left(\frac{ح}{ع}\right)^ن = \left[\frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \times \frac{أر^{ن-١}(ر - ١)}{(ر^ن - ١)}\right]^ن$

$= (أ^٢ ر^{ن-١})^ن = أ^{٢ن} ر^{ن(ن-١)}$

$\therefore \left(\frac{ح}{ع}\right)^ن = \left(أ^ن ر^{\frac{ن(ن-١)}{٢}}\right)^٢ = ص^٢$

---

(١٠) أولاً: الحدان $ح_١ = س$ ، $ح_٤ = ص = س ر^٣$

الوسطان الهندسيان $س ر$ ، $س ر^٢$

$\therefore س ر + س ر^٢ = ١٨$

$س ر (١ + ر) = ١٨$ ← (١)

ثانياً: الوسطان الحسابيان $س + د$ ، $ص - د$

$س + د + ص - د = ٢٧$

$س + ص = ٢٧$ $\qquad \therefore س + س ر^٣ = ٢٧$

$س(١ + ر^٣) = ٢٧$ ← (٢) بالقسمة

$\frac{س ر(١ + ر)}{س(١ + ر)(ر^٢ - ر + ١)} = \frac{١٨}{٢٧}$

$\frac{ر}{ر^٢ - ر + ١} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٢ر^٢ - ٢ر + ٢ = ٣ر$

$٢ر^٢ - ٥ر + ٢ = \text{صفر} \Leftarrow (٢ر - ١)(ر - ٢) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$	$ر = ٢$
$س = ٢٤$	$س = ٣$
$ص = ٣$	$ص = ٢٤$

$\therefore س + ص = ٣ + ٢٤ = ٢٧$

---

(٥٣) $\because (ح_ن)$ متتابعة هندسية

$(أ ، أر ، أر^٢ ، أر^٣ ، \dots)$

$ح'_ن = (لو_ه أ ، لو_ه أر ، لو_ه أر^٢ ، \dots)$

$= (لو_ه أ ، لو_ه أ + لو_ه ر ، لو_ه أ + ٢ لو_ه ر ، \dots)$

متتابعة حسابية أساسها $لو_ه ر$

لأن $ح_{ن+١} - ح_ن =$ مقدار ثابت $لو_ه ر$

$ح_ن = (١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠ ، \dots)$

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

$\Leftarrow جـ_{٢٥} = \frac{١٠(٥^{٢٥} - ١)}{٥ - ١} = ٧٫٤٥ \times ١٠^{١٧}$

$ح'_ن = (لو_٥ ١٠ ، لو_٥ ١٠ + ١ ، لو_٥ ١٠ + ٢ ، \dots)$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د] = \frac{٢٥}{٢}[٢ لو_٥ ١٠ + ٢٤]$

$= ٢٥ لو_٥ ١٠ + ٣٠٠ = ٣٣٥٫٨$

---

(٥٤) $جـ_{١٨} - جـ_{١٢} = ٢١$

$\frac{أ(ر^{١٨} - ١)}{ر - ١} - \frac{أ(ر^{١٢} - ١)}{ر - ١} = ٢١$

$\frac{أ(ر^{١٨} - ١) - أ(ر^{١٢} - ١)}{ر - ١} = ٢١$

$\frac{أر^{١٨} - أ - أر^{١٢} + أ}{ر - ١} = ٢١$

$\frac{أر^{١٢}(ر^٦ - ١)}{ر - ١} = ٢١$ ← ① $\Leftarrow جـ_٦ = \frac{أ(ر^٦ - ١)}{ر - ١}$

$\frac{أ(ر^٦ - ١)}{ر - ١} = \frac{٢١}{ر^{١٢}} = ٢١ ر^{-١٢}$

---

(٥٥) $ح_١ = ٢ \Leftarrow أ = ٢$ ← ①

$ح_ن = ٢٥٦ \Leftarrow أر^{ن-١} = ٢٥٦ \Leftarrow ٢ \times ر^{ن-١} = ٢٥٦$

$\therefore ر^{ن-١} = ١٢٨$ ← ②

$جـ_ن = \frac{أ[ر^ن - ١]}{ر - ١} \Leftarrow ٥١٠ = \frac{٢[ر^ن - ١]}{ر - ١}$

$٢٥٥ = \frac{[ر^ن - ١]}{ر - ١}$ ← ③

من ② $ر^ن = ١٢٨ ر$ ⇐ بالتعويض في ③

$\frac{٢٥٥}{١} = \frac{١٢٨ر - ١}{ر - ١} \Leftarrow ٢٥٥ر - ٢٥٥ = ١٢٨ر - ١$

$٢٥٥ر - ١٢٨ر = -١ + ٢٥٥ \Leftarrow ١٢٧ر = ٢٥٤ \quad \therefore ر = ٢$

بالتعويض فى ② ⇐ $2^{ن-1} = 128 = 2^{7}$

$ن - 1 = 7$ ∴ $ن = 8$

(56) $\left(\left(\frac{3}{11}\right), \left(\frac{3}{11}\right)^{3}, \left(\frac{3}{11}\right)^{5}, \ldots\right)$

$أ = \frac{3}{11}$ ، $ر = \left(\frac{3}{11}\right)^{2}$ ⇐ $حـ_{\infty} = \frac{أ}{1-ر} = \frac{\frac{3}{11}}{1-\left(\frac{3}{11}\right)^{2}}$

$= \frac{\frac{3}{11}}{1-\frac{9}{121}} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{112}{121}} = \frac{3}{11} \times \frac{121}{112} = \frac{33}{112}$

(57) المتتابعة هى $(أ ، أ ر ، أ ر^{2} ، \ldots)$

متتابعة المقلوب هى $\left(\frac{1}{أ} ، \frac{1}{أ ر} ، \frac{1}{أ ر^{2}} ، \ldots\right)$

∵ $حـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1}$

مجموع المقلوبات $حـ_{ن} = \frac{\frac{1}{أ}\left[1-\frac{1}{ر^{ن}}\right]}{1-\frac{1}{ر}} = \frac{\frac{1}{أ}\left[\frac{ر^{ن}-1}{ر^{ن}}\right]}{\frac{ر-1}{ر}}$

$= \frac{ر^{ن}-1}{ر-1} \times \frac{ر}{أ ر^{ن}} = \frac{حـ_{ن}}{أ} \times \frac{1}{أ ر^{ن-1}} = \frac{حـ_{ن}}{أ^{2} ر^{ن-1}}$

(58) $\left(1 ، \frac{1}{2} ، \frac{1}{4} ، \ldots\right)$

$حـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}\right]$ (1)

$حـ'_{ن} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{ن}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$ ∵ ن عدد زوجى

$= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{ن}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}\right] = \frac{1}{3} \times حـ_{ن}$

∴ $حـ'_{ن} = \frac{1}{3} حـ_{ن}$

$ح_{ن} = أ ر^{ن-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

$ح'_{ن} = أ' ر'^{ن-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

$\frac{ح'_{ن}}{ح_{ن}} = (-1)^{ن-1} = -1$

تمارين (8) على مبدأ العد

(1) ① 25 ② $ح_{ن} = 2ن$ ③ -3 ④ 25

⑤ $ح_{4} = 3^{4-1} = 27 = أ$ ، $ح_{5} = 3^{5-1} = 81$

$ح_{ن} = 3^{ن-1} = 19683 = ل$ ∴ $ر = 3$

$ن = 10 - 4 + 1 = 7$

$حـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{1-ر} = \frac{27 - 3 \times 19683}{1-3} = 19511$

⑥ $حـ_{\infty} = 48$ ⇐ $\frac{أ}{1-ر} = 48$

∴ $أ = 48(1-ر)$ ← ①

$ح_{2} = 12$

$أ ر = 12$ ← ②

∴ $48(1-ر) ر = 12 \div 12$

$4ر - 4ر^{2} = 1$

∴ $4ر^{2} - 4ر + 1 = 0$

$(2ر-1)(2ر-1) = 0$

∴ $ر = \frac{1}{2}$ بالتعويض فى ②

∴ $أ \times \frac{1}{2} = 12$ ∴ $أ = 24$

∴ المتتابعة هى (24 ، 12 ، 6 ، ......)

(2) عدد طرق دخول الجامعة = 3 طرق

عدد طرق الخروج من الجامعة = 2 طريقة

عدد طرق الاختيار = 3 × 2 = 6 طرق

(3) عدد طرق اختيار الوجبة = 3 طرق

عدد طرق اختيار المشروب = 3 طرق

عدد طرق الاختيار = 3 × 3 = 9 طرق

(4) عدد طرق اختيار الفطائر = 6 طرق

عدد طرق اختيار السلاطات = 4 طرق

عدد طرق اختيار المشروبات = 3 طرق

عدد طرق اختيار الوجبة = 6 × 4 × 3 = 72 طريقة

(5) عدد طرق اختيار رقم الآحاد = 2 طريقة

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 2 طريقة

عدد طرق اختيار رقم المئات = 3 طرق

عدد الطرق المختلفة = 2 × 2 × 3 = 12 طريقة

(6) ① 6 ② 125 ③ 60

(7) ① 4 × 3 × 2 × 1 ② 4 × 3 × 2 ③ 3 × 3 ④ 5 × 4 × 3 × 2 ⑤ 1 × 4 × 3 × 2 ⑥ 1 × 3 × 2

(٨) عدد الطرق = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ طريقة

(٩) عدد الطرق = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ طريقة

(١٠) عدد الطرق = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ طريقة

(١١)

الألاف	المئات	العشرات	الآحاد
١	٢	٣	١

عدد الطرق = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦ طريقة

(١٢)

الخامسة	الرابعة	الثالثة	الثانية	الأولى
٢	٣	٤	٥	٣

عدد الطرق = ٣ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ٣٦٠ طريقة

(١٣) عدد الطرق = ١ × ٣ × ٢ × ١ × ١ = ٦ طريقة

(١٤) عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ طريقة

(١٥) عدد الطرق = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

(١٦) عدد الطرق = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

(١٧) عدد طرق اختيار الحروف الأبجدية

= ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ = ١٩٦٥٦ طريقة

عدد طرق اختيار الأرقام

= ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤ طريقة

عدد طرق الاختيار الكلية

= ١٩٦٥٦ × ٥٠٤ = ٩٩٠٦٦٢٤ طريقة

(١٨) عدد البطاقات الممكن إنتاجها

= ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = ١٠٠٠٠٠ بطاقة

(١٩) عدد اختيارات الطالب الممكنة = ٦ × ٣ = ١٨ طريقة

(٢٠) عدد طرق اختيار الخانة الثالثة = ٣ طرق

حيث لا يمكن اختيار العدد ٩

عدد طرق اختيار الخانة الأولى = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الخانة الثانية = ٢ طريقة

عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ طريقة

(٢١) عدد طرق الاختيار =

١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١٠×١×١×١ = $١٠^{٨}$ طريقة

(٢٢) هناك عدد ٩ حالات لطرق توزيع للرقمين ٠ ، ٨ وهي:

عدد الحالات التي يمكن أن توزع بها العددين ٠ ، ٨ على الخانات الأربعة هي :

	آحاد	عشرات	مئات	الاف
(١)	٨	٠		
(٢)	٨		٠	
(٣)	٠	٨		
(٤)		٨	٠	
(٥)	٠		٨	
(٦)		٠	٨	
(٧)	٠			٨
(٨)		٠		٨
(٩)			٠	٨

وعند وضع الرقمين تصبح الخانة التالية لها حق اختيار ٨ أرقام بعد اختيار الرقمين ٠ ، ٨ والخانة الأخيرة لها حق اختيار ٧ أرقام بعد ملئ ٣ خانات ويكون عدد الأرقام المختلفة التي يمكن تكوينها

= ٩ (١ × ١ × ٨ × ٧) = ٥٠٤

(٢٣) في الخانة الأولى = ٦ إختيارات

في الخانة الثانية = ٣ اختيارات فقط

وذلك لأن لو كان في الخانة الأولى رقم فردي فنختار رقم زوجي والعكس

في الخانة الثالثة = ٢ أختيار

من الأرقام المخالفة للخانة الثانية

في الخانة الرابعة = ٢ اختيار

من الأرقام المخالفة للخانة الثالثة

في الخانة الخامسة = اختيار واحد فقط

عدد الطرق = ٦ × ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ٧٢ طريقة

(٢٤) الخانة الأولى = ٥ طرق

لأن العدد زوجي (الاختيارات ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨)

الخانة الثانية = ١٠ طرق ، الخانة الثالثة = ١٠ طرق

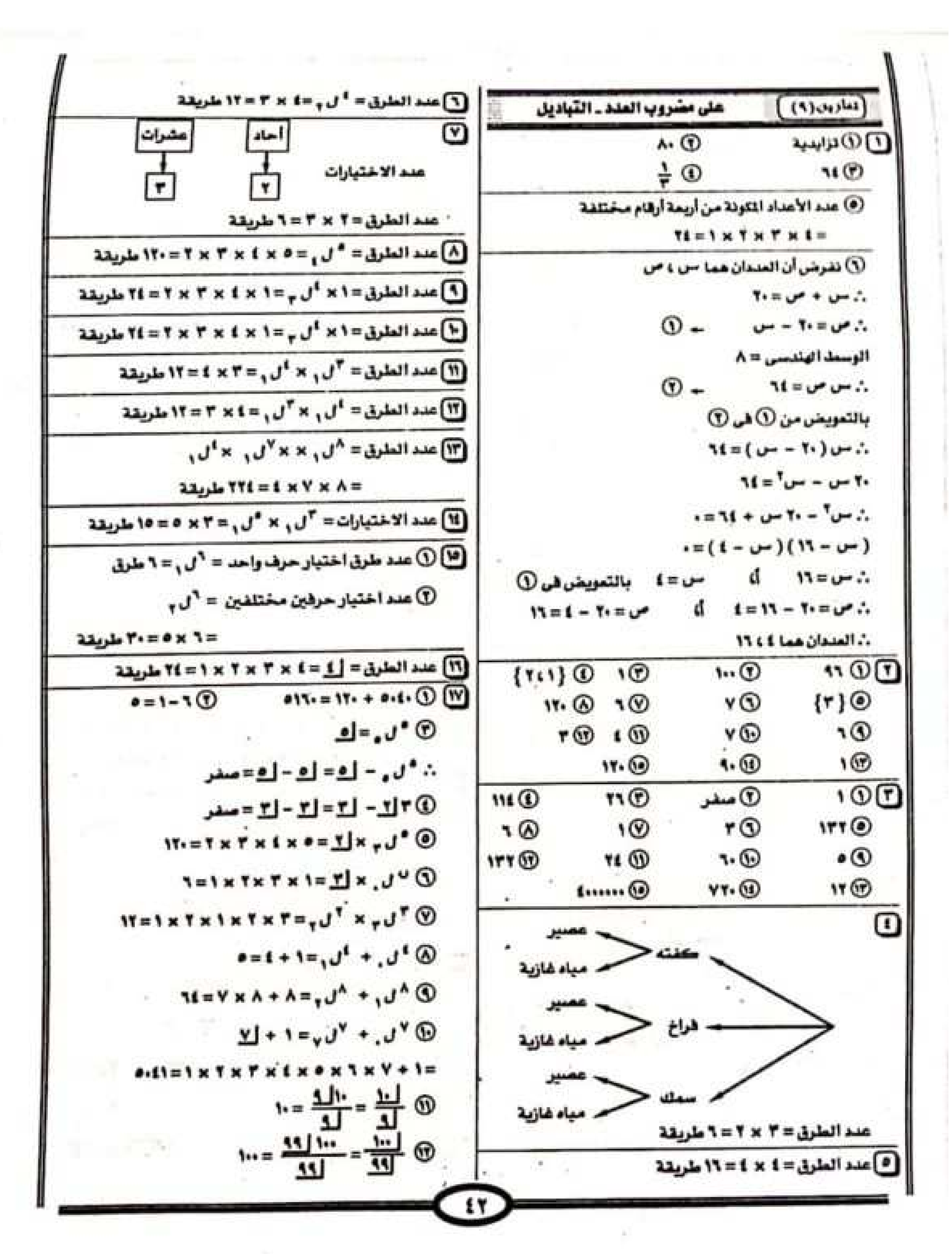
الخانة الرابعة = ٦ طرق

لأن العدد يجب أن يكون أقل من ٧٠٠٠

فالأرقام المحتملة هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

يستثني من الإعداد العدد ١٠٠٠ لأنه ليس ضمن الفترة المحددة

عدد الطرق الممكنة = ٥ × ١٠ × ١٠ × ٦ - ١ = ٢٩٩٩ طريقة



تمارين (٩) — **على مضروب العدد - التباديل**

١ ① تزايدية ② ٨٠

③ ٦٤ ④ $\frac{١}{٢}$

⑤ عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة

= ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

⑥ نفرض أن العددان هما س ، ص

∴ س + ص = ٢٠

∴ ص = ٢٠ − س ← ①

الوسط الهندسي = ٨

∴ س ص = ٦٤ ← ②

بالتعويض من ① في ②

∴ س (٢٠ − س) = ٦٤

٢٠ س − $س^{٢}$ = ٦٤

∴ $س^{٢}$ − ٢٠ س + ٦٤ = ٠

(س − ١٦) (س − ٤) = ٠

∴ س = ١٦ أ، س = ٤ بالتعويض في ①

∴ ص = ٢٠ − ١٦ = ٤ أ، ص = ٢٠ − ٤ = ١٦

∴ العددان هما ٤ ، ١٦

٢

① ٩٦	② ١٠٠	③ ١	④ {١ ، ٢}
⑤ {٣}	⑥ ٧	⑦ ٦	⑧ ١٢٠
⑨ ٦	⑩ ٧	⑪ ٤	⑫ ٣
⑬ ١	⑭ ٩٠	⑮ ١٢٠	

٣

① ١	② صفر	③ ٢٦	④ ١١٤
⑤ ١٣٢	⑥ ٣	⑦ ١	⑧ ٦
⑨ ٥	⑩ ٦٠	⑪ ٢٤	⑫ ١٣٢
⑬ ١٢	⑭ ٧٢٠	⑮ ٤٠٠٠٠٠٠	

٤

عدد الطرق = ٣ × ٢ = ٦ طريقة

٥ عدد الطرق = ٤ × ٤ = ١٦ طريقة

٦ عدد الطرق = $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

٧

عدد الاختيارات

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

٨ عدد الطرق = $^{٥}ل_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ طريقة

٩ عدد الطرق = ١ × $^{٤}ل_{٣}$ = ١ × ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ طريقة

١٠ عدد الطرق = ١ × $^{٤}ل_{٣}$ = ١ × ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ طريقة

١١ عدد الطرق = $^{٣}ل_{١}$ × $^{٤}ل_{١}$ = ٣ × ٤ = ١٢ طريقة

١٢ عدد الطرق = $^{٤}ل_{١}$ × $^{٣}ل_{١}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

١٣ عدد الطرق = $^{٨}ل_{١}$ × $^{٧}ل_{١}$ × $^{٤}ل_{١}$

= ٨ × ٧ × ٤ = ٢٢٤ طريقة

١٤ عدد الاختيارات = $^{٣}ل_{١}$ × $^{٥}ل_{١}$ = ٣ × ٥ = ١٥ طريقة

١٥ ① عدد طرق اختيار حرف واحد = $^{٦}ل_{١}$ = ٦ طرق

② عدد اختيار حرفين مختلفين = $^{٦}ل_{٢}$

= ٦ × ٥ = ٣٠ طريقة

١٦ عدد الطرق = $\lfloor\underline{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

١٧ ① ٥٠٤٠ + ١٢٠ = ٥١٦٠ ② ٦ − ١ = ٥

③ $^{٥}ل_{٥}$ = $\lfloor\underline{٥}$

∴ $^{٥}ل_{٥}$ − $\lfloor\underline{٥}$ = $\lfloor\underline{٥}$ − $\lfloor\underline{٥}$ = صفر

④ ٣ $\lfloor\underline{٢}$ − $\lfloor\underline{٣}$ = $\lfloor\underline{٣}$ − $\lfloor\underline{٣}$ = صفر

⑤ $^{٥}ل_{٣}$ × $\lfloor\underline{٢}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠

⑥ $^{ن}ل_{٠}$ × $\lfloor\underline{٣}$ = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦

⑦ $^{٣}ل_{٢}$ × $^{٢}ل_{٢}$ = ٣ × ٢ × ١ × ٢ × ١ = ١٢

⑧ $^{٤}ل_{٠}$ + $^{٤}ل_{١}$ = ١ + ٤ = ٥

⑨ $^{٨}ل_{١}$ + $^{٨}ل_{٢}$ = ٨ + ٨ × ٧ = ٦٤

⑩ $^{٧}ل_{٠}$ + $^{٧}ل_{٧}$ = ١ + $\lfloor\underline{٧}$

= ١ + ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤١

⑪ $\frac{\lfloor\underline{١٠}}{\lfloor\underline{٩}}$ = $\frac{١٠ \lfloor\underline{٩}}{\lfloor\underline{٩}}$ = ١٠

⑫ $\frac{\lfloor\underline{١٠٠}}{\lfloor\underline{٩٩}}$ = $\frac{١٠٠ \lfloor\underline{٩٩}}{\lfloor\underline{٩٩}}$ = ١٠٠

١٨ ① ⌊ن = ١

إما ن = صفر أو ن = ١

② ⌊ن = ٢٤

٢٤	١
٢٤	٢
١٢	٣
٤	٤
١	

⌊ن = ١ × ٢ × ٣ × ٤

⌊ن = ⌊٤

ن = ٤

③ ⌊ن − ٢ = ١٢٠

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

= ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥

⌊ن − ٢ = ⌊٥

ن − ٢ = ٥ ∴ ن = ٧

④ $\frac{⌊ن + ١}{⌊ن}$ = ٥ ∴ $\frac{(ن+١)\, ⌊ن}{⌊ن}$ = ٥

∴ ن + ١ = ٥ ∴ ن = ٤

⑤ $\frac{⌊ن + ١}{⌊ن − ١}$ = ٤٢ ∴ $\frac{(ن+١)\, ن\, ⌊ن − ١}{⌊ن − ١}$ = ٤٢

∴ ن (ن + ١) = ٤٢

ن^{٢} + ن − ٤٢ = ٠ ∴ (ن + ٧) (ن − ٦) = ٠

ن = − ٧ (مرفوض) ∴ ن = ٦

⑥ $^{٦}ل_{ن}$ = ١٢٠ ∴ $^{٦}ل_{ن}$ = ٦ × ٥ × ٤ = $^{٦}ل_{٣}$

∴ ن = ٣

⑦ $^{١٥}ل_{ن}$ = ٢٧٣٠ ∴ $^{١٥}ل_{ن}$ = ١٥ × ١٤ × ١٣ = $^{١٥}ل_{٣}$

∴ ن = ٣

⑧ $^{ن}ل_{٣}$ = ٧٢٠ ∴ $^{ن}ل_{٣}$ = ١٠ × ٩ × ٨

$^{ن}ل_{٣}$ = $^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن = ١٠

⑨ $^{ن+٢}ل_{٢}$ = ٢١٠ ∴ $^{ن+٢}ل_{٢}$ = ١٥ × ١٤ = $^{١٥}ل_{٢}$

ن + ٢ = ١٥ ∴ ن = ١٣

⑩ $^{ن}ل_{٠}$ + $^{ن}ل_{١}$ = ٤

١ + ن = ٤ ∴ ن = ٣

⑪ $^{ن}ل_{٠}$ + $^{ن}ل_{١}$ + $^{ن}ل_{٢}$ = ٥٠

١ + ن + ن (ن − ١) = ٥٠

ن + ن^{٢} − ن + ١ − ٥٠ = ٠ ∴ ن^{٢} − ٤٩ = ٠

ن^{٢} = ٤٩ ∴ ن = ٧

⑫ $^{ن}ل_{ن}$ = ١٢٠

⌊ن = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

⌊ن = ⌊٥ ∴ ن = ٥.

١٩ ① $^{٧}ل_{ن}$ = ٢١٠ ∴ $^{٧}ل_{ن}$ = ٧ × ٦ × ٥

∴ $^{٧}ل_{ن}$ = $^{٧}ل_{٣}$ ∴ ن = ٣

② ٧ ⌊ن + ٢ = ⌊ن + ٣

٧ ⌊ن + ٢ = (ن + ٣) ⌊ن + ٢

٧ = ن + ٣ ∴ ن = ٤

③ (ن + ١) ⌊ن = ٢٤

⌊ن + ١ = ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١

⌊ن + ١ = ⌊٤ ∴ ن + ١ = ٤ ∴ ن = ٣

④ $\frac{⌊ن + ٢}{⌊ن}$ = ٥٦ ∴ $\frac{(ن+٢)(ن+١)\, ⌊ن}{⌊ن}$ = ٥٦

(ن + ٢) (ن + ١) = ٥٦

ن^{٢} + ٣ن + ٢ − ٥٦ = ٠ ∴ ن^{٢} + ٣ن − ٥٤ = ٠

(ن + ٩) (ن − ٦) = ٠

∴ ن = − ٩ (مرفوض) ، ن = ٦

⑤ $\frac{١}{⌊ن}$ + $\frac{١}{⌊ن + ١}$ = $\frac{ن + ٢}{٢٤}$

$\frac{١}{⌊ن}$ + $\frac{١}{(ن+١)\, ⌊ن}$ = $\frac{ن + ٢}{٢٤}$

$\frac{ن + ١ + ١}{(ن+١)\, ⌊ن}$ = $\frac{ن + ٢}{٢٤}$ ∴ $\frac{ن + ٢}{⌊ن + ١}$ = $\frac{ن + ٢}{٢٤}$

⌊ن + ١ = ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ ∴ ⌊ن + ١ = ⌊٤.

ن + ١ = ٤ ∴ ن = ٣

⑥ ن ⌊٢ن − ١ = ١٢ (بضرب الطرفين × ٢)

٢ن ⌊٢ن − ١ = ٢٤ ⌊٢ن = ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ ⌊٢ن = ⌊٤ ∴ ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

٢٠ $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ = ٥ × ٤ × ٣ ∴ $^{٥}ل_{ر}$ = $^{٥}ل_{٣}$

∴ ر = ٣ ∴ ⌊ن = ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١

⌊ن = ⌊٤ ∴ ن = ٤

⌊ن − ر = ⌊٤ − ٣ = ⌊١ = ١

٢١ ⌊ر = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

⌊ر = ⌊٥ ∴ ر = ٥

$^{ن}ل_{ر}$ = ١٢٠ ∴ $^{ن}ل_{٥}$ = ١٢٠

$^{ن}ل_{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $^{٥}ل_{٥}$ ∴ ن = ٥

∴ ⌊ن − ر = ⌊٥ − ٥ = ⌊٠ = ١

(22) $^{س+ص}ل_4 = 360$ ∴ $^{س+ص}ل_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$^{س+ص}ل_4 = {}^{6}ل_4$ ∴ $س + ص = 6$ ← (1)

$(2س + ص)! = 5040$

$(2س + ص)! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(2س + ص)! = 7!$ ∴ $2س + ص = 7$ ← (2)

بحل (1) ، (2) معًا بالطرح

∴ $س = 1$ وبالتعويض في (1)

∴ $ص = 5$ ∴ $^{ص}ل_{س} = {}^{5}ل_1 = 5$

---

(23) $^{ن}ل_4 = 14 \times {}^{ن-2}ل_3$

$\frac{ن!}{(ن-4)!} = 14 \times \frac{(ن-2)!}{(ن-5)!}$

$\frac{ن(ن-1)(ن-2)!}{(ن-4)(ن-5)!} = 14 \times \frac{(ن-2)!}{(ن-5)!}$

$ن^2 - ن = 14ن - 56$ ∴ $ن^2 - 15ن + 56 = 0$

$(ن-7)(ن-8) = 0$ ∴ $ن = 7$ أو $ن = 8$

---

(24) $7 \times \frac{ن!}{(ن-5)!} = \frac{ن!}{(ن-3)!} \times 9 \times 8 \times 7$

$\frac{1}{(ن-5)!} = \frac{72}{(ن-3)(ن-4)(ن-5)!}$

$ن^2 - 7ن + 12 = 72$ ∴ $ن^2 - 7ن + 12 - 72 = 0$

$ن^2 - 7ن - 60 = 0$ ∴ $(ن-12)(ن+5) = 0$

∴ $ن = 12$ ، $ن = -5$ (مرفوض)

---

(25) $^{6}ل_{ر} = 4 \times {}^{6}ل_{ر-1}$

$\frac{6!}{(6-ر)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-ر+1)!}$ ∴ $\frac{1}{(6-ر)!} = 4 \times \frac{1}{(7-ر)!}$

$\frac{1}{(6-ر)!} = \frac{4}{(7-ر)(6-ر)!}$

$(7-ر) = 4$ ∴ $7 - 4 = ر$ ∴ $ر = 3$

---

(26) عدد الطرق = $^{7}ل_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ طريقة

---

(27) عدد الطرق = $^{8}ل_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

---

(28) الطرف الأيمن = $\frac{(ن+2)!}{ن!} = \frac{(ن+2)(ن+1)ن!}{ن!}$

$= (ن+2)(ن+1) = {}^{ن+2}ل_2 =$ الطرف الأيسر

---

(29) الطرف الأيسر = $^{ن+1}ل_{ن}$

$= \frac{(ن+1)!}{(ن+1-ن)!} = \frac{(ن+1)!}{1!} = (ن+1)! =$ الطرف الأيمن

---

(30) $\frac{(ن-2)!}{5} = \frac{4!}{(ن-1)}$ ∴ $(ن-1)(ن-2)! = 5 \times 4!$

$(ن-1)! = 5!$ ∴ $ن - 1 = 5$ ∴ $ن = 6$

---

(31) $\frac{(ن-4)!}{3!} = \frac{5!}{(ن-3)}$ ∴ $(ن-3)(ن-4)! = 3! \times 5!$

$(ن-3)! = 6 \times 5!$ ∴ $(ن-3)! = 6!$

∴ $ن - 3 = 6$ ∴ $ن = 9$

---

(32) $^{ن+1}ل_3 : \frac{ن!}{(ن-2)!} = 7$

$\frac{(ن+1)!}{(ن+1-3)!} \div \frac{ن!}{(ن-2)!} = 7$

$\frac{(ن+1)!}{(ن-2)!} \times \frac{(ن-2)!}{ن!} = 7$

$\frac{(ن+1)\,ن!}{ن!} = 7$ ∴ $ن + 1 = 7$ ∴ $ن = 6$

---

(33) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= (10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2) \times (9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1)$

$= 2^5 (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9)$

$= 2^5\, 5!\, (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9)$

---

(34) $^{ن}ل_8 > {}^{ن}ل_7$ ∴ $\frac{ن!}{(ن-8)!} > \frac{ن!}{(ن-7)!}$

$\frac{1}{(ن-8)!} > \frac{1}{(ن-7)(ن-8)!}$

$1 > \frac{1}{ن-7}$ ∴ $ن - 7 > 1$

$ن > 8$ ∴ $ن = 9$

---

(35) $^{ن}ل_{ر} + {}^{ر}ل_{ن} = 48$ ∵ $ن \geq ر$ ، $ر \geq ن$

∴ $ن = ر$ ∴ $2 \times {}^{ن}ل_{ن} = 48$

$^{ن}ل_{ن} = 24$ ∴ $ن! = 24$

∵ $ن! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ∴ $ن! = 4!$ ∴ $ن = 4$

تمارين (10) على التوافيق

(1) ① 100 ② $\{2 ، 3\}$

③ 3 ④ $\frac{أ + هـ}{2}$

⑤ (أ) $(ن-4)! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$(ن-4)! = 6!$

∴ $ن - 4 = 6$ ∴ $ن = 10$

م.ح = $\{10\}$

(ب) $^{ن}ل_0 + {}^{ن}ل_1 + {}^{ن}ل_2 = 50$

$1 + ن + ن(ن-1) = 50$

$١ + ن + ن^{٢} - ن = ٥٠$

$ن^{٢} = ٥٠ - ١ = ٤٩$

$ن = ٧$ ∴ م٠ح = {٧}

① $ح_{٦} = ٢٠$

∴ $أ + ٥د = ٢٠$ ← ①

$\frac{ح_{٤}}{ح_{١٠}} = \frac{٤}{٧}$ ⇐ $\frac{أ + ٣د}{أ + ٩د} = \frac{٤}{٧}$

$٧أ + ٢١د = ٤أ + ٣٦د$

∴ $٧أ - ٤أ = ٣٦د - ٢١د$

$٣أ = ١٥د$ (÷٣)

$أ = ٥د$ ← ②

بالتعويض من ② في ①

∴ $٥د + ٥د = ٢٠$

$١٠د = ٢٠$ ∴ $د = ٢$ بالتعويض في ②

∴ $أ = ٥ × ٢ = ١٠$

∴ المتتابعة هي (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ......)

٢ ① ٢٠ ② ١ ③ ٩ ④ ١ ⑤ ١٢ ⑥ ٢١ ⑦ ١٠٠ ⑧ ٥٠

٣ $^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ ∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢} = ٤٣٥$

$ن^{٢} - ن = ٨٧٠$ ∴ $ن^{٢} - ن - ٨٧٠ = ٠$

$(ن - ٣٠)(ن + ٢٩) = ٠$

$ن = ٣٠$ ، $ن = -٢٩$ (مرفوض)

٤ عدد الطرق = $^{١٢}ق_{٤} = ٤٩٥$ طريقة

٥ ① ٧ ② ٦٤ ③ ٤٩٥٠ ④ ٧ ⑤ ٨ ⑥ ٧ ⑦ ١ ⑧ ٨ ⑨ ٨ ⑩ {٠ ، ١} ⑪ ٤ ⑫ ١٢٦

٦ ① ٣٦ ② ١٠ ③ ١٥ ④ ١٥ ⑤ $^{٥}ق_{٢}$ ⑥ ٧ ⑦ ٤ ⑧ ١٠ ⑨ ٢ ⑩ ٨ ⑪ ٣ ⑫ ٢٥

٧ ① عدد المجموعات الجزئية الثنائية = $^{٦}ق_{٢} = ١٥$

② عدد المجموعات الجزئية الثلاثية = $^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

٨ عدد الطرق = $^{٥}ق_{٥} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣} = ١٦$ طريقة

٩ عدد الطرق = $^{١٠}ق_{٤} × {}^{٦}ق_{٤} = ٢١٠ × ١٥ = ٣١٥٠$ طريقة

١٠ عدد الطرق = $^{١٠}ق_{٤} × {}^{٨}ق_{٣} = ٢١٠ × ٥٦ = ١١٧٦٠$ طريقة

١١ عدد الطرق = $^{١٠}ق_{٣} × {}^{٨}ق_{٢} = ١٢٠ × ٢٨ = ٣٣٦٠$ طريقة

١٢ عدد الطرق = $^{٤}ق_{١} × {}^{٣}ق_{١} = ٤ × ٣ = ١٢$ طريقة

١٣ $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ١٢٠$

$^{ن}ل_{٣} = ١٢٠ \underline{|٣} = ٧٢٠$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ١٠ × ٩ × ٨ = {}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ $ن = ١٠$

∴ $^{ن}ق_{ن-٩} = {}^{١٠}ق_{١} = ١٠$

١٤ $^{٢ن-١}ق_{٣} = ٨٤$ ∴ $\frac{^{٢ن-١}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ٨٤$

$^{٢ن-١}ل_{٣} = ٨٤ \underline{|٣} = ٥٠٤$

∴ $^{٢ن-١}ل_{٣} = ٩ × ٨ × ٧$ ∴ $^{٢ن-١}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{٣}$

$٢ن - ١ = ٩$ ∴ $٢ن = ١٠$ ∴ $ن = ٥$

$\underline{|ن-٥} = \underline{|٥-٥} = \underline{|٠} = ١$

١٥ $^{ن}ق_{ن-٢} = ٢١$ ∴ $^{ن}ق_{٢} = ٢١$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٢١$ ∴ $^{ن}ل_{٢} = ٤٢$

$^{ن}ل_{٢} = ٧ × ٦$ ∴ $^{ن}ل_{٢} = {}^{٧}ل_{٢}$ ∴ $ن = ٧$

$^{ن}ق_{ن} = {}^{٧}ق_{٧} = {}^{٧}ق_{٠} = ١$

١٦ $^{م}ق_{٢} = ٣$ ، $\frac{^{م}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٣$

∴ $^{م}ل_{٢} = ٣ × ٢$ ∴ $^{م}ل_{٢} = {}^{٣}ل_{٢}$ ∴ $م = ٣$

$^{ن+م}ق_{٣} = ٥٦$ ∴ $\frac{^{ن+م}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ٥٦$

$^{ن+م}ل_{٣} = ٥٦ \underline{|٣} = ٣٣٦$

$^{ن+م}ل_{٣} = ٨ × ٧ × ٦$ ∴ $^{ن+م}ل_{٣} = {}^{٨}ل_{٣}$

∴ $م + ن = ٨$ ∵ $م = ٣$ ∴ $٣ + ن = ٨$

∴ $ن = ٥$ ∴ $\underline{|ن-م} = \underline{|٥-٣} = \underline{|٢} = ٢ × ١ = ٢$

١٧ $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ ∴ $١٠٥ = \frac{٢١٠}{\underline{|ر}}$

∴ $\underline{|ر} = \frac{٢١٠}{١٠٥} = ٢$ ∴ $\underline{|ر} = ٢ × ١ = \underline{|٢}$

∴ $ر = ٢$ ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$

$^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = ١٥ × ١٤$ ∴ $^{ن}ل_{٢} = {}^{١٥}ل_{٢}$

∴ ن = ١٥

(١٨) $^{ن}ل_{ر} = ٢٤ \; {}^{ن}ق_{ر}$ ∴ $^{ن}ل_{ر} = ٢٤ \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{|ر}$

∴ $|ر = ٢٤$ ∴ $|ر = ٤ × ٣ × ٢ × ١$

$|ر = |٤$ ∴ ر = ٤

∴ $^{١٠}ق_{ر} = {}^{١٠}ق_{٨} = {}^{١٠}ق_{٢} = \dfrac{١٠ × ٩}{٢ × ١} = ٤٥$

∵ ن ≥ ر ∴ ن ≥ ٤

∴ أقل قيمة ن تجعل العلاقة صحيحة = ٤

(١٩) $^{ن+١}ق_{٤} = \dfrac{٥}{٢} \; {}^{ن}ق_{٣}$

∴ $\dfrac{|ن+١}{|ن+١-٤ \; |٤} = \dfrac{٥}{٢} \; \dfrac{|ن}{|ن-٣ \; |٣}$

$\dfrac{(ن+١)|ن}{|ن-٣ \; ٤ × |٣} = \dfrac{٥}{٢} \; \dfrac{|ن}{|ن-٣ \; |٣}$

∴ ن + ١ = $\dfrac{٥}{٢}$ × ٤ ∴ ن + ١ = ١٠ ∴ ن = ٩

(٢٠) $^{ن}ق_{٣} = ٣٠\dfrac{١}{٣}$ ن

$\dfrac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣ × ٢ × ١} = \dfrac{٩١}{٣}$ ن

$ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ١٨٢$ ∴ $ن^{٢} - ٣ن - ١٨٠ = ٠$

(ن - ١٥)(ن + ١٢) = ٠

∴ ن = ١٥ ، ن = - ١٢ (مرفوض)

(٢١) $^{ن}ق_{٣} : {}^{ن-٢}ق_{٣} = ٧ : ٢$

$\dfrac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣ × ٢ × ١} × \dfrac{٣ × ٢ × ١}{(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)} = \dfrac{٧}{٢}$

$\dfrac{ن^{٢} - ن}{ن^{٢} - ٧ن + ١٢} = \dfrac{٧}{٢}$

$٧ن^{٢} - ٤٩ن + ٨٤ = ٢ن^{٢} - ٢ن$

∴ $٥ن^{٢} - ٤٧ن + ٨٤ = ٠$

∴ (٥ن - ١٢)(ن - ٧) = ٠

ن = $\dfrac{١٢}{٥}$ (مرفوض) لأن ن ∈ $ص^{+}$ ∴ ن = ٧

(٢٢) إما $ر^{٢} + ٢ر = ٢ر + ٥$

∴ $ر^{٢} = ٥$ ⟸ ر = ± $\sqrt{٥}$ (مرفوض) لأن ر ∈ $ص^{+}$

أو $ر^{٢} + ٢ر + ٢ر + ٥ = ١٧$

$ر^{٢} + ٤ر - ١٢ = ٠$ ∴ (ر + ٦)(ر - ٢) = ٠

ر = - ٦ (مرفوض) ، ر = ٢

(٢٣) ∵ $^{ن}ق_{ر} = ١$ ∴ ر = ٠ أو ر = ن

عندما ر = ٠ ∴ $^{ن+٣}ق_{١} = ٢٨$

∴ ن + ٣ = ٢٨ ∴ ن = ٢٥

عندما ر = ن ∴ $^{ن+٣}ق_{ن+١} = ٢٨$

$^{ن+٣}ق_{٢} = ٢٨$ ∴ $\dfrac{^{ن+٣}ل_{٢}}{|٢} = ٢٨$

$^{ن+٣}ل_{٢} = ٢٨ \; |٢$ ∴ $^{ن+٣}ل_{٢} = ٨ × ٧$

$^{ن+٣}ل_{٢} = {}^{٨}ل_{٢}$ ∴ ن + ٣ = ٨ ∴ ن = ٥ ، ر = ٥

(٢٤) $^{س-ص}ل_{٣} = ٢١٠ = ٧ × ٦ × ٥$

$^{س-ص}ل_{٣} = {}^{٧}ل_{٣}$ ∴ س - ص = ٧ ← (١)

$^{س+ص}ق_{٤} = ٧١٥$ ∴ $\dfrac{^{س+ص}ل_{٤}}{|٤} = ٧١٥$

$^{س+ص}ل_{٤} = ٧١٥ \; |٤ = ١٧١٦٠$

∴ $^{س+ص}ل_{٤} = {}^{١٣}ل_{٤}$ ∴ س + ص = ١٣ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) معاً ∴ س = ١٠ ، ص = ٣

(٢٥)
① $^{٨}ق_{٣} = \dfrac{^{٨}ل_{٣}}{|٣}$ ② $^{٩}ق_{٦} = \dfrac{^{٩}ل_{٦}}{|٦}$

③ $^{١٩}ق_{٢} = \dfrac{^{١٩}ل_{٢}}{|٢}$ ④ $^{٧}ق_{٧} = \dfrac{^{٧}ل_{٧}}{|٧}$

⑤ $^{٥}ق_{٠} = \dfrac{^{٥}ل_{٠}}{|٠} = {}^{٥}ل_{٠}$ ⑥ $^{ن}ق_{ن} = \dfrac{^{ن}ل_{ن}}{|ن}$

⑦ $^{س}ق_{س-ص} = \dfrac{^{س}ل_{س-ص}}{|س-ص}$

(٢٦)
① $\dfrac{^{٥}ل_{٣}}{|٣} = {}^{٥}ق_{٣}$ ② $\dfrac{^{٨}ل_{٢}}{|٢} = {}^{٨}ق_{٢}$

③ $\dfrac{^{ن}ل_{ر}}{|ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ ④ $\dfrac{^{٧}ل_{٤}}{|٤} = {}^{٧}ق_{٤}$

⑤ $\dfrac{^{٨}ل_{٨}}{|٨} = {}^{٨}ق_{٨}$ ⑥ $\dfrac{^{٨}ل_{٠}}{|٠} = {}^{٨}ق_{٠}$

(٢٧) ① ∵ $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٣}$ ، $^{ن+١}ل_{٣}$ في تتابع حسابي

∴ $٢ × {}^{ن}ل_{٣} = {}^{ن}ل_{٢} + {}^{ن+١}ل_{٣}$

٢ن(ن - ١)(ن - ٢)

= ن(ن - ١) + (ن + ١)ن(ن - ١)

٢(ن - ٢) = ١ + ن + ١

٢ن - ٤ = ن + ٢ ∴ ن = ٦

② $^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن-١}ق_{ر} = \dfrac{ن!}{(ر+١)!\,(ن-ر-١)!} : \dfrac{(ن-١)!}{ر!\,(ن-ر-١)!}$

$= \dfrac{ن\,(ن-١)!}{(ر+١)\,ر!\,(ن-ر-١)!} \times \dfrac{ر!\,(ن-ر-١)!}{(ن-١)!} = \dfrac{ن}{ر+١}$

③ $٢ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٤ \times {}^{ن-١}ق_{ر-١}$

$\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن-١}ق_{ر-١}} = \dfrac{٤}{٢} = \dfrac{٢}{١}$

$\dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \dfrac{(ن-١)!}{(ر-١)!\,(ن-ر)!} = \dfrac{٢}{١}$

$\dfrac{ن\,(ن-١)!}{ر\,(ر-١)!\,(ن-ر)!} \times \dfrac{(ر-١)!\,(ن-ر)!}{(ن-١)!} = \dfrac{٢}{١}$

$\dfrac{ن}{ر} = \dfrac{٢}{١}$ $\qquad \therefore ن = ٢ر$

$\because ٤ \times {}^{ن-١}ق_{ر-١} = ٩ \times {}^{ن-٢}ق_{ر-٢}$

$\dfrac{^{ن-١}ق_{ر-١}}{^{ن-٢}ق_{ر-٢}} = \dfrac{٩}{٤}$

$\dfrac{(ن-١)!}{(ر-١)!\,(ن-ر)!} \div \dfrac{(ن-٢)!}{(ر-٢)!\,(ن-ر)!} = \dfrac{٩}{٤}$

$\dfrac{(ن-١)\,(ن-٢)!}{(ر-١)\,(ر-٢)!\,(ن-ر)!} \times \dfrac{(ر-٢)!\,(ن-ر)!}{(ن-٢)!} = \dfrac{٩}{٤}$

$\dfrac{ن-١}{ر-١} = \dfrac{٩}{٤} \quad \Leftarrow \quad \dfrac{٢ر-١}{ر-١} = \dfrac{٩}{٤}$

$٩ر - ٩ = ٨ر - ٤$

$ر = ٥$ $\qquad \therefore ن = ١٠$

$ن + ر = ٥ + ١٠ = ١٥$

④ $^{١٠}ق_{ر} < {}^{١٠}ق_{ر-١}$

$\therefore \dfrac{^{١٠}ق_{ر}}{^{١٠}ق_{ر-١}} < ١ \quad \Leftarrow \quad \dfrac{١٠-ر+١}{ر} < ١$

$١٠ - ر + ١ < ر$

$٢ر > ١١$ $\qquad \therefore ر > \dfrac{١١}{٢}$

$ر \geq ٦$ $\qquad \because ر \leq ١٠$

$\therefore ٦ \leq ر \leq ١٠$

$ر = ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠$

مجموع قيم $ر = ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ = ٤٠$

⑤ $^{ن}ق_{٣} = ٣ \quad \Leftarrow \quad \dfrac{^{ن}ل_{٣}}{٣!} = ٣$

$^{ن}ل_{٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{٣}ل_{٣}$ $\qquad \therefore ن = ٣$

$^{ن+م}ل_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$^{ن+م}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$

$م + ٣ = ١٠ \quad \Leftarrow \quad م = ٧$

$^{م}ق_{م-ن} = {}^{٧}ق_{٧-٣} = {}^{٧}ق_{٤} = ٣٥$

⑥ $٢\,{}^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{٨} + {}^{ن}ق_{١٠}$

$٢ = \dfrac{^{ن}ق_{٨}}{^{ن}ق_{٩}} + \dfrac{^{ن}ق_{١٠}}{^{ن}ق_{٩}}$

$٢ = \dfrac{٩}{ن-٩+١} + \dfrac{ن-١٠+١}{١٠}$

$٢ = \dfrac{٩}{ن-٨} + \dfrac{ن-٩}{١٠}$

$٢٠(ن-٨) = ٩ \times ١٠ + (ن-٨)(ن-٩)$

$٢٠ن - ١٦٠ = ٩٠ + ن^{٢} - ١٧ن + ٧٢$

$ن^{٢} - ٣٧ن + ٣٢٢ = ٠$

$(ن-١٤)(ن-٢٣) = ٠$

$ن = ١٤$ أو $ن = ٢٣$

⑦ $\dfrac{^{١٥}ق_{ر} + {}^{١٥}ق_{ر+١}}{^{١٥}ق_{ر-١} + {}^{١٥}ق_{ر}} = \dfrac{^{١٦}ق_{ر+١}}{^{١٦}ق_{ر}}$

$= \dfrac{١٦-(ر+١)+١}{ر+١} = \dfrac{١٦-ر-١+١}{ر+١} = \dfrac{١٦-ر}{ر+١}$

⑧ $\dfrac{^{٩}ق_{٢ر-٢} + {}^{٩}ق_{٢ر-١}}{^{٩}ق_{٢ر-١} + {}^{١٠}ق_{٢ر}} = \dfrac{٨}{٢١}$

$\dfrac{٨}{٢١} = \dfrac{١ + \dfrac{^{٩}ق_{٢ر-٢}}{^{٩}ق_{٢ر-١}}}{١ + \dfrac{^{١٠}ق_{٢ر}}{^{٩}ق_{٢ر-١}}} \quad \Leftarrow \quad \dfrac{٨}{٢١} = \dfrac{١ + \dfrac{٢ر-١}{٩}}{١ + \dfrac{١٠}{٢ر}} \times \dfrac{٩٠ر}{٩٠ر}$

$\dfrac{٨}{٢١} = \dfrac{ر(٢ر-١) + ٩ر}{٩ر + ٤٥} \quad \Leftarrow \quad \dfrac{٨}{٢١} = \dfrac{٢ر^{٢} - ر + ٩ر}{٩ر + ٤٥}$

$\dfrac{٨}{٢١} = \dfrac{٢ر^{٢} + ٨ر}{٩ر + ٤٥} \quad \Leftarrow \quad \dfrac{٤}{٧} = \dfrac{ر^{٢} + ٤ر}{٣ر + ١٥}$

$٧ر^{٢} + ٢٨ر = ١٢ر + ٦٠$

$٧ر^{٢} + ١٦ر - ٦٠ = ٠$

$(٧ر + ٣٠)(ر - ٢) = ٠$

$ر = \dfrac{-٣٠}{٧}$ (مرفوض)

$ر - ٢ = ٠$ $\qquad \therefore ر = ٢$

(٢٨) ${}^{ن}ق_{٨} > {}^{ن}ق_{٧}$

∴ $\frac{ن!}{٨!\,(ن-٨)!} > \frac{ن!}{٧!\,(ن-٧)!}$

$\frac{١}{(ن-٨)!\times ٨ \times ٧!} > \frac{١}{(ن-٧)\,(ن-٨)!\,٧!}$

$\frac{١}{٨} > \frac{١}{ن-٧}$ ∴ $ن-٧ > ٨$ ∴ $ن > ١٥$

---

(٢٩) ∵ ${}^{٧}ق_{ر} > ١$ ∴ $٧ > ر$

∵ ${}^{ر}ق_{٥} > ١$ ∴ $ر > ٥$

∴ $٥ < ر < ٧$ ∴ $ر = ٦$

$(٦-ر)! = (٦-٦)! = ٠! = ١$

---

(٣٠) ${}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣\times٢\times١} + \frac{ن(ن-١)}{٢\times١} = (ن+٥)(ن+١)$

$\frac{ن(ن-١)}{٢}\left[\frac{ن-٢}{٣} + ١\right] = (ن+٥)(ن+١)$

$\frac{ن(ن-١)}{٢}\left(\frac{ن-٢+٣}{٣}\right) = (ن+٥)(ن+١)$

$\frac{ن(ن-١)}{٢} \times \frac{(ن+١)}{٣} = (ن+٥)(ن+١)$

$ن(ن-١) = ٦ن + ٣٠$ ∴ $ن^{٢} - ن - ٦ن - ٣٠ = ٠$

$ن^{٢} - ٧ن - ٣٠ = ٠$ ∴ $(ن-١٠)(ن+٣) = ٠$

$ن = ١٠$ ، $ن = -٣$ (مرفوض)

---

(٣١) ${}^{ن+٢}ل_{ر} : {}^{ن+٢}ق_{ر} = ٢:١$

${}^{ن+٢}ل_{ر} \times \frac{ر!}{{}^{ن+٢}ل_{ر}} = \frac{٢}{١}$

$ر! = ٢ \times ١ = ٢!$ ∴ $ر = ٢$

${}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر} = ٥:٣$

∴ ${}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = \frac{٥}{٣}$

$\frac{ن!}{(ن-٣)! \times ٣!} \times \frac{(ن-٢)!\,٢!}{ن!} = \frac{٥}{٣}$

$\frac{١}{(ن-٣)! \times ٣ \times ٢!} \times \frac{(ن-٢)\,(ن-٣)!\,٢!}{١} = \frac{٥}{٣}$

$\frac{ن-٢}{٣} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $ن - ٢ = ٥$ ∴ $ن = ٧$

---

(٣٢) ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن-١}ق_{ر-١}$

$= \frac{ن!}{(ن-ر)! \times ر!} \times \frac{(ر-١)!\,(ن-١-ر+١)!}{(ن-١)!}$

$= \frac{ن\,(ن-١)!}{(ن-ر)! \times ر\,(ر-١)!} \times \frac{(ر-١)!\,(ن-ر)!}{(ن-١)!} = \frac{ن}{ر}$

---

(٣٣) نفرض أن عدد عناصر المجموعة س = ن

∵ عناصر ص تمثل جميع الأزواج المرتبة من المجموعة س

∴ عدد عناصر ص = ${}^{ن}ل_{٢}$

∴ ${}^{ن}ل_{٢} = ٧٢ = ٩ \times ٨$ ∴ ${}^{ن}ل_{٢} = {}^{٩}ل_{٢}$ ∴ $ن = ٩$

∵ عناصر المجموعة ع تمثل جميع المجموعات الجزئية الثنائية من المجموعة س

∴ عدد عناصر ع = ${}^{٩}ق_{٢} = ٣٦$

حلـول تماريـن التفاضـل

تمارين (١) على معدل التغير

١) ① ٢ ② ٠,٤٤ ③ −٥

٢) أولاً ٠,١١ ، ثانياً −٠,٢٥

٣) ① ٠,٦١ ② −١

٤) $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \frac{٣(س+هـ) - ٢ - (٣س - ٢)}{هـ}$

$= \frac{٣س + ٣هـ - ٢ - ٣س + ٢}{هـ} = \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$

$م(٠,٤) = ٣ \Leftarrow$ معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = ٣$

٥) ① ٢,٢٥ ② ٠,٦ ③ ٠,٤٨ ④ ٧ ⑤ ١,٧٦ ⑥ ١٦ ⑦ ٤ ⑧ ١,٠٩ ⑨ ٥ ⑩ [أ، ب]

٦) دالة متوسط التغير $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$\therefore م(هـ) = \frac{(س+هـ)^٢ + ٢(س+هـ) - س^٢ - ٢س}{هـ}$

$= \frac{٢س هـ + هـ^٢ + ٢هـ}{هـ} = ٢س + هـ + ٢$

عند $س = ٢$ $\therefore م(هـ) = ٦ + هـ$

$\therefore$ متوسط التغير (عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١)

$= ٢ \times ٢ + ٠,١ + ٢ = ٦,١$

معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} (٦ + هـ) = ٦$

٧) $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \frac{(س+هـ)^٢ + ٣(س+هـ) + ١ - (س^٢ + ٣س + ١)}{هـ}$

$= \frac{س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٣س + ٣هـ + ١ - س^٢ - ٣س - ١}{هـ}$

$= \frac{٢س هـ + هـ^٢ + ٣هـ}{هـ} \Leftarrow م(هـ) = ٢س + هـ + ٣$

$م(٠,٠١) = ٢ \times ٣ + ٠,٠١ + ٣ = ٩,٠١$

معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ)$

$= \lim_{هـ \to ٠} (٢س + هـ + ٣) = ٢س + ٣$

عندما $س = ٤ \Leftarrow$ معدل التغير $= ٢ \times ٤ + ٣ = ١١$

٨) $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \frac{٣ + ٢(س+هـ) - (س+هـ)^٢ - ٣ - ٢س + س^٢}{هـ}$

$= \frac{٢س + ٢هـ - س^٢ - ٢س هـ - هـ^٢ - ٢س + س^٢}{هـ}$

$= ٢ - ٢س - هـ$

$م(٠,١) = ٢ - ٢ \times ٣ - ٠,١ = -٤,١$

المعدل $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = \lim_{هـ \to ٠} (٢ - ٢س - هـ)$

$= ٢ - ٢س = ٢ - ٦ = -٤$

٩) $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \frac{(س+هـ)^٣ - ٤ - (س^٣ - ٤)}{هـ}$

$= \frac{س^٣ + ٣س^٢ هـ + ٣س هـ^٢ + هـ^٣ - ٤ - س^٣ + ٤}{هـ}$

$= \frac{٣س^٢ هـ + ٣س هـ^٢ + هـ^٣}{هـ}$

$م(هـ) = ٣س^٢ + ٣س هـ + هـ^٢$

$م(٠,١) = ٣(٢)^٢ + ٣ \times ٢ \times ٠,١ + (٠,١)^٢$

$= ١٢ + ٠,٦ + ٠,٠١ = ١٢,٦١$

معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ)$

$= \lim_{هـ \to ٠} (٣س^٢ + ٣س هـ + هـ^٢) = ٣س^٢$

عندما $س = ٢ \Leftarrow$ معدل التغير $= ٣(٢)^٢ = ١٢$

١٠) $\because م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$\therefore م(هـ) = \frac{\frac{١}{س+هـ} - \frac{١}{س}}{هـ} = \frac{س - س - هـ}{هـ س(س+هـ)}$

$= \frac{-١}{س(س+هـ)}$ $\therefore$ معدل التغير $= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ)$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١}{س(س+هـ)} = -\frac{١}{س^٢}$

، عند $س = \sqrt{٢}$ $\therefore$ معدل التغير $= -\frac{١}{٢}$

١١) ① $ت(هـ) = د(س+هـ) - د(س)$

$= \frac{١}{س+هـ} + ١ - \frac{١}{س} - ١$

$= \frac{س - س - هـ}{س(س+هـ)} = \frac{-هـ}{س(س+هـ)}$

$\therefore م(هـ) = \frac{-١}{س(س+هـ)}$

② معدل التغير = $\lim\limits_{ه \to 0} م(ه) = -\frac{1}{س^2}$

عند س = ٣ ∴ معدل التغير = $-\frac{1}{9}$

---

⑫ ∵ $ت(ه) = \frac{2}{س+ه-1} - \frac{2}{س-1}$

$= \frac{2س-2-2س-2ه+2}{(س+ه-1)(س-1)} = \frac{-2ه}{(س-1)(س+ه-1)}$

$م(ه) = \frac{-2ه}{ه(س-1)(س+ه-1)}$

$= \frac{-2}{(س-1)(س+ه-1)}$

معدل التغير = $\lim\limits_{ه \to 0} م(ه)$

$= \lim\limits_{ه \to 0} \frac{-2}{(س-1)(س+ه-1)}$

$= \frac{-2}{(س-1)^2}$ عند س = ٣

معدل التغير = $\frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2}$

---

⑬ $م(ه) = \frac{د(س+ه)-د(س)}{ه}$

$= \frac{\left[\frac{1}{س+ه}-(س+ه)\right]-\left(\frac{1}{س}-س\right)}{ه}$

$= \frac{\frac{1}{س+ه}-ه-\frac{1}{س}}{ه}$

$= \frac{\frac{س-ه س(س+ه)-(س+ه)}{س(س+ه)}}{ه}$

$= \frac{س-ه س^2-ه^2 س-س-ه}{س ه(س+ه)}$

$م(ه) = \frac{ه(-س^2-ه س-1)}{ه س(س+ه)} = \frac{-(س^2+ه س+1)}{س(س+ه)}$

معدل التغير = $\lim\limits_{ه \to 0} م(ه) = \frac{-(س^2+1)}{س^2}$

عندما س = ١ ⟸ معدل التغير = $\frac{-(1+1)}{1} = -2$

---

⑭ $د(س) = \frac{س+1}{س-1}$

$م(ه) = \frac{\frac{س+ه+1}{س+ه-1}-\frac{س+1}{س-1}}{ه}$

$= \frac{س^2+س ه+س-س-ه-1-س^2-س ه+س-س-ه+1}{ه(س+ه-1)(س-1)}$

$= \frac{-2ه}{ه(س+ه-1)(س-1)}$

$م(ه) = \frac{-2}{(س+ه-1)(س-1)}$

معدل التغير = $\lim\limits_{ه \to 0} \frac{-2}{(س+ه-1)(س-1)}$

عند س = ٠

∴ معدل التغير = $\frac{-2}{(0+0-1)(0-1)} = -2$

---

⑮ $م(ه) = \frac{د(س+ه)-د(س)}{ه}$

$= \frac{\sqrt{س+ه-3}-\sqrt{س-3}}{ه}$

$= \frac{\sqrt{س+ه-3}-\sqrt{س-3}}{ه} \times \frac{\sqrt{س+ه-3}+\sqrt{س-3}}{\sqrt{س+ه-3}+\sqrt{س-3}}$

$= \frac{س+ه-3-(س-3)}{ه(\sqrt{س+ه-3}+\sqrt{س-3})}$

$م(ه) = \frac{1}{\sqrt{س+ه-3}+\sqrt{س-3}}$

معدل التغير = $\lim\limits_{ه \to 0} \frac{د(7+ه)-د(7)}{ه} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$

معدل التغير = $\frac{1}{4}$

---

⑯ د(س) = أ س + ب

ت(ه) = د(س + ه) − د(س)

= أ(س + ه) + ب − (أ س + ب)

= أ س + أ ه + ب − أ س − ب ⟸ ت(ه) = أ ه

عند س = ١ ∴ ت(ه) = أ ه

∵ ت(٠٫١) = ٠٫٢ ∴ ٠٫٢ = أ × ٠٫١

∴ أ = ٢ ∵ د(١) = ٣ ∴ ٣ = أ + ب

∴ ٣ = ٢ + ب ∴ ب = ١

---

⑰ ∵ د(ه) = د(٢ + ه) − د(٢)

$= (2+ه)^2 + أ(2+ه) - 3 - 4 - 2أ + 3$

$= 4ه + ه^2 + أ ه$

$\frac{19}{4} = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}أ$ ∴ أ = ٥

---

⑱ $ف = ن^2 - 3ن + 2$

$م(ه) = \frac{د(ن+ه)-د(ن)}{ه}$

$= \frac{(ن+ه)^2-3(ن+ه)+2-(ن^2-3ن+2)}{ه}$

$= \frac{ن^2+2نه+ه^2-3ن-3ه+2-ن^2+3ن-2}{ه}$

$م(ه) = \frac{2نه+ه^2-3ه}{ه} = 2ن + ه - 3$

عندما تتغير ن من ن = ٢ إلى ن = ٤

$\therefore$ م$(٢) = ٢ \times ٢ + ٢ - ٣ = ٣$

معدل التغير $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ م(هـ) $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $(٢ن + هـ - ٣)$

$= ٢ن - ٣ \Leftarrow$ عند ن $= ٢$ ثانية

معدل التغير $= ٢ \times ٢ - ٣ = ١$

(١٩) $\because$ مساحة سطح الدائرة $= \pi$ نق^٢

معدل تغير مساحة الصفيحة $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ م(هـ)

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\dfrac{د(نق+هـ) - د(نق)}{هـ}$

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\dfrac{\pi(نق+هـ)^٢ - \pi نق^٢}{هـ}$

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\dfrac{\pi نق^٢ + ٢\pi نق هـ + \pi هـ^٢ - \pi نق^٢}{هـ}$

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\left(\dfrac{٢\pi نق هـ + \pi هـ^٢}{هـ}\right)$

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $(٢\pi نق + \pi هـ) = ٢\pi نق$

عندما نق $= ٤ \Leftarrow$ معدل التغير $= ٢\pi \times ٤ = ٨$

(٢٠) من المسألة السابقة م$(٠,١) = ٢\pi \times ٣,١ + ٠,١\pi$

$= ٦,١\pi$

عندما يزداد طول نصف القطر من ٣ إلى ٣,١

معدل التغير في المساحة $= ٢\pi \times ٣,٥ = ٢٢$

(٢١) د(س) $=$ س^٢

م(هـ) $= \dfrac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \dfrac{(٨+هـ)^٢ - ٨^٢}{هـ}$

$= \dfrac{٦٤ + ١٦هـ + هـ^٢ - ٦٤}{هـ} = ١٦ + هـ$

معدل التغير $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ م(هـ) $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $١٦ + هـ = ١٦$ سم

(٢٢) المساحة الكلية م $= ٦$ س^٢

متوسط التغير في المساحة الكلية

م(هـ) $= \dfrac{د(س_١+هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$= \dfrac{٦(س_١+هـ)^٢ - ٦س_١^٢}{هـ}$

وعندما س$_١ = ٣$ ، هـ $= ٠,٢$

فإن م(هـ) $= \dfrac{٦ \times (٣,٢)^٢ - ٦ \times ٣^٢}{٠,٢} = ٣٧,٢$

معدل التغير في المساحة الكلية $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ م(هـ)

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\dfrac{٦(٣+هـ)^٢ - ٦ \times ٣^٢}{هـ}$

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $(٣٦ + ٦هـ) = ٣٦$

(٢٣) نفرض أن طول نصف قطر الكرة $=$ س

حجم الكرة $=$ ع $=$ د(س) $= \frac{٤}{٣}\pi$ س^٣

د(س$_١$) $= \frac{٤}{٣}\pi$ س$_١^٣$

د(س$_١$ + هـ) $= \frac{٤}{٣}\pi (س_١+هـ)^٣$

م(هـ) $= \dfrac{د(س_١+هـ) - د(س_١)}{هـ}$

م(هـ) $= \dfrac{\frac{٤}{٣}\pi(س_١+هـ)^٣ - \frac{٤}{٣}\pi س_١^٣}{هـ}$

م(هـ) $= \frac{٤}{٣}\pi \left[\dfrac{(س_١+هـ)^٣ - س_١^٣}{هـ}\right]$

معدل التغير $=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ م(هـ)

$=$ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{٤}{٣}\pi \left[\dfrac{(س_١+هـ)^٣ - س_١^٣}{(س_١+هـ) - س_١}\right]$

$= \frac{٤}{٣}\pi \times ٣$ س$_١^٢ = ٤\pi$ س$_١^٢$

عندما طول نصف قطر الكرة $=$ س$_١ = ٧$

$\therefore$ معدل التغير $= ٤ \times \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^٢ = ٦١٦$ سم^٣

(٢٤) نفرض أن طول نصف قطر الكرة $=$ س$_١$

مساحة سطح الكرة $=$ هـ $=$ د(س) $= ٤\pi$ س$_١^٢$

د(س$_١$) $= ٤\pi$ س$_١^٢$

د(س$_١$ + هـ) $= ٤\pi(س_١+هـ)^٢$

م(هـ) $= \dfrac{د(س_١+هـ) - د(س_١)}{هـ}$

م(هـ) $= \dfrac{٤\pi(س_١+هـ)^٢ - ٤\pi س_١^٢}{هـ}$

م(هـ) $= ٤\pi \left[\dfrac{س_١^٢ + ٢س_١ هـ + هـ^٢ - س_١^٢}{هـ}\right]$

$= ٤\pi \left[\dfrac{٢س_١ هـ + هـ^٢}{هـ}\right] = ٤\pi \left[\dfrac{هـ(٢س_١ + هـ)}{هـ}\right]$

م(هـ) $= ٤\pi (٢س_١ + هـ)$

عندما يتغير طول نصف القطر من ٠,٥ إلى ٠,٦

$\therefore$ س$_١ = ٠,٥$ ، هـ $= ٠,٦ - ٠,٥ = ٠,١$

$\therefore$ م(هـ) $= ٤\pi (٢ \times ٠,٥ + ٠,١) = ٤,٤\pi$

حل آخر:

د(س) $= ٤\pi$ س^٢

$\text{د}(0.5) = 4\pi(0.5)^2 \qquad \therefore \text{د}(0.5) = \pi$

$\text{د}(0.6) = 4\pi(0.6)^2 \qquad \therefore \text{د}(0.6) = 1.44\pi$

$\text{هـ} = 0.6 - 0.5 = 0.1$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(0.6) - \text{د}(0.5)}{\text{هـ}} = \frac{1.44\pi - \pi}{0.1}$$

$\text{م}(\text{هـ}) = 4.4\pi$

(٢٥) $\text{د}(\text{س}) = 100 - \frac{42}{\text{س}+1}$

$\text{د}(1) = 100 - \frac{42}{1+1} = 79$

$\text{د}(2) = 100 - \frac{42}{1+2} = 86 \qquad \therefore \text{هـ} = 2 - 1 = 1$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(2) - \text{د}(1)}{\text{هـ}} = \frac{86 - 79}{1} = 7$$

(٢٦) نفرض أن ارتفاع المثلث = س ∴ طول القاعدة = ٢س

$\text{مساحة } \Delta = \text{م} = \text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2} \times 2\text{س} \times \text{س}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 \qquad \therefore \text{د}(\text{س}_1) = \text{س}_1^2$

$\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) = (\text{س}_1 + \text{هـ})^2$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 - \text{س}_1^2}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{س}_1^2 + 2\text{س}_1\text{هـ} + \text{هـ}^2 - \text{س}_1^2}{\text{هـ}}$$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{2\text{س}_1\text{هـ} + \text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}(2\text{س}_1 + \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$\text{م}(\text{هـ}) = 2\text{س}_1 + \text{هـ}$

عندما يتغير الارتفاع من ٨ إلى ٨٫٤

$\therefore \text{س}_1 = 8 \qquad \therefore \text{هـ} = 8.4 - 8 = 0.4$

$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = 2 \times 8 + 0.4 = 16.4$

(٢٧) نفرض أن عرض المستطيل = س سم

∴ طول المستطيل = ٢ س سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٢ س × س

المساحة = ٢ س² سم² ‏ معدل التغير في المساحة

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{2(\text{س}+\text{هـ})^2 - 2\text{س}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{2\text{س}^2 + 4\text{س}\text{هـ} + 2\text{هـ}^2 - 2\text{س}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} (4\text{س} + 2\text{هـ}) = 4\text{س} \Leftarrow \text{عند س} = 5$$

∴ معدل التغير في المساحة = ٤ × ٥ = ٢٠

(٢٨) ① ١٥ ② ٢ ③ −١

④ 5س^4 ⑤ $\frac{-1}{\text{س}^2}$ ⑥ $\text{ظا } \frac{\pi}{4}$

⑦ أولاً ، ٠٫٨٥ ثانياً ، −١٫٢ ثالثاً ، صفر

⑧ أولاً ، ٣ ثانياً ، ٢

(٢٩) $\text{متوسط التغير} = \frac{\text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ يكون ثابتًا لأنه يمثل ميل المستقيم

∴ متوسط التغير يكون ثابتًا في الفترات

$]-2, 0[$ ، $]2, 4[$ ، $]6, \infty[$

(٣٠) نفرض أن طول ضلع المثلث هو س

$\text{مساحة } \Delta = \frac{1}{2} \text{ حاصل ضرب طول ضلعين} \times \text{جا } 60^\circ$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2.$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(\text{س}+\text{هـ})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}[\text{س}^2 + 2\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2 - \text{س}^2]}{\text{هـ}}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[2\text{س} + \text{هـ}]$

$\text{م}(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}[2 \times \frac{3}{2} + 1] = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$

(٣١) نفرض أن طول ضلع المثلث هو س سم

∵ زوايا المثلث المتساوي الأضلاع قياس كل منها ٦٠°

∵ مساحة سطح المثلث

= ½ حاصل ضرب طولا ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{جا } 60^\circ$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2$

متوسط التغير في المساحة

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(\text{س}+\text{هـ})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{س}\text{هـ} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{هـ}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}^2}{\text{هـ}}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ س $+ \frac{\sqrt{3}}{4}$ هـ

عندما يتغير طول الضلع من ٨ إلى ١٠

∴ س = ٨ ، هـ = ٢

متوسط التغير في المساحة $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(8 + 1) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

(٣٣) نفرض أن طول ضلع المربع س سم

المساحة = س² سم²

∴ ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

$= (4 + هـ)^2 - (4)^2 = 16 + 8هـ + هـ^2 - 16$

$9 = هـ^2 + 8هـ$ ∴ $هـ^2 + 8هـ - 9 =$ صفر

$(هـ + 9)(هـ - 1) = 0$

هـ + ٩ = ٠ ⇐ هـ = −٩ (مرفوض)

هـ − ١ = ٠ ⇐ هـ = ١

حيث أن الطول يتمدد أي يزداد

∴ يزداد طول ضلع الصفيحة بمقدار ١ سم أي يصبح طول ضلع المربع ٥ سم

تمارين (٢) على الاشتقاق

(١) ① ٠,٣٦ ② ١٤ ③ ٧٦ ④ ٦

⑤ د(س) = س + $\frac{1}{س}$

د(س + هـ) = س + هـ + $\frac{1}{س + هـ}$

ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

= س + هـ + $\frac{1}{س+هـ}$ − س − $\frac{1}{س}$

= هـ + $\frac{س - س - هـ}{س(س+هـ)}$

ت(هـ) = هـ − $\frac{هـ}{س(س+هـ)}$

م(هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{هـ\left(1 - \frac{1}{س(س+هـ)}\right)}{هـ}$

م(هـ) = $1 - \frac{1}{س(س+هـ)}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}\left(1 - \frac{1}{س(س+هـ)}\right)$ عند س = ٢

$= 1 - \frac{1}{4 + 0} = \frac{3}{4}$

⑥ د(س + هـ) = (س + هـ)² − (س + هـ) + ١

د(س + هـ) = س² + ٢ س هـ + هـ² − س − هـ + ١

ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

= س² + ٢ س هـ + هـ² − س − هـ + ١ − س² + س − ١

ت(هـ) = ٢ س هـ + هـ² − هـ

عندما س = ٣ ، هـ = −٠,٣

ت(−٠,٣) = ٢ × ٣ × −٠,٣ + (−٠,٣)² − (−٠,٣)

= −١,٤١

(٢) ① معدل تغير الدالة ② $\frac{د(1+هـ) - د(1)}{هـ}$ ③ ٢

④ ٢ ⑤ د′(أ) لها وجود ⑥ متصلة

⑦ −١ ⑧ ٤ ⑨ ١٥

(٣) د(س) = س² − س + ١

∴ د(س + هـ) = (س + هـ)² − (س + هـ) + ١

= س² + ٢ س هـ + هـ² − س − هـ + ١

د(س + هـ) − د(س) = (٢س + هـ − ١) هـ

∵ د′(س) = $\lim_{هـ \to 0}$ (٢س + هـ − ١)

∴ د′(س) = ٢س − ١

∵ د(−٢) = (−٢)² − (−٢) + ١ = ٧

∴ النقطة (−٢، ٧) تقع على منحنى د

ميل المماس عند النقطة (−٢، ٧)

د′(−٢) = ٢(−٢) − ١ = −٥

(٤) د(س) = س³ + ٤

د(س + هـ) = (س + هـ)³ + ٤

د′(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^3 + 4 - س^3 - 4}{هـ}$

= $\lim_{س+هـ \to س} \frac{(س+هـ)^3 - س^3}{(س+هـ) - س} = 3س^2$

د′(س) = ٣س² عند النقطة (−١، ٣)

ميل المماس = د′(س) = ٣ × (−١)² = ٣

(٥) ① ٢ ② ٣ ③ ١ ④ ٤ ⑤ ٤

(٦) د(س) = ٣س² + ٤س + ٧

د(س + هـ) = ٣(س + هـ)² + ٤(س + هـ) + ٧

د′(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{3(س+هـ)^2 + 4س + 4هـ + 7 - 3س^2 - 4س - 7}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{3س^2 + 6سهـ + 3هـ^2 + 4هـ - 3س^2}{هـ}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(\text{٦س}+\text{٣هـ}+٤)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \text{٦س} + \text{٣هـ} + ٤$

$\text{د}'(\text{س}) = \text{٦س} + ٤$ عند النقطة $(-١ ، ٦)$

ميل المماس $= \text{د}'(\text{س}) = ٦ \times -١ + ٤ = -٢$

(٧) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٥$ ∴ $\text{د}(٣) = (٣)^٢ - ٥ = ٤$

∴ النقطة $(٣ ، ٤) \ni$ للمنحنى د

ميل المماس عند (س = ٣) = معدل التغير فى د عند (س = ٣)

$\text{د}'(٣) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(٣+\text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{[(٣+\text{هـ})^٢ - ٥] - ٤}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{٩ + \text{٦هـ} + \text{هـ}^٢ - ٥ - ٤}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(٦+\text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} (٦+\text{هـ})$

$= ٦ + ٠ = ٦$ ∴ $\text{د}'(٣) =$ ميل المماس $= ٦$

(٨) $\text{د}(\text{س}) = \text{٢س} + ٣$ ∴ $\text{د}(١) = ٢ \times ١ + ٣ = ٥$

∴ النقطة $(١ ، ٥) \ni$ المنحني الدالة د

ميل المماس عند (س = ١) = معدل التغير فى د عند (س = ١)

$\text{د}'(١) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

∴ ميل المماس $= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{[٢(١+\text{هـ})+٣] - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{٢ + \text{٢هـ} + ٣ - ٥}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{٢هـ}}{\text{هـ}} = ٢$

∴ طا ل $= ٢$ ∴ ل $= ٦٣° ٢٦'$

(٩) $\text{د}(\text{س}) = ١ - \text{٥س} - \text{٣س}^٢$

$\text{د}(-١) = ١ - ٥(-١) - ٣(-١)^٢ = ٣$

∴ النقطة $(-١ ، ٣) \ni$ لمنحني الدالة د

ميل المماس عند (س = -١) = معدل التغير عند (س = -١)

$\text{د}'(-١) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(-١+\text{هـ}) - \text{د}(-١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{[١ - ٥(-١+\text{هـ}) - ٣(-١+\text{هـ})^٢] - ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{١ + ٥ - \text{٥هـ} - ٣ + \text{٦هـ} - \text{٣هـ}^٢ - ٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ} - \text{٣هـ}^٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(١ - \text{٣هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} (١ - \text{٣هـ}) = ١$

∴ طا ل $= ١$ ∴ ل $= ٤٥°$

(١٠) ① $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ - \text{٣س} + ٢$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = (\text{س}+\text{هـ})^٢ - ٣(\text{س}+\text{هـ}) + ٢$

$= \text{س}^٢ + \text{٢س هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{٣س} - \text{٣هـ} + ٢$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})$

$= \text{س}^٢ + \text{٢س هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{٣س} - \text{٣هـ} + ٢ - \text{س}^٢ + \text{٣س} - ٢$

$= \text{٢س هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{٣هـ} = \text{هـ}(\text{٢س} + \text{هـ} - ٣)$

$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(\text{٢س}+\text{هـ}-٣)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} (\text{٢س} + \text{هـ} - ٣) = \text{٢س} - ٣$

② $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \sqrt{\text{س}+\text{هـ}} = (\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٢}}$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = (\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{هـ}} = \frac{١}{٢} \text{س}^{\frac{١}{٢}-١}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢} \text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

حيث $\text{س} \in]٠ ، \infty[$

③ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{٣س}+١}$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \sqrt{٣(\text{س}+\text{هـ})+١} = \sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١}$

$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} - \sqrt{\text{٣س}+١}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} - \sqrt{\text{٣س}+١}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١}}{\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١-\text{٣س}-١}{\text{هـ}(\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١})}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{٣هـ}}{\text{هـ}(\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١})}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{٣}{\sqrt{\text{٣س}+\text{٣هـ}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{\text{٣س}+١} + \sqrt{\text{٣س}+١}} = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{٣س}+١}}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{٣س}+١}}$ حيث $\text{س} \in]-\frac{١}{٣} ، \infty[$

④ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ∴ $\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}}$

$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{١}{\text{س}}$

$$= \frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-\text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{-\text{هـ}}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{\text{س}(\text{س}+\text{هـ})} = \frac{-١}{\text{س}^٢}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س}^٢} \text{ حيث س} \in \text{ح} - \{٠\}$$

---

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٢}$ $\therefore \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}-٢}$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}-٢} - \frac{١}{\text{س}-٢}$$

$$= \frac{\text{س}-٢-\text{س}-\text{هـ}+٢}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)} = \frac{-\text{هـ}}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{-\text{هـ}}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{(\text{س}+\text{هـ}-٢)(\text{س}-٢)}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{(\text{س}-٢)^٢}$$

---

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ $\therefore \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{\text{س}+\text{هـ}}{\text{س}+\text{هـ}+١}$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}+\text{هـ}}{\text{س}+\text{هـ}+١} - \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$$

$$= \frac{\text{س}^٢ + \text{س هـ} + \text{س} + \text{هـ} - \text{س}^٢ - \text{س هـ} - \text{س}}{(\text{س}+\text{هـ}+١)(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{\text{هـ}}{(\text{س}+\text{هـ}+١)(\text{س}+١)}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{\text{هـ}}{(\text{س}+\text{هـ}+١)(\text{س}+١)}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س}+\text{هـ}+١)(\text{س}+١)}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س}+١)^٢}$$

---

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٢$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = (\text{س}+\text{هـ})^٣ + ٢$$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = (\text{س}+\text{هـ})^٣ + ٢ - \text{س}^٣ - ٢$$

$$= (\text{س}+\text{هـ})^٣ - \text{س}^٣$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{س}+\text{هـ}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٣ - \text{س}^٣}{(\text{س}+\text{هـ}) - \text{س}}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$$

---

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = (\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٣}}$$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = (\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٣}} - \text{س}^{\frac{١}{٣}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{س}+\text{هـ}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^{\frac{١}{٣}} - \text{س}^{\frac{١}{٣}}}{(\text{س}+\text{هـ}) - \text{س}} = \frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{١}{٣}-١} = \frac{١}{٣}\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$$

حيث $\text{س} \in \text{ح} - \{٠\}$

---

⑪ ① $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ $\therefore \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}}$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}+\text{هـ}} - \frac{١}{\text{س}}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{هـ}(\text{س}+\text{هـ})(\text{س})}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{س}+\text{هـ})(\text{س})}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س}^٢}$$

$\therefore$ د(س) غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

---

② $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٣}$

$$\therefore \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{١}{\text{س}+\text{هـ}+٣}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}+\text{هـ}+٣} - \frac{١}{\text{س}+٣}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+٣-\text{س}-\text{هـ}-٣}{\text{هـ}(\text{س}+\text{هـ}+٣)(\text{س}+٣)}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{س}+\text{هـ}+٣)(\text{س}+٣)}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{(\text{س}+٣)^٢}$$

$\therefore$ د(س) غير قابلة للاشتقاق عند س = −٣

---

③ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٢\text{س}-٥}$

$$\therefore \text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \frac{٣}{٢(\text{س}+\text{هـ})-٥}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٣}{٢(\text{س}+\text{هـ})-٥} - \frac{٣}{٢\text{س}-٥}}{\text{هـ}}$$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٦س - ١٥ - ٦س - ٦هـ + ١٥}{هـ(٢س + ٢هـ - ٥)(٢س - ٥)}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-٦هـ}{هـ(٢س + ٢هـ - ٥)(٢س - ٥)}$

$د'(س) = \frac{-٦}{(٢س - ٥)^٢}$

∴ د (س) غير قابلة للاشتقاق عند $س = \frac{٥}{٢}$

---

④ $د(س) = \sqrt{س - ٤}$

$د(س + هـ) = \sqrt{س + هـ - ٤}$

$د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{س+هـ-٤} - \sqrt{س-٤}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س+هـ-٤} + \sqrt{س-٤}}{\sqrt{س+هـ-٤} + \sqrt{س-٤}}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س + هـ - ٤ - س + ٤}{هـ(\sqrt{س+هـ-٤} + \sqrt{س-٤})}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ}{هـ(\sqrt{س+هـ-٤} + \sqrt{س-٤})}$

$د(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س-٤}}$

∵ مجال الدالة $س \geq ٤$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٤

---

(١٢) ① $د(س) = س^٢ - س + ١$

∵ مجال د = ح ∴ د معرفة عند س = ١

$د(١) = (١)^٢ - ١ + ١ = ١$

$د'(١) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(١+هـ)^٢ - (١+هـ) + ١ - ١}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ١ - هـ}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(١+هـ)}{هـ}$ ∴ $د'(١) = ١ \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

---

② $د(س) = ٢س^٢ - ٤$ ∵ مجال د = ح

∴ د معرفة عند س = ٠ ∴ $د(٠) = -٤$

$د'(٠) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(٠+هـ) - د(٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢(٠+هـ)^٢ - ٤ + ٤}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢هـ^٢}{هـ} = ٢هـ$ ∴ $د'(٠) = ٢ \times ٠ = ٠ \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٠

---

③ ∵ مجال د = ح − {−١}

∴ د معرفة عند س = ٢ ∴ $د(٢) = \frac{١}{٣}$

$د'(٢) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{٢+هـ-١}{٢+هـ+١} - \frac{١}{٣}}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٣ + ٣هـ - ٣ - هـ}{٣هـ(٣+هـ)}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢هـ}{٣هـ(٣+هـ)} = \frac{٢}{٩} \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

---

④ $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ∴ مجال د = [١، ∞[

∴ $د(س + هـ) = \sqrt{س + هـ - ١}$

$د(س + هـ) - د(س) = \sqrt{س + هـ - ١} - \sqrt{س - ١}$

$د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{س+هـ-١} - \sqrt{س-١}}{هـ}$

بالضرب × مرافق البسط

$د'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ-١) - (س-١)}{هـ(\sqrt{س+هـ-١} + \sqrt{س-١})}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$ ، $س > ١$

لاحظ أن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١ لعدم وجود النهاية

$د'(٥) = \frac{١}{٢\sqrt{٥-١}} = \frac{١}{٤}$

---

(١٣) مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

$د(٢) = ٥ - (٢)^٢ = ١$

$د'(٢^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{[(٢+هـ)^٢ - ٣] - ١}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٣ - ١}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{٤هـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{هـ(٤+هـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} (٤ + هـ) = ٤ + ٠ = ٤$

$د'(٢^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{[٥ - (٢+هـ)^٢] - ١}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{٥ - ٤ - ٤هـ - هـ^٢ - ١}{هـ}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(-٤-\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} (-٤-\text{هـ}) = -٤ - ٠ = -٤$

$\therefore$ د$'(٢^-) = -٤$ $\because$ د$'(٢^+) \neq$ د$'(٢^-)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

(١٤) مجال د = ح $\therefore$ الدالة معرفة عند س = ٢

د$(٢) = \sqrt{٢-٢} =$ صفر

د$'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢+\text{هـ}-٢} - \text{صفر}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{هـ}}}{\text{هـ}}$

$\underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}}} = \dfrac{١}{٠} =$ غير معرفة

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

(١٥) مجال د = ح $\therefore$ الدالة معرفة عند س = ١

$\therefore$ د$(١) = (١)^{٢} + ٢ = ٣$

د$'(١^-) = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{[(١+\text{هـ})^{٢}+٢]-٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{١+٢\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}+٢-٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(٢+\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} (٢+\text{هـ}) = ٢$ $\therefore$ د$'(١^-) = ٢$

د$'(١^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{١+\text{هـ}+٢-٣}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$

$\therefore$ د$'(١^+) = ١$ $\because$ د$'(١^+) \neq$ د(١^-)

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٦) $\because$ مجال د = ح $- \{١\}$ $\therefore$ الدالة غير معرفة عند س = ١

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند س = ١

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٧) مجال د = ح $\therefore$ الدالة معرفة عند س = ١

د$(١) = ٤ - (١)^{٢} = ٣$

د$'(١^-) = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{[٤-(١+\text{هـ})^{٢}]-٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{٤-١-٢\text{هـ}-\text{هـ}^{٢}-٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢\text{هـ}-\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(-٢-\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} (-٢-\text{هـ}) = -٢$ $\therefore$ د$'(١^-) = -٢$

د$(١^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{٢(١+\text{هـ})+١-٣}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{٢+٢\text{هـ}+١-٣}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٢$

د$'(١^+) = ٢$ $\because$ د$'(١^+) \neq$ د$'(١^-)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٨) د(س) = |س - ٢|

$\therefore$ د(س) = { س - ٢ عندما س $\geq$ ٢ ؛ ٢ - س عندما س $<$ ٢ }

بحث اتصال الدالة أولاً

د$(٢) = ٢ - ٢ =$ صفر

د$(٢^+) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (\text{س}-٢) = ٢-٢ = ٠$

د$(٢^-) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} (٢-\text{س}) = ٢-٢ = ٠$

$\therefore$ الدالة متصلة عند س = ٢ $\because$ مجال د = ح

$\therefore$ الدالة معرفة عند س = ٢ $\therefore$ د$(٢) = ٠$

د$'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

د$'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢+\text{هـ}-٢)-(٠)}{\text{هـ}}$

د$'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$

د$'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

د$'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{٢-(٢+\text{هـ})-٠}{\text{هـ}}$

د$'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -١$ $\therefore$ د$'(٢^+) \neq$ د$'(٢^-)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

(١٩) د(س) = س |س|

$\therefore$ د(س) = { $\text{س}^{٢}$ عندما س $\geq$ ٠ ؛ $-\text{س}^{٢}$ عندما س $<$ ٠ }

لبحث الاتصال أولاً عند س = ٠

د$(٠) = (٠)^{٢} = ٠$

د$(٠^+) = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} = (٠)^{٢} = ٠$

$\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}} -\text{س}^٢ = -(٠)^٢ = ٠$

$\therefore \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠) = \text{صفر}$

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

لبحث قابلية الاشتقاق عند س = ٠

$\text{د}'(٠^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٠+\text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^٢ - ٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \text{هـ} = \text{صفر}$

$\text{د}'(٠^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٠+\text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

$\text{د}'(٠^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{-\text{هـ}^٢ - ٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} -\text{هـ} = \text{صفر}$

$\therefore \text{د}'(٠^+) = \text{د}'(٠^-) = \text{صفر}$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٠

---

٢٠ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٤)|\text{س}|$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٤\text{س} & \text{عندما س} \geq ٠ \\ -\text{س}^٢ + ٤\text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

ببحث الاتصال عند س = ٠

نجد الدالة متصلة عند س = ٠

ببحث قابلية الاشتقاق عند س = ٠ $\Leftarrow$ د(٠) = ٠

$\text{د}'(٠^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٠+\text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^٢ - ٤\text{هـ} - ٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} (\text{هـ} - ٤) = ٠ - ٤ = -٤$

$\text{د}'(٠^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٠+\text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

$\text{د}'(٠^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{-\text{هـ}^٢ + ٤\text{هـ} - ٠}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(-\text{هـ} + ٤)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} -\text{هـ} + ٤ = ٤$

$\therefore \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

---

٢١ ∵ د(س) متصلة عند س = ٢ $\therefore \text{د}(٢^+) = \text{د}(٢^-)$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (\text{أ س}^٢ + ١) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} (٤\text{س} - ٣)$

$\text{أ}(٢)^٢ + ١ = ٤ \times ٢ - ٣$

$٤\text{أ} = ٥ - ١$ $\therefore ٤\text{أ} = ٤$ $\therefore \text{أ} = ١$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{عندما س} \geq ٢ \\ ٤\text{س} - ٣ & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$

∵ مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

$\therefore \text{د}(٢) = (٢)^٢ + ١ = ٥$

$\text{د}'(٢^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(٢+\text{هـ})^٢ + ١ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٤ + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢ + ١ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(٤+\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} (٤ + \text{هـ}) = ٤$

$\text{د}'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

$\text{د}'(٠^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٤(٢+\text{هـ}) - ٣ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٨ + ٤\text{هـ} - ٨}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٤$

$\because \text{د}'(٢^+) = \text{د}'(٢^-)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

---

٢٢ ∵ د متصلة عند س = ١ $\therefore \text{د}(١^+) = \text{د}(١^-)$

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} (٣ - \text{أ س}^٢) = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١)$

$٣ - \text{أ} \times ١^٢ = ١ + ١$ $\therefore ٣ - \text{أ} = ٢$

$٣ - ٢ = \text{أ}$ $\therefore \text{أ} = ١$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{عندما س} \leq ١ \\ ٣ - \text{س}^٢ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$

∵ مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ١

$\text{د}(١) = ١ + ١ = ٢$

$\text{د}'(١^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{هـ} + ١ - ٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$

$\text{د}'(١^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$\text{د}'(١^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{[٣ - (١+\text{هـ})^٢] - ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٣ - ١ - ٢\text{هـ} - \text{هـ}^٢ - ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{-٢\text{هـ} - \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(-٢ - \text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نهـا}} (-٢ - \text{هـ}) = -٢$

∵ د′(١+) ≠ د′(١−)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

(٢٣) ∵ د متصلة عند س = ١ ∴ د(١+) = د(١−)

نهـا (س←١+) (س + ٢) = نهـا (س←١−) (أ / س)

١ + ٢ = أ / ١ ∴ أ = ٣

∴ د(س) = { ٣ / س عندما ٠ < س ≤ ١ ، س + ٢ عندما س > ١ }

د′(١−) = نهـا (هـ←٠−) [د(١+هـ) − د(١)] / هـ

= نهـا (هـ←٠−) [٣/(١+هـ) − ٣/١] / هـ = نهـا (هـ←٠−) [(٣ − ٣ − ٣هـ)/(١+هـ)] / هـ

= نهـا (هـ←٠−) [−٣هـ/(١+هـ)] / هـ = نهـا (هـ←٠−) −٣/(١+هـ) = −٣

د′(١+) = نهـا (هـ←٠+) [د(١+هـ) − د(١)] / هـ

= نهـا (هـ←٠+) (١ + هـ + ٢ − ٣) / هـ = نهـا (هـ←٠) هـ / هـ = ١

∵ د′(١+) ≠ د′(١−)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

(٢٤) ∵ د متصلة عند س = ٢ ∴ د(٢+) = د(٢−)

∴ نهـا (س←٢+) (أ س^٣) = نهـا (س←٢−) (٣س + ٢)

أ × ٨ = ٣ × ٢ + ٢ (÷ ٨)

٨أ = ٨ ∴ أ = ١

∴ د(س) = { ٣س + ٢ عندما س < ٢ ، س^٣ عندما س ≥ ٢ }

د(٢) = (٢)^٣ = ٨

د′(٢−) = نهـا (هـ←٠−) [د(٢+هـ) − د(٢)] / هـ

= نهـا (هـ←٠−) [٣(٢+هـ) + ٢ − ٨] / هـ

= نهـا (هـ←٠−) (٦ + ٣هـ + ٢ − ٨) / هـ = نهـا (هـ←٠−) ٣هـ / هـ = ٣

د′(٢+) = نهـا (هـ←٠+) [د(٢+هـ) − د(٢)] / هـ

= نهـا (هـ←٠+) [(٢+هـ)^٣ − ٨] / هـ = نهـا (هـ←٠+) [(٢+هـ)^٣ − ٢^٣] / هـ

= ٣ × ٢^٢ = ١٢ ∵ د′(٢+) ≠ د′(٢−)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

(٢٥) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ النهاية اليمنى للدالة د = النهاية اليسرى للدالة د

∴ نهـا (هـ←٠+) (٢س + ٣) = نهـا (هـ←٠−) (أ س^٢ + ٨ س − ١)

٢ × ٢ + ٣ = أ(٢)^٢ + ٨ × ٢ − ١

٤أ + ١٥ = ٧ ⟸ ٤أ = −٨ ∴ أ = −٢

(٢٦) (١) ∵ د(س) = أ س^٢ + ب

د(س + هـ) = أ(س + هـ)^٢ + ب

= أ س^٢ + ٢أ س هـ + هـ^٢ + ب

د(س + هـ) − د(س)

= أ س^٢ + ٢أ س هـ + هـ^٢ + ب − أ س^٢ − ب

= ٢أ س هـ + هـ^٢ = هـ(٢أ س + هـ)

د′(س) = نهـا (هـ←٠) [د(س+هـ) − د(س)] / هـ

= نهـا (هـ←٠) هـ(٢أ س + هـ) / هـ = نهـا ٢أ س + هـ = ٢أ س

(٢) ∵ ميل المماس عند (س = ٢) = ١٢

∴ ٢أ × ٢ = ١٢ ∴ ٤أ = ١٢ ∴ أ = ٣

∵ النقطة (٢ ، −٣) ∈ للمنحنى د

∴ د(٢) = −٣ ∴ −٣ = ٣ × (٢)^٢ + ب

∴ −٣ = ١٢ + ب ∴ ب = −١٥

(٢٧) (١) د(س) = أ/س + ب ، د(س + هـ) = أ/(س+هـ) + ب

د(س + هـ) − د(س) = أ/(س+هـ) + ب − أ/س − ب

= أ/(س+هـ) − أ/س

د′(س) = نهـا (هـ←٠) [د(س+هـ) − د(س)] / هـ

= نهـا (هـ←٠) [أ/(س+هـ) − أ/س] / هـ = نهـا (هـ←٠) [(أس − أس − أهـ) / س(س+هـ)] / هـ

= نهـا (هـ←٠) [−أهـ / س(س+هـ)] / هـ = نهـا (هـ←٠) −أ / س(س+هـ)

= نهـا (هـ←٠) −أ / س^٢ ∴ د′(س) = −أ / س^٢

② ∵ ميل المماس عند (س = ١) = −٣

∴ $-٣ = \frac{-أ}{(١)^٢}$ عندما ∴ $-٣ = -أ$ ∴ أ = ٣

∵ النقطة (١، ٤) ∈ للمنحنى د ∴ د(١) = ٤

∵ $د(س) = \frac{أ}{س} + ب$ ∴ $٤ = \frac{٣}{١} + ب$ ∴ ب = ١

٢٨ الشكل ④ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

٢٩ ① $د'(١^+) = \frac{٣}{٢} > ٠$

$د'(١^-) < ٠$

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

② د(س) ثابتة عند س = ١

∴ د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ١

$د'(١)$ = صفر

③ $د'(١^+) = \frac{٢}{١} = ٢ >$ صفر

$د'(١^-) <$ صفر

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

④ $د'(١^+) < ٠$ ، $د'(١^-) = ١ > ٠$

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

٣٠ ① ٣ ② −٢ ③ ٣

④ ١٢ ⑤ غير موجودة

٣١ $د(س) = \sqrt{(س - ٣)^٢}$ ∴ د(س) = |س − ٣|

∴ د(س) = { س − ٣ عندما س ≥ ٣ ؛ −س + ٣ عندما س < ٣ }

∴ مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٣

د(٣) = ٣ − ٣ = ٠

$د'(٣^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٣+هـ-٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{هـ}{هـ} = ١$

$د'(٣^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-٣-هـ+٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-هـ}{هـ} = -١$

∵ $د'(٣^+) \neq د'(٣^-)$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

٣٢ د(س) = { $س^٢ + ١$ عندما س ≥ ١ ؛ |٢س| عندما −١ < س < ١ }

د(س) = { $س^٢+١$ س ≥ ١ ؛ ٢س عندما ٠ ≤ س < ١ ؛ −٢س عندما −١ < س < ٠ }

بحث الاتصال عند س = ١ ⟸ $د(١) = (١)^٢ + ١ = ٢$

$د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (س^٢+١) = ١^٢ + ١ = ٢$

$د(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (٢س) = ٢ \times ١ = ٢$

∵ $د(١^+) = د(١^-) = ٢$

∴ الدالة متصلة عند س = ١

$د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{(١+هـ)^٢ + ١ - ٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{١+٢هـ+هـ^٢-١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{هـ(٢+هـ)}{هـ} = ٢$

$د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢(١+هـ)-٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢$

∵ $د'(١^+) = د'(١^-) = ٢$

∴ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ١

٣٣ د(س) = { $-٥س^٢ + ٧س + ١$ عندما س ≤ ١ ؛ $\frac{٣}{|س|}$ عندما س > ١ }

$\frac{٣}{|س|}$ = { $\frac{٣}{س}$ عندما س > ٠ ؛ $\frac{-٣}{س}$ عندما س < ٠ }

∴ د(س) = { $-٥س^٢ + ٧س + ١$ عندما س ≤ ٠ ؛ $\frac{٣}{س}$ عندما س > ٠ }

بحث الاتصال عند س = ١

$د(١) = -٥(١)^٢ + ٧ \times ١ + ١ = ٣$

$د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} \frac{٣}{س} = \frac{٣}{١} = ٣$

$د(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (-٥س^٢ + ٧س + ١)$

$= -٥(١)^٢ + ٧ \times ١ + ١ = ٣$

∵ $د(١^+) = د(١^-) = د(١) = ٣$

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

$د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-٥(١+هـ)^٢ + ٧(١+هـ) + ١ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-٥ - ١٠هـ - ٥هـ^٢ + ٧ + ٧هـ - ٢}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{هـ(-٣-٥هـ)}{هـ} = \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} (-٣-٥هـ) = -٣$

$د'(١^{+}) = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٣}{١+هـ}-٣}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣-٣-٣هـ}{هـ(١+هـ)} = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{-٣}{١+هـ} = -٣$

$د'(١^{+}) = د'(١^{-}) = -٣$

∴ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ١

---

(٣٤) ∵ $|س| \leq ١$ ∴ $-١ \leq س \leq ١$

∵ $|س| > ١$ ∴ $س \in ح - [-١، ١]$

$د(س) = \begin{cases} ٦س+١١ & \text{عندما } |س| \leq ١ \\ س^{٢}+٤ & \text{عندما } |س| > ١ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} س^{٢}+٤ & \text{عندما } س < -١ \\ ٦س+١١ & -١ \leq س \leq ١ \\ س^{٢}+٤ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

بحث الاتصال أولاً عند س = ١ ⟸ $د(١) = ٦ \times ١ + ١١ = ١٧$

$د(١^{+}) = \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} (س^{٢}+٤) = (١)^{٢}+٤ = ٥$

$د(١^{-}) = \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}} (٦س+١١) = ٦\times١+١١ = ١٧$

∵ $د(١^{+}) \neq د(١^{-})$

∴ الدالة غير متصلة عند س = ١

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

---

(٣٥) ∵ الدالة متصلة عند س = ١ ∴ $د(١^{+}) = د(١^{-})$

$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} (هـ س^{٢}+٤م) = \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}} (م س + ٣هـ)$

$هـ(١)^{٢}+٤م = م\times ١ + ٣هـ$

$هـ + ٤م = م + ٣هـ$ ∴ $٤م - م = ٣هـ - هـ$

$٣م = ٢هـ \leftarrow (١)$ ∵ $د(١) = ١١$

∴ $هـ(١)^{٢} + ٤م = ١١$ ∴ $هـ + ٤م = ١١$

∴ $هـ = ١١ - ٤م \leftarrow (٢)$

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $٣م = ٢(١١-٤م)$ ∴ $٣م = ٢٢ - ٨م$

$١١م = ٢٢$ ∴ $م = ٢$

بالتعويض في (٢) عن قيمة م

$هـ = ١١ - ٤\times٢ = ٣$ ∴ $هـ = ٣$

∴ $د(س) = \begin{cases} ٢س+٩ & \text{عندما } س < ١ \\ ٣س^{٢}+٨ & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$

∵ مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ١

$د(١) = ٣ \times (١)^{٢} + ٨ = ١١$

$د'(١^{+}) = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{[٣(١+هـ)^{٢}+٨]-١١}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣+٣هـ+٨-١١}{هـ} = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$

$د'(١^{-}) = \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{[٢(١+هـ)+٩]-١١}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢+٢هـ+٩-١١}{هـ} = \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢$

∵ $د'(١^{+}) \neq د'(١^{-})$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

تمارين (٣) على قواعد الاشتقاق

(١) ① متصلة ② ٣

③ $\frac{١٠}{٤١}$ ④ -٤

---

⑤ $د'(١^{+}) = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(١+هـ)^{٣}+٢-(١)^{٣}-٢}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(١+هـ)^{٣}-١^{٣}}{هـ} = ٣\times١^{٢} = ٣$

$د'(١^{-}) = \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(١+هـ)^{٢}-١-١^{٢}+١}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(١+هـ)^{٢}-١^{٢}}{هـ} = ٢\times١^{١} = ٢$

∵ $د'(١^{+}) \neq د'(١^{-})$

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

---

⑥ $د(س) = \begin{cases} س-٢ & \text{عندما } س \geq ٢ \\ ٢-س & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$

$د'(٢^{+}) = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{د(٢+هـ)-د(٢)}{هـ}$

$= \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢+هـ-٢-٠}{هـ} = \underset{هـ\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{هـ}{هـ}$

$\text{د}'(2^{+}) = 1$

$\text{د}'(2^{-}) = \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{2-2-\text{هـ}-0}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$\therefore \text{د}'(2^{-}) = -1$

$\because \text{د}'(2^{+}) \neq \text{د}'(2^{-})$

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

٢

① صفر ② صفر ③ 7س^{6}

④ 6س ⑤ $\frac{-3}{\text{س}^{4}}$ ⑥ $\frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

⑦ $\frac{-3}{5}\text{س}^{-\frac{8}{5}}$ ⑧ $\frac{1}{4}\text{س}^{-\frac{3}{4}}$ ⑨ $\frac{-1}{3}\text{س}^{-\frac{4}{3}}$

⑩ $3\text{س}^{2}+2$ ⑪ $10\text{س}+3$ ⑫ $7\sqrt{2}\,\text{س}^{6} - \text{بس}^{4}$

٣

① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4$

② $\text{د}'(\text{س}) = 6\text{س}^{2} + 2$

③ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س}^{2} - 8\text{س} + 9$

④ $\text{ص}' = 2\text{س}^{5} - 10\text{س}^{4}$

⑤ $\text{ص}' = 2\text{س}^{2} + \text{س} + 1$

⑥ $\text{ص} = \text{س}^{5} + 2\text{س}^{4} + 3\text{س}^{2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\text{س}^{4} + 8\text{س}^{3} + 6\text{س}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = 2\text{س}^{4} - 3\text{س}^{2} + 2\text{س}$

$\text{د}'(\text{س}) = 8\text{س}^{3} - 6\text{س} + 2$

⑧ $\text{ص}' = -2\text{س}^{-2} + 6\text{س}^{-3} + 5\text{س}^{-6}$

⑨ $\text{ص} = 3\text{س}^{2} - \frac{3}{2}\text{س}^{-2} - \text{س}^{-1} + 4\text{س}$

$\text{ص}' = 6\text{س} + 3\text{س}^{-3} + \text{س}^{-2} + 4$

⑩ $\text{ص} = 3\text{س}^{3} - \text{س}\sqrt{\text{س}} = 3\text{س}^{3} - \text{س}^{\frac{3}{2}}$

$\text{ص}' = 9\text{س}^{2} - \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}} = 9\text{س}^{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\text{س}}$

⑪ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{2}}\left(2\text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{س}^{\frac{3}{2}}\right)$

$\text{ص} = 2\text{س}^{3} + \text{س}^{2} \Leftarrow \text{ص}' = 6\text{س}^{2} + 2\text{س}$

⑫ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{3} + 2\text{س} - 3$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = 3\text{س}^{2} + 2$

⑬ $\text{ص} = 3\text{س} + 2 - 7\text{س}^{-2}$

$\text{ص}' = 3 + 14\text{س}^{-3} = \frac{14}{\text{س}^{3}} + 3$

---

⑭ $\text{ص} = 4\text{س} - 3 + 2\text{س}^{-\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4 - \text{س}^{-\frac{3}{2}}$

---

⑮ $\text{ص} = \frac{4\text{س}^{2} - \text{س} + 3}{\text{س}^{\frac{1}{2}}}$

$\text{ص} = 4\text{س}^{\frac{3}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}} + 3\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\text{س}^{-\frac{3}{2}}$

---

⑯ $\text{ص} = 2\text{س}^{6} + 3\text{س}^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 12\text{س}^{5} + \frac{3}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} = 12\text{س}^{5} + \frac{3}{2\sqrt{\text{س}}}$

---

⑰ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{2}{3}} - 5\text{س}^{\frac{1}{3}} + 9 - 3\text{س}^{-\frac{1}{3}} - 4\text{س}^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{3}\text{س}^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}\text{س}^{-\frac{2}{3}} + \text{س}^{-\frac{4}{3}} + \frac{8}{3}\text{س}^{-\frac{5}{3}}$

---

⑱ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{2} - 9}{\text{س}^{2}}$ $\therefore \text{ص} = 1 - 9\text{س}^{-2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 18\text{س}^{-3}$

---

⑲ $\text{ص} = \frac{(\text{س}-4)(\text{س}+4)}{\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{س}^{2} - 16}{\text{س}^{\frac{1}{2}}} = \text{س}^{\frac{3}{2}} - 16\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

$\text{ص}' = \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}} + 8\text{س}^{-\frac{3}{2}}$

---

⑳ $\text{ص} = \text{س}^{2} + \text{س}^{2} + 2\text{س} + 1 - \text{س} + 5$

$\text{ص} = 2\text{س}^{2} + \text{س} + 6 \Leftarrow \text{ص}' = 4\text{س} + 1$

---

٤ ① -1 ② 4 ③ صفر

٥ ① 45° ② 135° ③ صفر ④ 60°

---

٦ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - \frac{1}{\text{س}^{2}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(1,-1)} = 2 \times 1 - \frac{1}{1} = 1$

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظا هـ} = 1$ $\therefore \text{ق}(\angle \text{هـ}) = 45^{\circ}$

$\text{ق}(\angle \text{هـ}) = \frac{\pi}{4}$

---

٧ ① $\text{ص} = (2\text{س} - 3)(3\text{س} + 1)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س} - 3) \times 3 + (3\text{س} + 1) \times 2$

$= 6\text{س} - 9 + 6\text{س} + 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 12\text{س} - 7$

② $\text{ص} = (\text{س}^{2} + 1)(\text{س}^{3} - 4)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^{2} + 1) \times (3\text{س}^{2}) + (\text{س}^{3} - 4) \times (2\text{س})$

$= 3\text{س}^{4} + 3\text{س}^{2} + 2\text{س}^{4} - 8\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\text{س}^{4} + 3\text{س}^{2} - 8\text{س}$

---

③ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س} + 2)(2\text{س} + 1) + (\text{س}^{2} + \text{س} - 1) \times 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}^{2} + 5\text{س} + 2 + \text{س}^{2} + \text{س} - 1$

$= 3\text{س}^{2} + 6\text{س} + 1$

---

④ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س} - 3)(2\text{س} + 2) + (\text{س}^{2} + 2\text{س} - 4) \times 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}^{2} - 4\text{س} - 6 + \text{س}^{2} + 2\text{س} - 4$

$= 3\text{س}^{2} - 2\text{س} - 10$

---

⑤ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س} + 1)(8\text{س} - 2) + (4\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1)(2)$

$= 16\text{س}^{2} + 4\text{س} - 2 + 8\text{س}^{2} - 4\text{س} + 2 = 24\text{س}^{2}$

---

⑥ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^{2} + 3)(3\text{س}^{2} - 3) + (\text{س}^{3} - 3\text{س} + 1)$

$\times (2\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س}^{4} + 6\text{س}^{2} - 9 + 6\text{س}^{4} - 6\text{س}^{2} + 2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 12\text{س}^{4} + 2\text{س} - 9$

---

⑦ $\text{ص} = (\text{س}^{2} - \text{س}^{\frac{1}{2}})(\text{س}^{2} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^{2} - \text{س}^{\frac{1}{2}}) \times (2\text{س} + 2 \times \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}})$

$+ (\text{س}^{2} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}})(2\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^{2} - \sqrt{\text{س}})(2\text{س} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}) + (\text{س}^{2} + 2\sqrt{\text{س}})$

$(2\text{س} - \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}^{3} + \frac{\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{س}}} - 2\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1 + 2\text{س}^{3} -$

$\frac{\text{س}^{2}}{2\sqrt{\text{س}}} + 4\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^{3} + \frac{\text{س}^{2}}{2\sqrt{\text{س}}} + 2\text{س}\sqrt{\text{س}} - 2$

---

⑧ $\text{ص} = (2\text{س}^{4} - 3\text{س} + 4)(\text{س}^{2} + \text{س}^{\frac{1}{2}} + 2\text{س}^{-1})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س}^{4} - 3\text{س} + 4)(2\text{س} + \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}} - 2\text{س}^{-2})$

$+ (2\text{س}^{2} + \text{س}^{\frac{1}{2}} + 2\text{س}^{-1})(8\text{س}^{3} - 3)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^{5} + \text{س}^{\frac{7}{2}} - 4\text{س}^{2} - 6\text{س}^{2} - \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}}$

$+ 6\text{س}^{-1} + 8\text{س} + 2\text{س}^{-\frac{1}{2}} - 8\text{س}^{-2} + 8\text{س}^{5} -$

$3\text{س}^{2} + 8\text{س}^{\frac{7}{2}} - 3\text{س}^{\frac{1}{2}} + 16\text{س}^{2} - 6\text{س}^{-1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 12\text{س}^{5} + 3\text{س}^{2} + 8\text{س} + 16\text{س}^{\frac{5}{2}} + 9\text{س}^{\frac{7}{2}} -$

$\frac{9}{2}\text{س}^{\frac{1}{2}} + 2\text{س}^{-\frac{1}{2}} - 8\text{س}^{-2} - 6\text{س}^{-1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 12\text{س}^{5} - 13\text{س}^{2} + 8\text{س} + 16\text{س}^{2}\sqrt{\text{س}}$

$+ 9\text{س}^{3}\sqrt{\text{س}} - \frac{9}{2}\sqrt{\text{س}} + \frac{2}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{8}{\text{س}^{2}} - \frac{6}{\text{س}}$

---

⑨ $\text{ص} = \text{س}\left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right) = \text{س}^{2} - 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

---

⑩ $\text{ص} = (2\text{س}^{3} - \text{س}^{2})(\text{س}^{2} + 3\text{س} - 2)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س}^{3} - \text{س}^{2})(2\text{س} + 3) + (\text{س}^{2} + 3\text{س} - 2)$

$(6\text{س}^{2} - 2\text{س})$

$= 4\text{س}^{4} + 6\text{س}^{3} - 2\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 6\text{س}^{4} - 2\text{س}^{3}$

$+ 18\text{س}^{3} - 6\text{س}^{2} - 12\text{س}^{2} + 4\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10\text{س}^{4} + 20\text{س}^{3} - 21\text{س}^{2} + 4\text{س}$

---

8 ① $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} + 2}$ $\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} + 2) \times 1 - \text{س} \times 1}{(\text{س} + 2)^{2}}$

$\text{ص}' = \frac{2}{(\text{س} + 2)^{2}}$

---

② $\text{ص} = \frac{\text{س} - 1}{2\text{س} + 3}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(2\text{س} + 3) \times 1 - (\text{س} - 1) \times 2}{(2\text{س} + 3)^{2}}$

$= \frac{2\text{س} + 3 - 2\text{س} + 2}{(2\text{س} + 3)^{2}}$ $\therefore \text{ص}' = \frac{5}{(2\text{س} + 3)^{2}}$

---

③ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{2} - 9}{\text{س} - 3} = \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{\text{س} - 3}$

$\text{ص} = \text{س} + 3 \Leftarrow \text{ص}' = 1$

④ $\frac{دص}{دس} = \frac{(٥س+١)\times٥ - (٥س-٢)\times٥}{(٥س+١)^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢٥س+٥-٢٥س+١٠}{(٥س+١)^٢} = \frac{١٥}{(٥س+١)^٢}$

---

⑤ $ص' = \frac{(س^٢-٣)\times١ - س(٢س)}{(س^٢-٣)^٢} = \frac{-س^٢-٣}{(س^٢-٣)^٢}$

---

⑥ $ص' = \frac{(س^٢+١)\times٢س - (س^٢-٣)\times٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$= \frac{٢س^٣+٢س-٢س^٣+٦س}{(س^٢+١)^٢} = \frac{٨س}{(س^٢+١)^٢}$

---

⑦ $ص' = \frac{(س+٢)(٢س+٤) - (س^٢+٤س+٢)\times١}{(س+٢)^٢}$

$= \frac{٢س^٢+٤س+٤س+٨-س^٢-٤س-٢}{(س+٢)^٢}$

$= \frac{س^٢+٤س+٦}{(س+٢)^٢}$

---

⑧ $\frac{دص}{دس} =$

$\frac{(س^٢-٥س+١)(٢س+٢) - (س^٢+٢س+٥)(٢س-٥)}{(س^٢-٥س+١)^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٧س^٢-٨س+٢٧}{(س^٢-٥س+١)^٢}$

---

⑨ $ص = \frac{(س-١)(س+١)}{س^٢+١} = \frac{س^٢-١}{س^٢+١}$

$ص' = \frac{(س^٢+١)\times٢س - (س^٢-١)\times٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$ص' = \frac{٤س}{(س^٢+١)^٢}$

---

⑩ $ص = \frac{س}{س+٢} + \frac{٢س}{س-٢}$

$= \frac{س(س-٢)+٢س(س+٢)}{(س+٢)(س-٢)}$

$= \frac{س^٢-٢س+٢س^٢+٤س}{س^٢-٤} = \frac{٣س^٢+٢س}{س^٢-٤}$

$ص' = \frac{(س^٢-٤)(٦س+٢) - (٣س^٢+٢س)\times٢س}{(س^٢-٤)^٢}$

$= \frac{٦س^٣-٢٤س+٢س^٢-٨-٦س^٣-٤س^٢}{(س^٢-٤)^٢}$

$= \frac{-٢س^٢-٢٤س-٨}{(س^٢-٤)^٢}$

---

⑨ $\frac{دص}{دس} = \frac{(س^٢+١)\times١ - س\times٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{س^٢+١-٢س^٢}{(س^٢+١)^٢}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-س^٢+١}{(س^٢+١)^٢}$

عند س = ٢

$\therefore$ الميل $= \frac{دص}{دس} = \frac{-٤+١}{(٤+١)^٢}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{٢٥}$

---

⑩ $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢-٦س-٩$ عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$

$٣س^٢-٦س-٩ = ٠$ (÷٣)

$س^٢-٢س-٣ = ٠$ $\therefore (س-٣)(س+١) = ٠$

س = ٣ ، س = −١

---

⑪ $د'(س) = ٣س^٢-٥$

عندما $د'(س) = ٧$ $\therefore ٣س^٢-٥ = ٧$

$٣س^٢ = ١٢$ (÷٣)

$س^٢ = ٤$ $\therefore س = \pm٢$

---

⑫ $د'(س) = (٢س-٣)\times٣ + (٣س+١)\times٢$

$د'(س) = ٦س-٩+٦س+٢$

$\therefore د'(س) = ١٢س-٧$ عندما $د'(س) = ٥$

$\therefore ١٢س-٧ = ٥$

$١٢س = ١٢$ $\therefore س = ١$

---

⑬ $د(س) = \frac{س}{س^٢+١}$

ميل المماس $= \frac{دص}{دس} = \frac{(س^٢+١)\times١ - س\times(٢س)}{(س^٢+١)^٢}$

$= \frac{١-س^٢}{(س^٢+١)^٢}$ $\because$ ميل المماس = صفر

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٠$ $\therefore \frac{١-س^٢}{(س^٢+١)^٢} = ٠$

$\therefore ١-س^٢ = ٠$ $\therefore (١-س)(١+س) = ٠$

س = ١ ، س = −١

---

⑭ $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢-أ$ $\because د'(١) = -١$

$\therefore -١ = ٣(١)^٢-أ$ $\therefore -١-٣ = -أ$ $\therefore أ = ٤$

---

⑮ $\because د(س) = أس^٣ + ب س$ ، بوضع س = ١

$\therefore د(١) = أ + ب$ $\therefore أ + ب = ٢$ ← ①

، $د'(س) = ٣أس^٢ + ب$

$\therefore$ د'(١) = ٣أ + ب $\therefore$ ٣أ + ب = ٠ ← ②

وبحل ①، ② بالطرح $\therefore$ أ = -١ ، ب = ٣

(١٦) ٢س + أ = -١ $\Leftarrow$ ٤ + أ = -١ $\therefore$ أ = -٥

$\because$ (٢، -٢) $\in$ المنحنى

-٢ = ٤ + (-٥) × ٢ + ب $\Leftarrow$ -٢ = -٦ + ب $\therefore$ ب = ٤

(١٧) $ص = (س^2 - ١)(س^2 + ١)(س^4 + ١)(س^8 + ١)(س^{16} + ١)$

$ص = (س^4 - ١)(س^4 + ١)(س^8 + ١)(س^{16} + ١)$

$ص = (س^8 - ١)(س^8 + ١)(س^{16} + ١)$

$ص = (س^{16} - ١)(س^{16} + ١)$

$ص = س^{32} - ١$ $\therefore \frac{دص}{دس} = ٣٢ س^{31}$

(١٨) $ص = س^2 - ٤$ نقط التقاطع مع محور السينات بوضع ص = ٠

$\frac{دص}{دس} = ٢س$ ، $س^2 - ٤ = ٠$

$\Leftarrow$ (س - ٢)(س + ٢) = ٠

س = ٢	س = -٢
$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢} = ٢ \times ٢ = ٤$	$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-٢} = ٢ \times (-٢) = -٤$

(١٩) $\frac{دص}{دس} = ٢س - ٣$ نقط التقاطع مع محور الصادات عند س = ٠

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٠} = ٢ \times ٠ - ٣ = -٣$

(٢٠) معادلة المستقيم ص = ٤ - ٢س

بالتعويض فى معادلة المنحنى $\therefore س^2 - ٤ = ٤ - ٢س$

$س^2 + ٢س - ٨ = ٠$ $\Leftarrow$ (س + ٤)(س - ٢) = ٠

س = -٤ $\Leftarrow$ ص = ١٢ ، س = ٢ $\Leftarrow$ ص = ٠

النقط هى (-٤، ١٢)، (٢، ٠)

الميل = ٢س عند س = -٤ $\therefore$ الميل = -٨

عند س = ٢ $\therefore$ الميل = ٤

(٢١) ميل المماس = $\frac{دص}{دس} = ٣س^2 + ٦س$ ، ميل المماس = ظا هـ

$د'(٢) = ٣(٢)^2 + ٦(٢)$ = مقدار موجب $\therefore$ الزاوية حادة

$\frac{دص}{دس}\Big|_{(-١)} = ٣(-١)^2 + ٦(-١) = -٣$ مقدار سالب

$\therefore$ الزاوية منفرجة

(٢٢) $\frac{دص}{دس} = ٣أس^2 + ٢ب س$ ، عند س = ١

٨ = ٣أ + ٢ب ← ①

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$\therefore ٧ = \frac{(٨أ + ٤ب) - (-أ + ب)}{٣}$ $\therefore$ ٧ = ٣أ + ب ← ②

بحل ①، ② ينتج أن ب = ١ ، أ = ٢

(٢٣) ص(٢س + ٤) = ٣س + ١

$ص = \frac{٣س + ١}{٢س + ٤}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(٢س + ٤) \times ٣ - (٣س + ١) \times ٢}{(٢س + ٤)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٦س + ١٢ - ٦س - ٢}{(٢س + ٤)^2}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١٠}{(٢س + ٤)^2}$

عند س = -١

$\frac{دص}{دس} = \frac{١٠}{(٢ \times -١ + ٤)^2} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

(٢٤) $ص = \frac{٤}{أس + ب}$ $\because$ النقطة (١، -٤) $\in$ للمنحنى

$\therefore -٤ = \frac{٤}{أس + ب}$ $\therefore$ أ + ب = -١ ← (١)

$\frac{دص}{دس} = \frac{(أس + ب) \times ٠ - ٤ \times أ}{(أس + ب)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٤أ}{(أس + ب)^2}$

ميل المماس = -٨ عند س = ١

$-٨ = \frac{-٤أ}{(أ \times ١ + ب)^2}$ $\therefore -٨ = \frac{-٤أ}{(أ + ب)^2}$ (÷ -٤)

$٢ = \frac{أ}{(-١)^2}$ $\therefore$ أ = ٢ بالتعويض فى (١) عن أ

$\therefore$ ٢ + ب = -١ $\therefore$ ب = -٣

(٢٥) ① ٣ ② ٨٠ ③ -١ ④ $\frac{-١}{١٦}$

⑤ ٢ ⑥ ٥ ⑦ $\frac{-ص}{س}$ ⑧ ٣

(٢٦) ص = س|س - ٣|

$= \begin{cases} س^2 - ٣س & س \geq ٣ \\ -س^2 + ٣س & س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٢

$\therefore ص = -س^2 + ٣س$ $\therefore \frac{دص}{دس} = -٢س + ٣$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=٢} = -٢(٢) + ٣ = -١$

(٢٧) $ص = \frac{١ + \sqrt{س}}{١ - \sqrt{س}}$

$$\text{ص}' = \frac{(1-\sqrt{\text{س}}) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} - (1+\sqrt{\text{س}}) \times \frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}}{(1-\sqrt{\text{س}})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{\text{س}}+1+\sqrt{\text{س}}}{2\sqrt{\text{س}}(1-\sqrt{\text{س}})^2} = \frac{2}{2\sqrt{\text{س}}(1-\sqrt{\text{س}})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{س}}(1-\sqrt{\text{س}})^2}$$

28 $\text{ص} = \frac{2\text{س}-1}{\text{ا س}+\text{ب}}$ $(1 ، 3)$

$\text{ص}' = -7$

$3 = \frac{2+1}{\text{ا}+\text{ب}} \Leftarrow \text{ا}+\text{ب} = 1$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{ا س}+\text{ب})(2)-(2\text{س}+1)\text{ا}}{(\text{ا س}+\text{ب})^2}$$

$$-7 = \frac{(\text{ا}+\text{ب})(2)-3\text{ا}}{(\text{ا}+\text{ب})^2} = \frac{2-3\text{ا}}{1}$$

$-7 = 2 - 3\text{ا}$

$-9 = -3\text{ا}$ $\therefore \text{ا} = 3$ ، $\text{ب} = -2$

تمارين (4) على مشتقة دالة الدالة

1 ① 6 ② $\frac{3\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}^3}}$ ③ 2 ④ $45°$

⑤ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (2\text{س}-1) \times 2\text{س} + (\text{س}^2+3) \times 2$

$= 4\text{س}^2 - 2\text{س} + 2\text{س}^2 + 6$

$= 6\text{س}^2 - 2\text{س} + 6$

⑨ $\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \sqrt{\text{س}+\text{ه}-3}$

$\text{ت}(\text{ه}) = \text{د}(\text{س}+\text{ه}) - \text{د}(\text{س})$

$= \sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} - \sqrt{\text{س}-3}$

$\text{م}(\text{ه}) = \frac{\text{ت}(\text{ه})}{\text{ه}} = \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} - \sqrt{\text{س}-3}}{\text{ه}}$

$$\text{معدل التغير} = \text{نها}_{\text{ه}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} - \sqrt{\text{س}-3}}{\text{ه}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} + \sqrt{\text{س}-3}}{\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} + \sqrt{\text{س}-3}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ه}\to 0} \frac{\text{س}+\text{ه}-3-\text{س}+3}{\text{ه}(\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} + \sqrt{\text{س}-3})}$$

$$= \text{نها}_{\text{ه}\to 0} \frac{\text{ه}}{\text{ه}(\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} + \sqrt{\text{س}-3})}$$

$$= \text{نها}_{\text{ه}\to 0} \frac{1}{\sqrt{\text{س}+\text{ه}-3} + \sqrt{\text{س}-3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+0-3} + \sqrt{4-3}} = \frac{1}{2}$$

2 ① $\text{د}(\text{س}) = (2\text{س}+3)^5$

$\text{د}'(\text{س}) = 5(2\text{س}+3)^4 \times 2 = 10(2\text{س}+3)^4$

② $\text{د}(\text{س}) = 9(2-\text{س}^2)^8 \times -2\text{س}$

$= -18\text{س}(2-\text{س}^2)^8$

③ $\text{ص}' = 2\left(\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{س}\times 2-(2\text{س}+1)\times 1}{\text{س}^2}\right)$

$= \frac{-2(2\text{س}+1)}{\text{س}^3}$

④ $\text{ص}' = 2\left(\frac{2\text{س}}{\text{س}+1}\right) \times \frac{(\text{س}+1)\times 2 - 2\text{س}\times 1}{(\text{س}+1)^2}$

$= \frac{8\text{س}}{(\text{س}+1)^3}$

⑤ $\text{ص}' = \text{س} \times 2(2\text{س}-1) \times 2 + (2\text{س}-1)^2 \times 1$

$= 4\text{س}(2\text{س}-1) + (2\text{س}-1)^2$

$= (2\text{س}-1)(4\text{س}+2\text{س}-1)$

$= (2\text{س}-1)(6\text{س}-1)$

⑥ $\text{ص} = \sqrt{2\text{س}+3} = (2\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}(2\text{س}+3)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}}$

3 ① $6(3\text{س}+2)$ ② 6 ③ 6

④ -8 ⑤ 9س^8 ⑥ 0

⑦ $\frac{2}{3\sqrt{\text{س}}}$ ⑧ $\frac{-1}{2\text{س}}$ ⑨ -1 ⑩ $\frac{1}{2}$

4 ① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6(2+5\text{س}^2)^5 \times 10\text{س}$

$= 60\text{س}(2+5\text{س}^2)^5$

② $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 7(2-3\text{س}^2)^6 \times (-6\text{س})$

$= -42\text{س}(2-3\text{س}^2)^6$

③ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5(\text{س}^3+\text{س}-9)^4(3\text{س}^2+1)$

④ $\text{د}(\text{س}) = 5\left(3-\frac{2}{\text{س}^2}\right)^4 \times \left(0+\frac{4}{\text{س}^3}\right)$

$= \frac{20}{\text{س}^3}\left(3-\frac{2}{\text{س}^2}\right)^4$

5 ① $\frac{4}{3}$ ② صفر ③ 2 ④ $\frac{56}{9}$

6 ① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 \times 3(2-3\text{س})^2 \times (-3) + (2-3\text{س})^3$

$\times 2\text{س}$

$= -٩س^٢(٢-٣س)^٢ + ٢س(٢-٣س)^٣$

$= (٢-٣س)^٢[-٩س^٢ + ٢س(٢-٣س)]$

$= (٢-٣س)^٢(٤س - ١٥س^٢)$

(٢) $\frac{وص}{وس} = (س-٢) \times ٣(٣-٢س)^٢ \times (-٢)$

$+ (٣-٢س)^٣ \times ٢(س-٢) \times ١$

$= (س-٢)(٣-٢س)^٢[-٦(س-٢) + ٢(٣-٢س)]$

$= (س-٢)(٣-٢س)^٢(١٨ - ١٠س)$

(٣) $\frac{وص}{وس} = (٣س+١)^٤ \times (-٣)(س+٢)^{-٤}$

$+ (س+٢)^{-٣} \times ٤(٣س+١)^٣ \times ٣$

$= (٣س+١)^٣(س+٢)^{-٤}[-٣(٣س+١) + ١٢(س+٢)]$

$= (٣س+١)^٣(س+٢)^{-٤}(٢١ + ٣س)$

(٤) $ص = س\sqrt{س^٢ + ١}$

$ص = \sqrt{س^٤ + س^٢} = (س^٤ + س^٢)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{1}{2}(س^٤ + س^٢)^{\frac{-1}{2}} \times (٤س^٣ + ٢س)$

$= \frac{٢س^٣ + س}{\sqrt{س^٤ + س^٢}} = \frac{س(٢س^٢ + ١)}{س\sqrt{س^٢ + ١}} = \frac{٢س^٢ + ١}{\sqrt{س^٢ + ١}}$

(٥) $ص = (س^٢ + ١)(س^٢ - ١)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{وص}{وس} = (س^٢ + ١) \times \frac{1}{3}(س^٢ - ١)^{\frac{-2}{3}} \times ٢س$

$+ (س^٢ - ١)^{\frac{1}{3}} \times ٢س$

$= ٢س(س^٢ - ١)^{\frac{-2}{3}}[\frac{1}{3}(س^٢ + ١) + (س^٢ - ١)]$

(٦) $د(س) = (١ + س)^٤(١ - س)^٤$

$= [(١ + س)(١ - س)]^٤ = (١ - س^٢)^٤$

$د'(س) = ٤(١ - س^٢)^٣ \times -٢س = -٨س(١ - س^٢)^٣$

٧ (١) $\frac{وص}{وس} = ٣\left(\frac{س+٣}{س}\right)^٢ \times \left(\frac{س \times ١ - (س+٣) \times ١}{س^٢}\right)$

$= ٣\left(\frac{س+٣}{س}\right)^٢ \times \frac{-٣}{س^٢} = \frac{-٩(س+٣)^٢}{س^٤}$

(٢) $\frac{وص}{وس} = ٥\left(\frac{س-١}{س+١}\right)^٤ \times \frac{(س+١) \times ١ - (س-١) \times ١}{(س+١)^٢}$

$= ٥\left(\frac{س-١}{س+١}\right)^٤ \times \frac{٢}{(س+١)^٢} = \frac{١٠(س-١)^٤}{(س+١)^٦}$

(٣) $\frac{وص}{وس} =$

$٧\left(\frac{س^٢-٢}{س^٢+٣}\right)^٦ \times \frac{(س^٢+٣) \times (٢س) - (س^٢-٢) \times (٢س)}{(س^٢+٣)^٢}$

$= ٧\left(\frac{س^٢-٢}{س^٢+٣}\right)^٦ \times \frac{٢س^٣ + ٦س - ٢س^٣ + ٤س}{(س^٢+٣)^٢}$

$= \frac{٧٠س(س^٢-٢)^٦}{(س^٢+٣)^٨}$

(٤) $\frac{وص}{وس} = ٣\left(\frac{٢}{\sqrt{٢-س}}\right)^٢ \times \frac{\sqrt{٢-س} \times ٠ - ٢ \times \frac{-١}{٢\sqrt{٢-س}}}{٢-س}$

$= ٣\left(\frac{٢}{\sqrt{٢-س}}\right)^٢ \times \frac{١}{(٢-س)\sqrt{٢-س}}$

$= ٣\left(\frac{٢}{\sqrt{٢-س}}\right)^٢ \times \frac{١}{(٢-س)^{\frac{3}{2}}} = \frac{١٢}{\sqrt{(٢-س)^٥}}$

٨ $ص = (٣س^٢ - ٢)^٢$

$\frac{وص}{وس} = ٢(٣س^٢ - ٢) \times (٦س) = ١٢س(٣س^٢ - ٢)$

٩ $ص = ٢(٨س - ١١)^٣$

$\frac{وص}{وس} = ٦(٨س - ١١)^٢ \times ٨ = ٤٨(٨س - ١١)^٢$

١٠ $ص = \sqrt[3]{س^٢ - ٣س + ٢} = (س^٢ - ٣س + ٢)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{1}{3}(س^٢ - ٣س + ٢)^{\frac{-2}{3}} \times (٢س - ٣)$

$\frac{وص}{وس} = \frac{٢س - ٣}{٣\sqrt[3]{(س^٢ - ٣س + ٢)^٢}}$

١١ $ص = ع^٢ + ع$ ، $ع = ٢س + ١$

$ص = (٢س + ١)^٢ + (٢س + ١)$

$\frac{وص}{وس} = ٢(٢س + ١) \times ٢ + ٢ = ٨س + ٤ + ٢$

$= ٨س + ٦$

١٢ $ص = ٣\left(\frac{٥}{س}\right)^٢ - ١$

$\frac{وص}{وس} = ٦\left(\frac{٥}{س}\right) \times \left(\frac{س \times ٠ - ٥ \times ١}{س^٢}\right)$

$= ٦\left(\frac{٥}{س}\right)\left(\frac{-٥}{س^٢}\right)$ $\quad \therefore \frac{وص}{وس} = \frac{-١٥٠}{س^٣}$

١٣ $ص = \frac{س^٢ + ١ + ١}{س^٢ + ١ - ١} = \frac{س^٢ + ٢}{س^٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{س^٢ \times ٢س - (س^٢ + ٢) \times ٢س}{س^٤}$

$= \frac{-٤}{س^٣}$ عندما س = ٢

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤}{٨} = \frac{-١}{٢}$

(١٤) $\frac{ءع}{ءص} = \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص} = (٤س - ٣) \times \frac{١}{٢س^٢ + ٧}$

$\frac{ءع}{ءص} = \frac{٤س - ٣}{٢س^٢ + ٧}$

عند س = ٢ $\Leftarrow \frac{ءع}{ءص} = \frac{٤ \times ٢ - ٣}{٢(٢)^٢ + ٧} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

(١٥) $ص = (ع^٢ + ع)^٢ + ١٠$

$\frac{ءص}{ءع} = ٢(ع^٢ + ع)(٢ع + ١)$

عند ع = ١ $\Leftarrow \frac{ءص}{ءع} = (٢)(١ + ١)(٢ + ١) = ١٢$

(١٦) $\frac{ءص}{ءع} = ٧ع^٦$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٣س^٢ + ٤س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٧ع^٦(٣س^٢ + ٤س)$

$= ٧(س^٣ + ٢س^٢ - ٤)^٦(٣س^٢ + ٤س)$

، عند س = ١

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٧(١ + ٢ - ٤)^٦(٣ + ٤)$

$= ٧(-١)^٦ \times ٧ = ٤٩$

(١٧) $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع + ١$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ١ - \frac{١}{س^٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (٢ع + ١)(١ - \frac{١}{س^٢})$

عند س = ١ $\therefore ع = ١ + \frac{١}{١} = ٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٥(١ - \frac{١}{١}) =$ صفر

(١٨) $ص = \frac{\frac{س+١}{س-١} - ١}{\frac{س+١}{س-١} + ١} = \frac{س + ١ - (س - ١)}{س + ١ + س - ١} = \frac{٢}{٢س} = \frac{١}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^٢}$

حل آخر:

$ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، $ع = \frac{س + ١}{س - ١}$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{(ع + ١) \times ١ - (ع - ١) \times ١}{(ع + ١)^٢}$

$= \frac{٢}{(ع + ١)^٢} = \frac{٢}{(\frac{س + ١}{س - ١} + ١)^٢}$

$= \frac{٢}{[\frac{س + ١ + (س - ١)}{س - ١}]^٢} = \frac{٢}{[\frac{٢س}{(س - ١)}]^٢} = \frac{٢(س - ١)^٢}{٤س^٢}$

$= \frac{(س - ١)^٢}{٢س^٢}$

$\frac{ءع}{ءس} = \frac{(س - ١) - (س + ١)}{(س - ١)^٢} = \frac{-٢}{(س - ١)^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{٢(س - ١)^٢}{٤س^٢} \times \frac{-٢}{(س - ١)^٢} = \frac{-١}{س^٢}$

(١٩) $\frac{ءص}{ءس} = س + ٥$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢س + ١٠$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = \frac{س + ٥}{٢س + ١٠} = \frac{١}{٢}$

(٢٠) $ص = \sqrt[٣]{٣س^٢ - ٤} \Leftarrow ص = (٣س^٢ - ٤)^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}(٣س^٢ - ٤)^{\frac{-٢}{٣}} \times (٦س)$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س(٣س^٢ - ٤)^{\frac{-٢}{٣}}$ عند س = ١

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢ \times ١(٣ \times ١ - ٤)^{\frac{-٢}{٣}} = ٢$

(٢١) $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع + ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = س$

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = (٢ع + ٣) \times س = س^٣ + ٧س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ٧\frac{ءع}{ءس} - س^٣ = س^٣ + ٧س - ٧س - س^٣ = ٠$

(٢٢) $ع = س^٣ - ١$ ، $ص = ع^٢ - ٧ع + ٣$

$ص = (س^٣ - ١)^٢ - ٧(س^٣ - ١) + ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢(س^٣ - ١) \times ٣س^٢ - ٢١س^٢$

$= ٦س^٥ - ٦س^٢ - ٢١س^٢ = ٦س^٥ - ٢٧س^٢$

$\frac{ءع}{ءس} = ٣س^٢$

المقدار $= ٦س^٥ - ٢٧س^٢ + ٩(٣س^٢) - ٦س^٥ = ٠$

(23) $\text{ص} = \text{س}^2 - 5\text{س} + 4 \quad ، \quad \text{س} = \text{ع}^3 - 1$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{س} - 5 = 2(\text{ع}^3 - 1) - 5 = 2\text{ع}^3 - 7$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ع}} = 3\text{ع}^2(2\text{ع}^3 - 7) = 6\text{ع}^5 - 21\text{ع}^2$$

∴ المقدار $= 6\text{ع}^5 - 21\text{ع}^2 + 21\text{ع}^2 - 6\text{ع}^5 =$ صفر

(24) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س}+3}{\text{س}+1}\right)^2$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\left(\frac{\text{س}+3}{\text{س}+1}\right) \times \frac{(\text{س}+1)\times 1 - (\text{س}+3)\times 1}{(\text{س}+1)^2}$$

$= 2\left(\frac{\text{س}+3}{\text{س}+1}\right) \times \frac{-2}{(\text{س}+1)^2}$ عند النقطة $(-2 ، 1)$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\left(\frac{-2+3}{-2+1}\right) \times \left(\frac{-2}{(-2+1)^2}\right)$$

$$= 2 \times (-1) \times (-2) = 4$$

(25) بتربيع الطرفين $\Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص}^2 + 5 \quad ، \quad \text{ص}^2 = \text{س}^2 - 5$

$$\text{ص} = (\text{س}^2 - 5)^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{2}(\text{س}^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \times 2\text{س}$$

عند $\text{س} = 3$

$$\Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (3^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = 4^{-\frac{1}{2}} \times 3 = 2^{-1} \times 3 = \frac{3}{2}$$

(26) $\text{ص}^2 = 2\text{س} + 3 \Leftarrow \text{ص} = (2\text{س} + 3)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{2}(2\text{س} + 3)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}}$$

$$\text{ص}^2\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^2 + \text{ص}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right) - 2$$

$$= (2\text{س} + 3) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}}\right)^2 + (2\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+3}} - 2 = 1 + 1 - 2 = \text{صفر}$$

(27) ∵ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 - 1}$ ⇐ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^2 - 1}} \times 2\text{س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$$

$$2\sqrt{\text{س}^2 - 1} \times \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - 1}} - 2\text{س} = 2\text{س} - 2\text{س} = 0$$

(28) $\text{ص} = \frac{\text{ع} - 2}{\text{ع} + 1} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{\text{س} + 1}{2\text{س} - 1}$

$$\text{ص} = \frac{\frac{\text{س}+1}{2\text{س}-1} - 2}{\frac{\text{س}+1}{2\text{س}-1} + 1} = \frac{\text{س} + 1 - 2(2\text{س} - 1)}{\text{س} + 1 + 2\text{س} - 1}$$

$$= \frac{-3\text{س} + 3}{3\text{س}} = \frac{1 - \text{س}}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}(-1) - (1 - \text{س}) \times 1}{\text{س}^2} = \frac{-1}{\text{س}^2}$$

∴ المقدار $= \text{س}^2 \times \left(\frac{-1}{\text{س}^2}\right) + 1 =$ صفر

(29) $\text{ص}^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-2\text{أ}}{2\sqrt{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}} = \frac{-\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}}$$

$$\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^2 = \frac{\text{أ}^2}{(\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س})}$$

المقدار $= \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^2 + \frac{2\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$

$$= \frac{\text{أ}^2}{(\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س})} + \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}} \times \frac{-\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س}}}$$

$$= \frac{(\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س})}{(\text{أ}^2 - 2\text{أ}\text{س})} = 1$$

(30) (1) صفر (2) $\frac{3}{16}$ (3) $\frac{-1}{\text{س}^2}$

(4) $\frac{-1}{2\text{س}}$ (5) $\frac{3}{4\sqrt{\text{س}}}$ (6) ± 2

(7) -1 (8) $\frac{1}{810\pi}$

(31) $\text{ص} = \frac{(\text{س}+1)^3}{(\text{س}^2+1)^4}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(\text{س}^2+1)^4 \times 3(\text{س}+1)^2 - (\text{س}+1)^3 \times 4(\text{س}^2+1)^3 \times 2\text{س}}{[(\text{س}^2+1)^4]^2}$$

$$= \frac{(\text{س}^2+1)^3(\text{س}+1)^2[3(\text{س}^2+1) - 8\text{س}(\text{س}+1)]}{(\text{س}^2+1)^8}$$

$$= \frac{(\text{س}+1)^2[3\text{س}^2 + 3 - 8\text{س}^2 - 8\text{س}]}{(\text{س}^2+1)^5}$$

$$= \frac{(\text{س}+1)^2(-5\text{س}^2 - 8\text{س} + 3)}{(\text{س}^2+1)^5}$$

(32) $\text{ص}^2 + \text{س}^2 + 3\text{س} + 2\text{ص} + 1 = 0$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$$2\text{ص} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + 2\text{س} + 3 + 2 \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + 0 = 0$$

$$2\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}(\text{ص} + 1) + 2\text{س} + 3 = 0 \Leftarrow$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-(2\text{س} + 3)}{2(\text{ص} + 1)}$$

(٣٣) $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \text{ص} - 5$ ، $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} = 4$

$\because \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \text{ص} + 1$

بالاشتقاق إلى س

$2\text{س} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 1 = 0$

$2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 - 2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 - 2\text{س}}{2\text{ص}}$

$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = (\text{ص} + 1) \times \frac{1 - 2\text{س}}{2\text{ص}} = \frac{(\text{ص}+1)(1-2\text{س})}{2\text{ص}}$

عند $\text{س} = 1$ ، $1 + \text{ص}^2 - 1 = 4 \Leftarrow \text{ص}^2 = 4$ ، $\text{ص} = \pm 2$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{(\pm 2 + 1)(1 - 2)}{2 \times \pm 2} = \frac{-3}{4}$ ، $\frac{-1}{4}$

(٣٤) $(\text{ص} + 3)^2 = (\text{س} - 1)^3$ $\therefore \text{ص} + 3 = \pm(\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \text{ص} = (\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}} - 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{2}(\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}} - 0 = \frac{3}{2}\sqrt{\text{س} - 1}$

(٣٥) $\text{ص} = \left(\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}-1}\right)^2$ ، $\text{ع} = \text{س}^2 + 2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= 2\left(\frac{\text{ع}+1}{\text{ع}-1}\right) \times \frac{(\text{ع}-1)\times 1 - (\text{ع}+1)\times 1}{(\text{ع}-1)^2} \times (2\text{س} + 2)$

$= \frac{2(\text{ع}+1)\times(-2)}{(\text{ع}-1)^3} \times (2\text{س}+2) = \frac{-4(\text{ع}+1)}{(\text{ع}-1)^3} \times (2\text{س}+2)$

$\frac{-4(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1)}{(\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)^3} \times (2\text{س} + 2)$

عند $\text{س} = 1 \Leftarrow = \frac{-4 \times 4}{8} \times 4 = \frac{-64}{8} = -8$

(٣٦) $\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1 \times 2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}}$

$= 2\text{س} \times \frac{2\sqrt{\text{س}^2 - 1}}{2\text{س}} = 2\sqrt{\text{س}^2 - 1} = 2\text{ع}$

(٣٧) $\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س}$ ، $\text{ع} = \frac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 1$

عند $\text{س} = 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{س} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} - (\sqrt{\text{س}} - 1) \times 1}{\text{س}^2}$

$= \frac{\text{س} - 2\text{س} + 2\sqrt{\text{س}}}{2\text{س}^2\sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{2\sqrt{\text{س}} - \text{س}}{2\text{س}^2\sqrt{\text{س}}}$ عند $\text{س} = 1$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}}$

عند $\text{س} = 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 3 \times 2 = 6$

(٣٨) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1}$

$\times \frac{2\text{س}(\text{س}^2 + 2) - 2\text{س}(\text{س}^2 - 2)}{(\text{س}^2 + 2)^2}$

$= \frac{8\text{ن س}}{(\text{س}^2 + 2)^2} \times \left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}-1}$

$= \frac{8\text{ن س}}{(\text{س}^2 - 2)(\text{س}^2 + 2)} \times \left(\frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 2}\right)^{\text{ن}}$

$= \frac{8\text{ن س ص}}{\text{س}^4 - 4}$

تمارين (٥) على مشتقات الدوال المثلثية

(١) ① ٦ ② −٨ ③ −١ ④ ٠,٦٤

⑤ (أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)^4 \times \frac{(\text{س}+1)\times 1 - (\text{س}-1)\times 1}{(\text{س}+1)^2}$

$= 5\left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)^4 \times \frac{2}{(\text{س}+1)^2} = \frac{10(\text{س}-1)^4}{(\text{س}+1)^6}$

(ب) $\text{ص}^3 = 3\text{س}^2 - 4$

$\text{ص} = (3\text{س}^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{3}(3\text{س}^2 - 4)^{-\frac{2}{3}} \times 6\text{س}$

$= 2\text{س}(3\text{س}^2 - 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2\text{س}}{\sqrt[3]{(3\text{س}^2 - 4)^2}}$

⑥ $\because$ د متصلة عند $\text{س} = 1$

$\therefore \text{د}(1^+) = \text{د}(1^-)$

$\lim_{\text{س} \to 1^+} (\text{س} + 2) = \lim_{\text{س} \to 1^-} \frac{\text{أ}}{\text{س}}$

$1 + 2 = \frac{\text{أ}}{1}$ $\therefore \text{أ} = 3$

$\text{د}'(1^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ←٠^+) (١+هـ+٢−٣)/هـ = نهـا (هـ←٠^+) هـ/هـ

= نهـا (هـ←٠^+) ١ = ١

د′(١^−) = نهـا (هـ←٠^−) (د(١+هـ) − د(١))/هـ

= نهـا (هـ←٠^−) (٣/(١+هـ) − ٣)/هـ = نهـا (هـ←٠^+) ((٣−٣−٣هـ)/(١+هـ))/هـ

= نهـا (هـ←٠^−) ((−٣هـ)/(١+هـ))/هـ = نهـا (هـ←٠^−) −٣/(١+هـ)

= −٣/(١+٠) = −٣

∴ د′(١^+) ≠ د′(١^−)

∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق

٢ ① قا^٢ س ② ٥ جتا ٥س

③ صفر ④ صفر

⑤ ٢ جتا (٢س + ٥) ⑥ ٣ قا^٢ (٣س − ٤)

⑦ ١٢ جا (٢ − ٤س) ⑧ ٢س + ٤ جتا ٤س

⑨ ٣ + ٢ جا ٢س ⑩ ١٠ ⑪ ١

٣ ① − جا س − جتا س ② ٥ + ٢ قا^٢ ٢س

③ ٦س قا^٢ ٣س^٢ ④ صفر

⑤ صفر ⑥ صفر ⑦ صفر

⑧ ٢ طا س قا^٢ س ⑨ قا^٢ س

⑩ −٦س جتا (٧ − ٣س^٢)

⑪ −٢ جا ٢س ⑫ ٢ جتا ٢س

⑬ ٨س جتا ٤س + ٢ جا ٤س ⑭ جتا أ

٤ ① ءص/ءس = ٣ جتا ٣س ② ءص/ءس = ١/٢ جتا ١/٢ س

③ ءص/ءس = − ١/٢ جا س/٢ ④ ٤ جتا (٤س + ٧)

⑤ ءص/ءس = ٢س جتا (س^٢ + ٣)

⑥ ءص/ءس = −٥ جا (٥س + ٣)

⑦ ءص/ءس = ٦ قا^٢ (٢س + ٣)

⑧ −١٠س قا^٢ (−٥س^٢ + ١٩)

٥ ① ءص/ءس = ٢ جاس جتاس

② ءص/ءس = س جتاس + جاس

③ ءص/ءس = − س^٢ جاس + ٢س جتاس

④ ءص/ءس = س × ٢ جتا ٢س + جا ٢س

⑤ ءص/ءس = س جتا س^٢ × ٢س + جا س^٢

= ٢س^٢ جتا س^٢ + جا س^٢

⑥ ص = س جا (٣س + ٢)

ءص/ءس = س × ٣ جتا (٣س + ٢) + جا (٣س + ٢) × ١

= ٣س جتا (٣س + ٢) + جا (٣س + ٢)

⑦ ص = س^٢ جا (٢س^٢ + ٥)

ءص/ءس = س^٢ × ٤س جتا (٢س^٢ + ٥) + جا (٢س^٢ + ٥) × ٢س

ءص/ءس = ٤س^٣ جتا (٢س^٢ + ٥) + ٢س جا (٢س^٢ + ٥)

⑧ ص = جا ٢س جتا ٥س

ءص/ءس = جا ٢س × −٥ جا ٥س + جتا ٥س × ٢ جتا ٢س

ءص/ءس = −٥ جا ٢س جا ٥س + ٢ جتا ٥س جتا ٢س

⑨ ص = طاس/س ⇐ ءص/ءس = (س × قا^٢ س − طاس × ١)/س^٢

ءص/ءس = (س قا^٢ س − طاس)/س^٢

⑩ ص = س/جتاس

ءص/ءس = (جتاس × ١ − س × −جاس)/(جتاس)^٢

ءص/ءس = (جتاس + س جاس)/جتا^٢ س

⑪ ص = (٢س + جاس)/جتا س

ءص/ءس = (جتاس × (٢ + جتاس) − (٢س + جاس) × −جاس)/(جتاس)^٢

ءص/ءس = (٢ جتاس + جتا^٢ س + ٢س جاس + جا^٢ س)/جتا^٢ س

ءص/ءس = (٢ جتاس + ٢س جاس + (جتا^٢ س + جا^٢ س))/جتا^٢ س

ءص/ءس = (٢ جتاس + ٢س جاس + ١)/جتا^٢ س

⑫ $ص = \frac{جا\,س}{١+جتا\,س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١+جتا\,س)\times جتا\,س - جا\,س \times -جا\,س}{(١+جتا\,س)^٢}$

$= \frac{جتا\,س + جتا^٢ س + جا^٢ س}{(١+جتا\,س)^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جتا\,س+١}{(١+جتا\,س)^٢}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{١+جتا\,س}$

[٦] ① $ص = ظا\,س\,(جا^٢ س + جتا^٢ س)$

$ص = ظا\,س \times ١ = ظا\,س$ $\therefore \frac{دص}{دس} = قا^٢ س$

② $ص = قا^٢ س - ١ \Leftarrow ص = ظا^٢ س = (ظا\,س)^٢$

$\frac{دص}{دس} = ٢(ظا\,س) \times قا^٢ س$

③ $ص = ٤س + ٥\,جا\,٤س$

$\frac{دص}{دس} = ٤ + ٢٠\,جتا\,٤س$

④ $ص = س\,جا\,س + \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = س\,جتا\,س + جا\,س + \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

⑤ $ص = ظا\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}\,قا^٢ \sqrt{س}$

⑥ $ص = جتا\,س^٢ + ٥$ $\therefore \frac{دص}{دس} = -٢س\,جا\,س^٢$

⑦ $ص = جا\left(\frac{١}{س^٢}\right)$ $\therefore ص = جا\,س^{-٢}$

$\frac{دص}{دس} = -٢\,س^{-٣}\,جتا\,س^{-٢} = \frac{-٢}{س^٣}\,جتا\left(\frac{١}{س^٢}\right)$

⑧ $\frac{دص}{دس} = ٣\,جا^٢(٢س+٣) \times جتا(٢س+٣) \times ٢$

$= ٦\,جا^٢(٢س+٣)\,جتا(٢س+٣)$

⑨ $\frac{دص}{دس} = ٢ظا\,٣س \times قا^٢ ٣س \times ٣$

$= ٦ظا\,٣س\,قا^٢ ٣س$

⑩ $ص = ٤\,جتا^٥ س$ $\therefore ص = ٤(جتا\,س)^٥$

$\frac{دص}{دس} = ٤ \times ٥(جتا\,س)^٤ \times -\,جا\,س$

$= -٢٠\,جا\,س\,(جتا\,س)^٤$

⑪ $ص = \left[جتا\left(\frac{س}{س+١}\right)\right]^٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣\left[جتا\left(\frac{س}{س+١}\right)\right]^٢ \times - \left[\frac{(س+١)\times١ - س\times١}{(س+١)^٢}\right]$

$جا\left(\frac{س}{س+١}\right)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{(س+١)^٢}\,جا\left(\frac{س}{س+١}\right)\,جتا^٢\left(\frac{س}{س+١}\right)$

⑫ $ص = جتا\,(جتا\,س)$

$\frac{دص}{دس} = -\,جا\,(جتا\,س) \times -\,جا\,س$

$= -\,جا\,س \times جا\,(جتا\,س)$

[٧] ① $ص = \sqrt{١ + جتا\,٢س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{١+جتا\,٢س}} \times -٢\,جا\,٢س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-جا\,٢س}{\sqrt{١+جتا\,٢س}}$

② $ص = \sqrt{٣س - جا^٢ ٤س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{٣س - جا^٢ ٤س}} \times (٣ - ٨\,جا\,٤س\,جتا\,٤س)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣ - ٤\,جا\,٨س}{٢\sqrt{٣س - جا^٢ ٤س}}$

③ $ص = \sqrt{جا\,س + جتا\,س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{جا\,س+جتا\,س}} \times (جتا\,س - جا\,س)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جتا\,س - جا\,س}{٢\sqrt{جا\,س+جتا\,س}}$

④ $ص = \sqrt{جتا\,(٥س)}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{جتا\,٥س}} \times -٥\,جا\,٥س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٥\,جا\,٥س}{٢\sqrt{جتا\,٥س}}$

[٨] ① $ص = جا\,س\,جتا\,\frac{\pi}{٣} + جتا\,س\,جا\,\frac{\pi}{٣}$

$ص = جا\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$

$\frac{دص}{دس} = جتا\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$

② $ص = جتا\,س\,جتا\,\frac{\pi}{٦} + جا\,س\,جا\,\frac{\pi}{٦}$

$ص = جتا\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)$

$\frac{دص}{دس} = -\,جا\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)$

③ $ص = \frac{ظا\,س + ظا\,\frac{\pi}{٤}}{١ - ظا\,س\,ظا\,\frac{\pi}{٤}}$

$ص = ظا\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ $\therefore \frac{دص}{دس} = قا^٢\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

④ $ص = \frac{2 ظا س}{1 - ظا^2 س}$

$ص = ظا 2س$ ∴ $\frac{دص}{دس} = 2 قا^2 2س$

⑨ ① $ص = قتا س = \frac{1}{جا س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{- جتا س}{جا^2 س} = - ظتا س قتا س$

② $ص = ظتا س = \frac{جتا س}{جا س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{- جا^2 س - جتا^2 س}{جا^2 س} = \frac{-1}{جا^2 س} = - قتا^2 س$

③ $ص = جا^2 س ظا س$

$\frac{دص}{دس} = 2 جا س جتا س ظا س + جا^2 س قا^2 س$

$= 2 جا س جتا س \frac{جا س}{جتا س} + جا^2 س قا^2 س$

$= 2 جا^2 س + جا^2 س قا^2 س = جا^2 س (2 + قا^2 س)$

④ $ص = س ظا (2س - 1)$

$\frac{دص}{دس} = ظا (2س - 1) + 2س قا^2 (2س - 1)$

⑤ $ص = ظا (4س - 1) - \frac{1}{2} جا 4 س$

$\frac{دص}{دس} = 4 قا^2 (4س - 1) - 2 جتا 4 س$

⑥ $ص = 2 جا \frac{1}{2} س - س جتا \frac{1}{2} س$

$= جتا \frac{1}{2} س - جتا \frac{1}{2} س + \frac{1}{2} س جا \frac{1}{2} س$

$= \frac{1}{2} س جا \frac{1}{2} س$

⑦ $ص = \frac{جا 2س}{جتا 2س} = ظا 2س$

$\frac{دص}{دس} = 2 قا^2 2س$

⑧ $ص = س^3 قا س = \frac{س^3}{جتا س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{3س^2 جتا س + س^3 جا س}{جتا^2 س}$

⑨ $ص = (2س + 1) ظا 2س$

$\frac{دص}{دس} = 2 ظا 2 س + 2 (2س + 1) قا^2 2س$

⑩ $ص = (س + 1)^3 جتا س$

$\frac{دص}{دس} = 3 (س + 1)^2 جتا س - (س + 1)^3 جا س$

$= (س + 1)^2 (3 جتا س - س جا س - جا س)$

⑩ ① 1 ② -2 ③ -2 ④ -4

⑤ $\frac{-\pi}{2}$ ⑥ 1 ⑦ صفر ⑧ $\frac{-1}{\pi}$

⑨ $\frac{1}{2}$ ⑩ 1

⑪ ① $45°$ ② $135°$ ③ $45°$ ④ $135°$

⑫ $ص = جتا س$ ∴ $\frac{دص}{دس} = - جا س$

$ظا هـ = - جا \frac{\pi}{2} = -1$

$هـ = ظا^{-1} (-1) = 135° = \frac{3\pi}{4}$

⑬ $ص = (جا 2س + جتا 4 س)^3$

$\frac{دص}{دس} = 3 (جا 2س + جتا 4س)^2 \times (2 جتا 2س - 4 جا 4س)$

⑭ $\frac{دص}{دس} = 5 جتا^4 (2 - 3س) \times - جا (2 - 3س) \times (-3) + 6س$

$= 15 جتا^4 (2 - 3س) جا (2 - 3س) + 6 س$

⑮ $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{1 + جتا 2س}} \times 2 \times - جا 2 س$

$= \frac{- جا 2س}{\sqrt{1 + جتا 2س}}$

عند $س = \frac{\pi}{4}$ فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{0 + 1} = -1$

⑯ $\frac{دص}{دس} = \frac{جتا س (2 + جتا س) + (2س + جا س) جا س}{جتا^2 س}$

عند $س = 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1 (2 + 1) + (0 + 0) \times 0}{(1)^2} = \frac{3}{1} = 3$

⑰ $ص = جتا (\pi - 3س)^3$

$\frac{دص}{دس} = - جا (\pi - 3س)^3 \times 3 (\pi - 3س)^2 \times -3$

عند $س = \frac{\pi}{3}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = - جا (0)^3 \times 3 (0)^2 \times (-3) = 0$

⑱ $د(س) = \frac{جا س}{\sqrt{1 + جتا س}}$

$د'(س) = \frac{\sqrt{1 + جتا س} \times جتا س - جا س \times \frac{- جا س}{2\sqrt{1 + جتا س}}}{1 + جتا س}$

$د'(0) = \frac{\sqrt{1 + جتا 0} \times جتا 0 - جا 0 \times \frac{- جا 0}{2\sqrt{1 + جتا 0}}}{1 + جتا 0}$

$= \frac{\sqrt{2} - 0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(١٩) ① $\text{ص} = \sqrt{2(1-\text{ع})}$ ، $\text{ع} = \text{جا}\,2\text{س}$

$\therefore \text{ص} = \sqrt{2(1-\text{جا}\,2\text{س})}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{2(1-\text{جا}\,2\text{س})}} \times 2(0 - 2\,\text{جتا}\,2\text{س})$$

$$= \frac{-2\,\text{جتا}\,2\text{س}}{\sqrt{2(1-\text{جا}\,2\text{س})}} \quad \text{عند س} = \pi$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2\,\text{جتا}\,2\pi}{\sqrt{2(1-\text{جا}\,2\pi)}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2(1-0)}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

② $\text{ص} = (\text{جتا}\,2\text{س} + 1)^2$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2(\text{جتا}\,2\text{س}+1)\times(-2\,\text{جا}\,2\text{س})$$

$$= -4\,\text{جا}\,2\text{س}(\text{جتا}\,2\text{س}+1)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{4}} = -4\times1\times(0+1) = -4$$

(٢٠) $\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{ص} = -(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})$ $\therefore \text{ص} = -\,\text{جتا}\,2\text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{جا}\,2\text{س}$$

(٢١) $\text{ص} = (\text{جا س} + \text{جتا س})^2$

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جا س جتا س}$

$\text{ص} = 1 + \text{جا}\,2\text{س}$ $\therefore \text{ص}' = 2\,\text{جتا}\,2\text{س}$

(٢٢) $\text{ص} = 2\text{س جا س جتا س} = \text{س جا}\,2\text{س}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1\times\text{جا}\,2\text{س} + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}\times\text{س}$$

$$= \text{جا}\,2\text{س} + 2\text{س جتا}\,2\text{س}$$

(٢٣) $\because \text{ص} = \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتاس}(\text{جاس}+\text{جتاس}) - (\text{جتاس}-\text{جاس})\text{جاس}}{(\text{جاس}+\text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{\text{جتاس جاس} + \text{جتا}^2\text{س} - \text{جتاس جاس} + \text{جا}^2\text{س}}{(\text{جاس}+\text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}}{(\text{جاس}+\text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}+2\,\text{جاس جتاس}} = \frac{1}{1+\text{جا}\,2\text{س}}$$

(٢٤) $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}$

$$\text{ص}' = \frac{(1+\text{جتاس})\text{جتاس} - \text{جاس}\times -\text{جاس}}{(1+\text{جتاس})^2}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{جتاس}+\text{جتا}^2\text{س}+\text{جا}^2\text{س}}{(1+\text{جتاس})^2}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{جتاس}+1}{(1+\text{جتاس})^2} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{1+\text{جتاس}}$$

$$(1 + \text{جتا س})\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$$

(٢٥) $\text{ص} = \text{قتا}\,3\text{س}$ $\therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{جا}\,3\text{س}}$

$$\text{ص}' = \frac{\text{جا}\,3\text{س}\times0 - 1\times3\,\text{جتا}\,3\text{س}}{(\text{جا}\,3\text{س})^2}$$

$$\text{ص}' = \frac{-3\,\text{جتا}\,3\text{س}}{(\text{جا}\,3\text{س})^2} \quad \text{عندما س} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-3\,\text{جتا}(3\times\frac{\pi}{2})}{(\text{جا}(3\times\frac{\pi}{2}))^2} = \text{صفر}$$

$\therefore$ معدل تغير ص بالنسبة إلى س $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$.

(٢٦) $\text{ص} = \text{قا}\,4\text{س}$ $\therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{جتا}\,4\text{س}}$

$$\text{ص}' = \frac{\text{جتا}\,4\text{س}\times0 - 1\times -4\,\text{جا}\,4\text{س}}{(\text{جتا}\,4\text{س})^2}$$

$$\text{ص}' = \frac{4\,\text{جا}\,4\text{س}}{(\text{جتا}\,4\text{س})^2} \quad \text{عندما س} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ص}' = \frac{4\,\text{جا}(4\times\frac{\pi}{4})}{[\text{جتا}(4\times\frac{\pi}{4})]^2} = \text{صفر} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$\therefore$ معدل تغير ص بالنسبة إلى س $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

(٢٧) ① $2\,\text{قا}^2\,2\text{س}$ ② $2\,\text{جتا}\,2\text{س}$

③ $\text{جا}\,2\text{س}$ ④ قا س ظا س

⑤ $-2\,\text{جا}\,2\text{س}$ ⑥ $\text{قا}^2\text{س}$

⑦ صفر ⑧ $\text{قا}^2\text{س}$

(٢٨) $\text{د}(\text{س}) = \frac{2+\text{جا}^2\text{س}}{2-\text{جا}^2\text{س}}$

$\text{د}'(\text{س}) =$

$$\frac{(2-\text{جا}^2\text{س})(0+2\,\text{جاس جتاس}) - (2+\text{جا}^2\text{س})(-2\,\text{جاس جتاس})}{(2-\text{جا}^2\text{س})^2}$$

$$= \frac{(2-\text{جا}^2\text{س})\,\text{جا}\,2\text{س} + (2+\text{جا}^2\text{س})\,\text{جا}\,2\text{س}}{(2-\text{جا}^2\text{س})^2}$$

$= \frac{4\,\text{جا}\,2\text{س}}{(2-\text{جا}^2\text{س})^2}$

(٢٩) ص $= \sqrt{2\text{ع} + 3}$ ، ع = جتا س

∴ ص $= \sqrt{2\,\text{جتا س} + 3}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{2\,\text{جتاس}+3}} \times (-2\,\text{جا س})$

$= \frac{-\text{جا س}}{\sqrt{2\,\text{جتاس}+3}}$

(٣٠) ص $= \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

$\frac{(\text{جاس+جتاس})\times(\text{جتاس+جاس}) - (\text{جاس-جتاس})\times(\text{جتاس-جاس})}{(\text{جاس+جتاس})^2}$

$= \frac{(\text{جاس+جتاس})^2 + (\text{جاس-جتاس})^2}{(\text{جاس+جتاس})^2}$

$= \frac{2\,\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس}}$

$= \frac{2}{1+\text{جا}2\text{س}}$ ، المقدار $= (1 + \text{جا}\,2\text{س})\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 2$

$= (1 + \text{جا}\,2\text{س}) \times \frac{2}{1+\text{جا}2\text{س}} - 2 = 2 - 2 = 0$

(٣١) ص = أ جا س جتا س + ب

∵ النقطة $(\frac{\pi}{2}, 3)$ تقع على المنحنى

∴ $3 =$ أ جا $\frac{\pi}{2}$ جتا $\frac{\pi}{2}$ + ب ⇐ $3 = 0 +$ ب ∴ ب $= 3$

ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

= أ جاس × (−جاس) + أ جتاس × جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$ أ $[\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}]$

عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, 3)$ ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$ أ $[0 - 1] = -$أ

∵ ميل المماس $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-4}{2} = -2$

∴ −أ $= -2$ ∴ أ $= 2$

(٣٢) ص $= \text{جاس} - \frac{1}{3}\,\text{جا}^3\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \frac{1}{3} \times 3\,\text{جا}^2\text{س} \times \text{جتاس}$

$= \text{جتاس}(1 - \text{جا}^2\text{س}) = \text{جتاس} \times \text{جتا}^2\text{س}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}^3\text{س}$

تمارين (٦) على تطبيقات المشتقات

(١) ① − جا س − جتا س ② صفر

③ $5 + 2\,\text{قا}^2\,2\text{س}$ ④ ١٢

⑤ ص $= (\frac{1}{2}\text{س}^2+2)^2 + 3(\frac{1}{2}\text{س}^2+2) + 5$

ص $= (\frac{1}{2}\text{س}^2+2)^2 + \frac{3}{2}\text{س}^2 + 11$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2(\frac{1}{2}\text{س}^2+2)(\text{س}) + 3\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3 + 7\text{س}$ ← (١)

ع $= \frac{1}{2}\text{س}^2 + 2$ ∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{س}$ ← (٢)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 7\frac{\text{دع}}{\text{دس}} - \text{س}^3$

$= \text{س}^3 + 7\text{س} - 7\text{س} - \text{س}^3 =$ صفر

⑥ بفرض أن طول ضلع المربع = س

مساحة المربع د(س) $= \text{س}^2$

د(س + هـ) $= (\text{س} + \text{هـ})^2$

ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

$= (\text{س} + \text{هـ})^2 - \text{س}^2$

$= \text{س}^2 + 2\text{س هـ} + \text{هـ}^2 - \text{س}^2$

= هـ(٢س + هـ)

م(هـ) $= \frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}(2\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ}}$

م(هـ) = ٢س + هـ

معدل التغير $= \lim_{\text{هـ} \to 0} (2\text{س} + \text{هـ}) = 2 \times 8 + 0 = 16$

(٢) ① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ② ١٠ ③ −١٠

④ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$ ⑥ −١

⑦ $\frac{1}{2}$ ⑧ −٣ ⑨ $\frac{-1}{2}$

⑩ ٩ ⑪ °١٣٥ ⑫ ٦

⑬ ٦ ⑭ ص = ٢س − ٣

(٣) ص $= \text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}} - 1$ عند س = −١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - \frac{1}{\text{س}^2}$

∴ $[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}]_{(1,1)} = 2 \times 1 - \frac{1}{1^2} = 1$

∴ ظا هـ = ١ ∴ هـ $= \text{ظا}^{-1}(1) = 45°$

④ ص = $\frac{\text{س}+٣}{\text{س}-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}-٢)\times ١-(\text{س}+٣)\times ١}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}-٢-\text{س}-٣}{(\text{س}-٢)^{٢}} = \frac{-٥}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}_{(٣،١)} = \frac{-٥}{(٣-٢)^{٢}} = -٥$ ∴ طا هـ = −٥

هـ = طا$^{-١}$(−٥) = ١٠١°١٨′٣٥″

⑤ ص = س(س^{٢} − ١) ∴ ص = س^{٣} − س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} − ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}_{(٠،٠)}$ = ٣(٠)^{٢} − ١ = −١ ∴ طا هـ = −١

هـ = طا$^{-١}$(−١) = ١٣٥°

⑥ ص = $\sqrt{٢\text{س}^{٢}+٧}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س}}{٢\sqrt{٢\text{س}^{٢}+٧}} = \frac{٢\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}^{٢}+٧}}$

عند النقطة (−٣، ٥)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\times -٣}{\sqrt{٢\times ٩+٧}} = \frac{-٦}{٥}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ميل المماس = $\frac{-٦}{٥}$ ∴ ميل العمودي = $\frac{٥}{٦}$

طا هـ = $\frac{٥}{٦}$ ∴ ق(∠هـ) = ٣٩°٤٨′

⑦ ص = جا ٢س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ جتا ٢س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}_{(\pi،٠)}$ = ٢ جتا (٢π) = ٢

طا هـ = ٢ ∴ هـ = طا$^{-١}$(٢) = ٦٣°٢٦′

⑧ ص = س^{٣} + ٣س − ١ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} + ٣

عند ميل المماس = ٦ ∴ ٣س^{٢} + ٣ = ٦

٣س^{٢} = ٣ (÷٣) ∴ س^{٢} = ١

∴ س = ±١ عندما س = ١

∴ ص = (١)^{٣} + ٣(١) − ١ = ٣ ، عندما س = −١

∴ ص = (−١)^{٣} + ٣(−١) − ١ = −٥

∴ النقط هي (١، ٣)، (−١، −٥)

⑨ ص = س^{٣} − ٦س^{٢} − ١٥س + ٢٠

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س − ١٥

∵ المماس // محور السينات ∴ ميل المماس = صفر

∴ ٣س^{٢} − ١٢س − ١٥ = ٠ (÷٣)

س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠ ∴ (س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = −١ عندما س = ٥

ص = ١٢٥ − ١٥٠ − ٧٥ + ٢٠ = −٨٠ ، عندما س = −١

∴ ص = −١ − ٦ + ١٥ + ٢٠ = ٢٨

∴ النقط هي (٥، −٨٠)، (−١، ٢٨)

⑩ ∵ ص = س^{٣} − ٤س + ٣ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} − ٤

∵ المماس يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس = طا ١٣٥° = −١

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} − ٤ = −١ ∴ ٣س^{٢} = ٣

∴ س = ±١

عندما س = −١ ∴ ص = (−١)^{٣} − ٤(−١) + ٣ = ٦

عندما س = ١ ∴ ص = ١ − ٤ + ٣ = ٠

∴ النقط هي (−١، ٦)، (١، ٠)

⑪ ① ص = ٣س^{٢} − ١١س + ٥ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦س − ١١

∵ المماس // المستقيم

∴ ميل المستقيم = ميل المماس

ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = −٢

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −٢ ∴ ٦س − ١١ = −٢

٦س = ٩ (÷٦) ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ ص = ٣$\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ − ١١ × $\frac{٣}{٢}$ + ٥ = $\frac{-١٩}{٤}$

∴ النقطة $\left(\frac{٣}{٢}، \frac{-١٩}{٤}\right)$

② معادلة المستقيم ٢٥ص + س = ٦

ميل العمودي = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ٢٥ ∴ ٦س − ١١ = ٢٥

٦س = ٣٦ (÷٦) ∴ س = ٦

∴ ص = ٣(٦)^{٢} − ١١ × ٦ + ٥ = ٤٧

∴ النقطة (٦، ٤٧)

③ المماس يصنع زاوية ظلها = −١١

طا هـ = −١١ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = طا هـ

٦س − ١١ = −١١ ∴ ٦س = ٠ ∴ س = ٠

∴ ص = ٣(٠)^{٢} − ١١ × ٠ + ٥ = ٥ ∴ النقطة (٠، ٥)

(١٢) ص = (س − ٣)^{٢} − ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ (س − ٣) = ٢س − ٦

معادلة المستقيم: ٢س + ص − ٣ = ٠

ميل المستقيم = $\frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{١}$ = −٢

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٢ ، ∵ المماس // المستقيم

∴ ميل المماس = ميل المستقيم ∴ ٢س − ٦ = −٢

٢س = ٤ (÷ ٢) ∴ س = ٢

ص = (٢ − ٣)^{٢} − ١ = صفر ∴ النقطة هي (٢ ، ٠)

---

(١٣) ص = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ١}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{(\text{س}-١)\times ١ - (\text{س}-٢)\times ١}{(\text{س}-١)^{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}-١-\text{س}+٢}{(\text{س}-١)^{٢}}$ = $\frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}$

معادلة المستقيم: ص = س + ٤ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

∵ المماس // المستقيم ∴ ميل المماس = ميل المستقيم

$\frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}$ = ١ ∴ (س − ١)^{٢} = ١

∴ س − ١ = ±١

عندما س − ١ = ١ ∴ س = ٢ ∴ ص = $\frac{٢-٢}{٢-١}$ = ٠

عندما س − ١ = −١ ∴ س = ٠ ∴ ص = $\frac{٠-٢}{٠-١}$ = ٢

∴ النقط هي (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

---

(١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{(\text{س}-١)\times ١ - (\text{س}-٢)\times ١}{(\text{س}-١)^{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}-١-\text{س}+٢}{(\text{س}-١)^{٢}}$ = $\frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}$

معادلة المستقيم: ص + س = ٧

ميل العمودي = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ١

∴ $\frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}$ = ١

(س − ١)^{٢} = ١ ∴ س − ١ = ±١

أما س − ١ = ١ ومنها س = ٢

أو س − ١ = −١ ومنها س = صفر

عندما س = ٢ ∴ ص = $\frac{٢-٢}{٢-١}$ = صفر

عندما س = صفر ∴ ص = $\frac{٠-٢}{٠-١}$ = ٢

∴ النقط هي (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

---

(١٥) ص = جا ٢س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جتا ٢س

معادلة المستقيم: ص + س = ٠

∴ ميل المستقيم = $\frac{-١}{١}$ = −١ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١

∴ ٢ جتا ٢س = −١ ∴ جتا ٢س = $\frac{-١}{٢}$

جتا سالبة في الربع الثاني ، الثالث

الربع الثاني: ∴ ٢س = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∴ س = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

أو الربع الثالث: ∴ ٢س = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

س = ١٢٠° ∉]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[عندما س = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ص = جا ٢ × $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ النقطة هي ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

---

(١٦) ص = جا س + جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا س − جا س

∵ المماس // محور السينات ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ جتا س − جا س = ٠

∴ جتا س = جا س (÷ جتا س)

١ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ∴ ظا س = ١

ظا موجبة في الربع الأول ، الثالث

الربع الأول: ∴ س = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ص = جا ٤٥° + جتا ٤٥° = $\sqrt{٢}$

الربع الثالث:

س = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥° ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] (مرفوض)

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\sqrt{٢}$).

---

(١٧) ① ص = ٢س^{٣} − ٤س^{٢} + ٣ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٨س

عند س = ٢ ∴ ص = ٣ ⇐ (٢ ، ٣)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦(٢)^{٢} − ٨ × ٢ = ٨

معادلة المماس عند (٢ ، ٣)

(ص − ص$_{١}$) = م (س − س$_{١}$) ∴ ص − ٣ = ٨ (س − ٢)

$\therefore$ ص − ٣ = ٨ س − ١٦ $\qquad$ $\therefore$ ص = ٨ س − ١٣

أو ص − ٨ س + ١٣ = صفر

② ص = س + $س^{-١}$ $\qquad$ $\therefore \frac{دص}{دس}$ = ١ − $س^{-٢}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(٢ ، \frac{٥}{٢})}$ = ١ − $(٢)^{-٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

معادلة المماس: (ص − $\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٢)

٤ص − ١٠ = ٣س − ٦ $\qquad$ $\therefore$ ٣س − ٤ص + ٤ = ٠

③ ص = $س^{\frac{١}{٢}}$ + ٤ $س^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ − ٢ $س^{-\frac{٣}{٢}}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(٤ ، ٤)}$ = $\frac{١}{٢}$ $(٤)^{-\frac{١}{٢}}$ − ٢ $(٤)^{-\frac{٣}{٢}}$ = صفر

(ص − ٤) = صفر (س − ٤) $\qquad$ $\therefore$ ص − ٤ = ٠

④ ص = ($س^٢$ + س) ($س^٣$ + ٥)

$\frac{دص}{دس}$ = ($س^٢$ + س) × ٣ $س^٢$ + ($س^٣$ + ٥) × (٢س + ١)

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(-٢ ، -٦)}$ = (٤ − ٢) × ٣ × ٤ + (−٨ + ٥) × (−٤ + ١) = ٣٣

(ص + ٦) = ٣٣ (س + ٢)

ص + ٦ = ٣٣ س + ٦٦ $\qquad$ $\therefore$ ٣٣ س − ص + ٦٠ = ٠

⑤ ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(س + ١) × ١ − (س + ٣) × ١}{(س + ١)^٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س + ١ − س − ٣}{(س + ١)^٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٢}{(س + ١)^٢}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(١ ، ٢)}$ = $\frac{-٢}{(١ + ١)^٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

(ص − ٢) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ١) $\qquad$ $\therefore$ ٢ص − ٤ = − س + ١

س + ٢ص − ٥ = ٠

⑥ ص = $(س^٢ − ٣)^٤$

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ $(س^٢ − ٣)^٣$ × ٢س

$\frac{دص}{دس}$ = ٨س $(س^٢ − ٣)^٣$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(٢ ، ١)}$ = ٨ × ٢ $(٤ − ٣)^٣$ = ١٦

(ص − ١) = ١٦ (س − ٢) $\qquad$ $\therefore$ ص − ١ = ١٦ س − ٣٢

١٦ س − ص − ٣١ = ٠

⑦ $\because$ ص = ٤س − طا س $\qquad$ $\therefore \frac{دص}{دس}$ = ٤ − $قا^٢$ س

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ $\qquad$ $\therefore$ م = ٤ − $قا^٢ \frac{\pi}{٤}$ = ٢

وبالتعويض من س = $\frac{\pi}{٤}$ في معادلة المنحنى نجد أن:

ص = π − طا $\frac{\pi}{٤}$ = π − ١

أي أن: النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π − ١) تقع على المنحنى

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π − ١) هي:

ص − (π − ١) = ٢ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

ص − π + ١ = ٢س − $\frac{\pi}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ ص = ٢س + $\frac{\pi}{٢}$ − ١

⑧ ص = ٢ جا س + جتا س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا س − جا س

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(٠ ، ١)}$ = ٢ جتا ٠ − جا ٠ = ٢

(ص − ١) = ٢ (س − ٠)

ص − ١ = ٢س $\qquad$ $\therefore$ ٢س − ص + ١ = ٠

⑨ ص = $\frac{١ + جا س}{١ − جا س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(١ − جا س) × جتا س − (١ + جا س) × − جتا س}{(١ − جا س)^٢}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(\pi ، ١)}$ = $\frac{(١ − جا \pi) × جتا \pi − (١ + جا \pi) × − جتا \pi}{(١ − جا \pi)^٢}$

م = $\frac{-١ -١}{١}$ = −٢

م = −٢ $\qquad$ $\therefore$ ص − ١ = −٢ (س − π)

ص − ١ = −٢ س + ٢π

٢ س + ص − ٢π − ١ = ٠

[١٨] ① $\frac{دص}{دس}$ = ٢س − ٣$س^٢$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(٢ ، -٤)}$ = ٢ (٢) − ٣ $(٢)^٢$ = −٨

⇐ ميل العمودي = $\frac{١}{٨}$

معادلة العمودي هي، (ص + ٤) = $\frac{١}{٨}$ (س − ٢)

٨ ص + ٣٢ = س − ٢ $\qquad$ $\therefore$ س − ٨ ص − ٣٤ = ٠

② ص = $\frac{س^٣ − ١}{س^٣}$ $\qquad$ $\therefore$ ص = ١ − $س^{-٣}$

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ $س^{-٤}$ $\qquad$ $\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{(١ ، ٠)}$ = ٣ $(١)^{-٤}$ = ٣

معادلة العمودي:

$(ص - ص_1) = \frac{-1}{م}(س - س_1)$

$(ص - ٠) = \frac{-١}{٣}(س - ١)$

$٣ص = -س + ١$ ∴ $س + ٣ص - ١ = ٠$

---

③ $ص = \frac{س+٢}{س-٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{(س-٢)\times١ - (س+٢)\times١}{(س-٢)^٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{س-٢-س-٢}{(س-٢)^٢} = \frac{-٤}{(س-٢)^٢}$

$[\frac{وص}{وس}]_{(٣،٥)} = \frac{-٤}{(٣-٢)^٢} = -٤ \Leftarrow$ ميل العمودى $= \frac{١}{٤}$

$(ص - ٥) = \frac{١}{٤}(س - ٣)$ ∴ $٤ص - ٢٠ = س - ٣$

$س - ٤ص + ١٧ = ٠$

---

④ $ص = (س - ٣)^٣ + ٣$ ∴ $\frac{وص}{وس} = ٣(س-٣)^٢$

$[\frac{وص}{وس}]_{(٤،٤)} = ٣(٤-٣)^٢ = ٣$

∴ معادلة العمودى هى : $ص - ٤ = \frac{-١}{٣}(س - ٤)$

∴ $٣ص - ١٢ = -س + ٤$

∴ $س + ٣ص - ١٦ = ٠$

---

⑤ $ص = \frac{س^٢ - ١}{٢ - س^٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{(٢-س^٢)\times٢س - (س^٢-١)\times-٢س}{(٢-س^٢)^٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{٤س-٢س^٣+٢س^٣-٢س}{(٢-س^٢)^٢}$

$\frac{وص}{وس} = \frac{٢س}{(٢-س^٢)^٢}$

$[\frac{وص}{وس}]_{(٠،١)} = \frac{٢\times٠}{(٢-٠^٢)^٢} =$ صفر

∴ معادلة العمودي هى : $س = ٠$

---

⑥ $ص = ظا س$ ∴ $\frac{وص}{وس} = قا^٢ س$

$[\frac{وص}{وس}]_{(\frac{\pi}{٤}،١)} = قا^٢ \frac{\pi}{٤} = ٢$

∴ $(ص - ١) = \frac{-١}{٢}(س - \frac{\pi}{٤})$

$٢ص - ٢ = -س + \frac{\pi}{٤}$ $(\times ٤)$

$٤س + ٨ص - \pi - ٨ = ٠$

---

⑦ $ص = ٢$ جا س + جتا س

$\frac{وص}{وس} = ٢$ جتا س − جا س

$[\frac{وص}{وس}]_{(\frac{\pi}{٤}، \frac{٣\sqrt{٢}}{٢})} = ٢$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ − جا $\frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$(ص - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}(س - \frac{\pi}{٤})$

$\sqrt{٢}ص - ٣ = -٢س + \frac{\pi}{٢}$

$٢س + \sqrt{٢}ص - \frac{\pi}{٢} - ٣ = ٠$ $(\times ٢)$

$٢س + ٢\sqrt{٢}ص - \pi - ٦ = ٠$

---

⑲ نقط التقاطع مع محور السينات $\Leftarrow$ نضع ص = ٠

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

∴ $س = ٢$ ، $س = -١$

النقط $(٢، ٠)$ ، $(-١، ٠)$

$\frac{وص}{وس} = (س - ٢) \times ١ + (س + ١) \times ١$

$= س - ٢ + س + ١ = ٢س - ١$

عندما $س = ٢$ ∴ $[\frac{وص}{وس}]_{(٢،٠)} = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

عندما $س = -١$

∴ $[\frac{وص}{وس}]_{(-١،٠)} = ٢ \times -١ - ١ = -٣$

معادلة المماس عند $(٢، ٠)$

$(ص - ٠) = ٣(س - ٢)$ ∴ $ص = ٣س - ٦$

$٣س - ص - ٦ = ٠$ ، معادلة المماس عند $(-١، ٠)$

$(ص - ٠) = -٣(س + ١)$ ∴ $ص = -٣س - ٣$

$٣س + ص + ٣ = ٠$

---

⑳ لايجاد نقط التقاطع:

$ص = \sqrt{٦ - س}$ ، $ص = س$

∴ $س = \sqrt{٦ - س}$ (بتربيع الطرفين)

$س^٢ = ٦ - س$ ∴ $س^٢ + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣$ ، $س = ٢$

∵ $ص = \sqrt{٦ - س}$

عندما $س = -٣$

∴ $ص = \sqrt{٦ - (-٣)} = \sqrt{٩} = ٣$

$(-٣، ٣) \notin$ للمستقيم لأن ص ≠ س

عندما $س = ٢$ ∴ $ص = \sqrt{٦ - ٢} = ٢$

$(٢، ٢) \in$ للمستقيم لأن ص = س

∵ $ص = \sqrt{٦ - س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{٦ - \text{س}}} \times -١$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - \text{س}}}$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٢،٢)} = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - ٢}} = \frac{-١}{٤}$

معادلة المماس هي: $(\text{ص} - ٢) = \frac{-١}{٤}(\text{س} - ٢)$

$٤\text{ص} - ٨ = -\text{س} + ٢$ ∴ $\text{س} + ٤\text{ص} - ١٠ = ٠$

(٢١) لايجاد نقط التقاطع:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + ٦$ ، $\text{ص} = \text{س}$

∴ $\text{س} = \sqrt{\text{س}} + ٦$

$\text{س} - \text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٦ = ٠$

∴ $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٣)(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٢) = ٠$

إما $\text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٣$ أو $\text{س}^{\frac{١}{٢}} = -٢$

$\text{س} = ٩$

∴ $\sqrt{\text{س}} = -٢$ (مرفوض) لأن $\sqrt{\text{س}} > ٠$

$\text{ص} = \sqrt{٩} + ٦$ $\text{ص} = ٩ \Leftarrow (٩، ٩)$

∴ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + ٦$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٩،٩)} = \frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

معادلة العمودي: $(\text{ص} - ٩) = -٦(\text{س} - ٩)$

$\text{ص} - ٩ = -٦\text{س} + ٥٤$ ∴ $٦\text{س} + \text{ص} - ٦٣ = ٠$

(٢٢) $\text{ص} = \text{س}^٢ + \text{س} - ١$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + ١$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(١،١)} = ٢ \times ١ + ١ = ٣ = م_١$

$\text{ص} = ٢ - \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{-٢}{٣}}$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(١،١)} = -\frac{١}{٣}(١) = -\frac{١}{٣} = م_٢$

∵ $م_١ \times م_٢ = ٣ \times -\frac{١}{٣} = -١$

∴ المماس للمنحني الأول ⊥ المماس للمنحني الثاني

(٢٣) $\text{ص} = \text{س}^٣ + \text{س} + ٢$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢ + ١$

$\text{س}^٢$ عدد مربع موجباً دائماً

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = موجباً دائماً = طا هـ ∴ هـ زاوية حادة

∴ المماسات لمنحني الدالة عند أي نقطة عليه تميل بزاوية حادة على محور السينات ، عندما $\text{س} = -١$

∴ $\text{ص} = (-١)^٣ + (-١) + ٢ = ٠$

∴ النقطة هي $(-١، ٠)$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢ + ١$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(-١،٠)} = ٣(-١)^٢ + ١ = ٤$

معادلة المماس: $(\text{ص} - ٠) = ٤(\text{س} + ١)$

$\text{ص} = ٤\text{س} + ٤$ ∴ $٤\text{س} - \text{ص} + ٤ = ٠$

معادلة العمودي: $(\text{ص} - ٠) = \frac{-١}{٤}(\text{س} + ١)$

∴ $٤\text{ص} = -\text{س} - ١$ ∴ $٤\text{ص} + \text{س} + ١ = ٠$

(٢٤) $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - ١) \times ١ - (\text{س} + ١) \times ١}{(\text{س} - ١)^٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} - ١ - \text{س} - ١}{(\text{س} - ١)^٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^٢} = \frac{\text{سالب}}{\text{موجب}} = \text{سالب}$

∴ طا هـ = سالبة دائماً لجميع قيم س

∴ $٩٠° < \text{هـ} < ١٨٠°$

∴ هـ زاوية منفرجة دائماً

∴ المماس عند أي نقطة على المنحني يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٢٥) لايجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

$\text{ص} = ٢\,\text{جا}(٠) + ٣\,\text{جتا}(٠) = ٣ \Leftarrow (٠، ٣)$

$\text{ص} = ٢\,\text{جا}\,\text{س} + ٣\,\text{جتا}\,\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جتا}\,\text{س} - ٣\,\text{جا}\,\text{س}$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٠،٣)} = ٢\,\text{جتا}\,٠ - ٣\,\text{جا}\,٠ = ٢$

معادلة المماس هي:

$(\text{ص} - ٣) = ٢(\text{س} - ٠)$ ∴ $\text{ص} - ٣ = ٢\text{س}$

$٢\text{س} - \text{ص} + ٣ = ٠$

معادلة العمودي هي: $(\text{ص} - ٣) = \frac{-١}{٢}(\text{س} - ٠)$

$٢\text{ص} - ٦ = -\text{س}$ ∴ $\text{س} + ٢\text{ص} - ٦ = ٠$

(٢٦) لايجاد نقط التقاطع مع محور السينات بوضع ص = ٠

$٣\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٤ = ٠$ ∴ $(٣\text{س} - ٤)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = \frac{٤}{٣}$ ، $\text{س} = ١$

$(\frac{٤}{٣}، ٠)$ ، $(١، ٠)$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٦س - ٧$ ص = ٣س^٢ - ٧س + ٤

$[\frac{دص}{دس}]_{(\frac{٤}{٣}، ٠)} = ٦ \times \frac{٤}{٣} - ٧ = ١$

ميل المماس = ١ ∴ $م_١ = ١$

$[\frac{دص}{دس}]_{(١، ٠)} = ٦ \times ١ - ٧ = -١$

ميل المماس = -١ ∴ $م_٢ = -١$

$م_١ \times م_٢ = ١ \times -١ = -١$ ∴ المماسان متعامدان

(٢٧) ص = س^٣ ∴ $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢ = م$

معادلة المماس المار بالنقطة (٤، ٠)

$(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

$(ص - ٠) = ٣س^٢(س - ٤)$

ص = ٣س^٣ - ١٢س^٢ ∵ ص = س^٣

∴ س^٣ = ٣س^٣ - ١٢س^٢ ∴ ٢س^٣ - ١٢س^٢ = ٠

٢س^٢ (س - ٦) = ٠

اما س = ٠ أو س = ٦

عندما س = ٠ ∴ ص = (٠)^٣ = ٠

عندما س = ٦ ∴ ص = (٦)^٣ = ٢١٦

∴ النقط هي (٠، ٠)، (٦، ٢١٦)

(٢٨) ص = س^٢ - ٦س + ١٣ ∴ $\frac{دص}{دس} = ٢س - ٦$

$[\frac{دص}{دس}]_{(٤، ٥)} = ٢ \times ٤ - ٦ = ٢$

معادلة المماس هي: (ص - ٥) = ٢ (س - ٤)

ص - ٥ = ٢س - ٨ ∴ ٢س - ص - ٣ = ٠

لايجاد نقط تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أ ($\frac{٣}{٢}$، ٠)

معادلة العمودي هي: (ص - ٥) = $\frac{-١}{٢}$ (س - ٤)

٢ص - ١٠ = - س + ٤ ∴ س + ٢ص - ١٤ = ٠

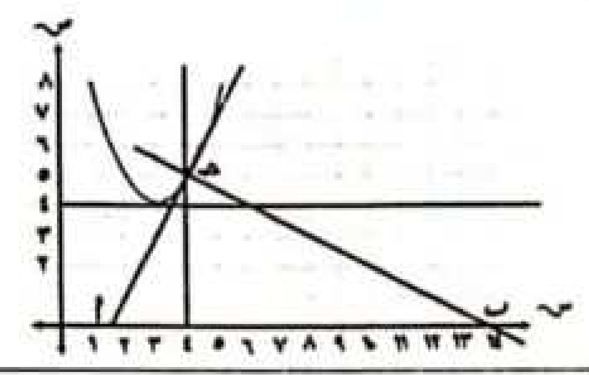
لايجاد نقط تقاطع العمودي على محور السينات بوضع ص = ٠

س - ١٤ = ٠ ∴ س = ١٤

النقطة (١٤، ٠)

أ ب = ١٤ - $\frac{٣}{٢}$ = ١٢,٥ وحدة طول

مساحة Δ أ ب هـ = $\frac{١}{٢} \times ١٢,٥ \times ٥ = ٣١,٢٥$ وحدة مربعة



(٢٩) ص = (س - ٣)^٢ + ٣ ∴ $\frac{دص}{دس} = ٢(س - ٣)$

① لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات بوضع س = ٠

ص = (٠ - ٣)^٢ + ٣ = ١٢ ⟸ أ (٠، ١٢)

$[\frac{دص}{دس}]_{(٠، ١٢)} = ٢(٠ - ٣) = -٦$

معادلة المماس هي:

(ص - ١٢) = -٦ (س - ٠) ∴ ص - ١٢ = -٦س

٦س + ص - ١٢ = ٠

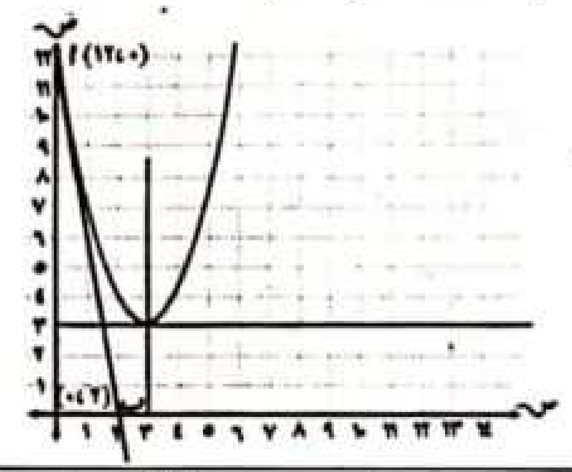
② لايجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ٦س + ٠ - ١٢ = ٠ ∴ س = ٢

∴ نقطة التقاطع هي (٢، ٠)

③ مساحة Δ المطلوب هو مساحة Δ و أ ب

= $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١٢ = ١٢$ وحدة مربعة



(٣٠) نفرض أن هـ (أ، $\frac{٤}{أ}$) ∵ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٤}{س^٢}$

∴ ميل المماس عند هـ (أ، $\frac{٤}{أ}$) يساوي $\frac{-٤}{أ^٢}$

معادلة المماس عند هـ هي: ص - $\frac{٤}{أ}$ = $\frac{-٤}{أ^٢}$ (س - أ)

بالضرب × أ^٢ ∴ أ^{٢}ص - ٤أ = -٤س + ٤أ

∴ معادلة م ن هي أ^2 ص + ٤س = ٨أ

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم م ن مع محور السينات فإن ص = ٠

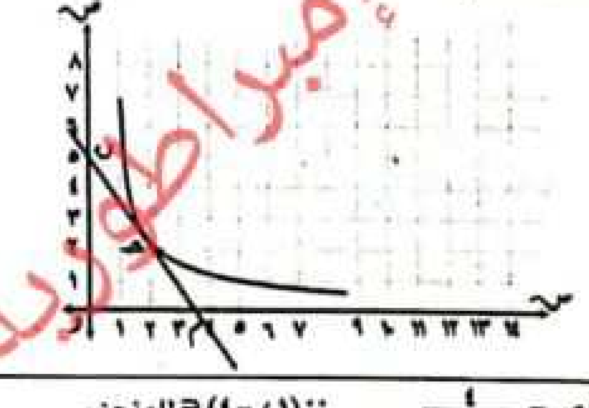
∴ س = ٢أ   أي أن و م = ٢أ من الوحدات

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم م ن مع محور الصادات فإن س = ٠

∴ ص = $\frac{٨}{أ}$ أي أن و ن = $\frac{٨}{أ}$ من الوحدات

∴ مساحة △ م و ن = $\frac{١}{٢}$ × ٢أ × $\frac{٨}{أ}$ = ٨ وحدة مربعة.

وهي كمية ثابتة لا تعتمد على إحداثيي نقطة هـ الواقعة على المنحني.



(٣١) ص = $\frac{٤}{أس + ب}$ ∵ (١، -٤) ∈ للمنحني

∴ -٤ = $\frac{٤}{أ × ١ + ب}$

∴ -٤(أ + ب) = ٤   (÷ -٤)

∴ أ + ب = -١ ← (١)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(أس + ب) × ٠ - ٤ × أ}{(أس + ب)^2}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٤أ}{(أس + ب)^2}$

$[\frac{دص}{دس}]_{(١، -٤)}$ = -٨   ∴ -٨ = $\frac{-٤أ}{(أ + ب)^2}$

∴ -٨ = $\frac{-٤أ}{(-١)^2}$

-٨ = -٤أ   (÷ -٤)   ∴ أ = ٢

بالتعويض في (١) عن أ

∴ ٢ + ب = -١   ∴ ب = -٣

(٣٦) ∵ النقطة (-١، -٣) تقع على المنحني ص = أ س^3 + ب س^2

∴ -٣ = أ(-١)^3 + ب(-١)^2 أي أ - ب = ٣ ← (١)

ميل المماس للمنحني عند أي نقطة عليه

= $\frac{دص}{دس}$ = ٣أ س^2 + ٢ب س

∵ المستقيم ص = ٨س + ٥ مماس للمنحني عند النقطة (-١، -٣)

∴ $[\frac{دص}{دس}]_{(-١، -٣)}$ = ميل المستقيم = ٨

∴ ٣أ(-١)^2 + ٢ب(-١) = ٨

أي ٣أ - ٢ب = ٨ ← (٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) نجد أن: أ = ٢ ، ب = -١

(٣٣) ص = (س^2 - ٢س)(أس + ب)

$\frac{دص}{دس}$ = (س^2 - ٢س) × أ + (أس + ب)(٢س - ٢)

∵ المنحني يمس محور السينات عند (٢، ٠)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = صفر عند س = ٢

∴ صفر = (٢^2 - ٢ × ٢) × أ + (أ × ٢ + ب) × (٢ × ٢ - ٢)

٢(٢أ + ب) = ٠   ∴ ٢أ + ب = ٠ ← (١)

ص = ٢س   (مماس للمنحني)   ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢

∵ المستقيم مماس للمنحني عند (٠، ٠)

∴ $\frac{دص}{دس}$ للمنحني = ٢ عند (٠، ٠)

٢ = (٠ - ٢ × ٠) أ + (أ × ٠ + ب) × (٢ × ٠ - ٢)

٢ = -٢ب   (÷ -٢)   ∴ ب = -١

بالتعويض في (١) عن ب

٢أ - ١ = ٠   ∴ ٢أ = ١   ∴ أ = $\frac{١}{٢}$

(٣٤) د(س) = أ س^2 + ب س + ٥

∵ النقطة (-١، ٣) ∈ للمنحني

∴ ٣ = أ(-١)^2 + ب(-١) + ٥

أ - ب = -٢ ← (١)

د'(س) = ٢أس + ب ⇐ (-١، ٣)، د'(-١) = ظا ٤٥°

-٢أ + ب = ١ ⇐ (٢)

بحل (١)، (٢) معاً   ∴ أ = ١ ، ب = ٣

(٣٥) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق

∴ د'(س) = { ٢س + ١ ، س < ١ ؛ ٣ ، س > ١ }

عندما س = ١   ∴ د'(١) = ٣

ص = ٣ × ١ = ٣ ⇐ (١، ٣)

معادلة المماس هي: (ص − ٣) = ٣ (س − ١)

ص − ٣ = ٣س − ٣ ∴ ٣س − ص = ٠

٣٦ ص = س^{٢} − أ س + أ − ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س − أ ∵ المماس هو محور السينات

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ ∴ ٠ = ٢س − أ

٢س = أ ∴ س = $\frac{\text{أ}}{٢}$

∵ ص = س^{٢} − أ س + أ − ١

∴ ص = س^{٢} − ٢س × س + ٢س − ١

ص = س^{٢} − ٢س^{٢} + ٢س − ١

ص = − س^{٢} + ٢س − ١

∵ محور السينات مماس للمنحنى ∴ ص = ٠

∴ − س^{٢} + ٢س − ١ = ٠ ∴ س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١

∴ نقطة التماس هي (١ ، ٠)

٣٧ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{|\text{س}|}$

د (س) = { س^{٢} س > ٠ ، − س^{٢} س < ٠ }

عند س = ٢ ∴ ص = (٢)^{٢} = ٤

(٢ ، ٤) ∈ للمنحنى

د′(س) = { ٢س س > ٠ ، −٢س س < ٠ }

د′(٢) = ٢ × ٢ = ٤

معادلة المماس هي:

(ص − ٤) = ٤ (س − ٢) ∴ ص − ٤ = ٤س − ٨

∴ ٤س − ص − ٤ = ٠

٣٨ ص = س |س| − ٣س

ص = { س^{٢} − ٣س س ≥ ٠ ، −س^{٢} − ٣س س < ٠ }

عند س = ٢

∴ ص′ = ٢س − ٣ = ٤ − ٣ = ١

∴ م$_{١}$ = ١

عند س = −١

∴ ص′ = −٢س − ٣ = −٢ (−١) − ٣ = −١

∴ م$_{٢}$ = −١

ميل المماس عند (س = ٢) = ١

ميل العمودي عند (س = −١) = ١

∴ المماس عند س = ٢ // العمودي عند س = −١

٣٩ $\frac{١}{\text{أ}^{٢}}$ س^{٢} + $\frac{١}{\text{ب}^{٢}}$ ص^{٢} = ١

$\frac{٢\text{س}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{٢\text{ص}}{\text{ب}^{٢}}$ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٢\text{س}}{\text{أ}^{٢}}$ × $\frac{\text{ب}^{٢}}{٢\text{ص}}$

$\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١})}$ = $\frac{-\text{ب}^{٢}\text{س}_{١}}{\text{أ}^{٢}\text{ص}_{١}}$

معادلة المماس هي:

(ص − ص$_{١}$) = $\frac{-\text{ب}^{٢}\text{س}_{١}}{\text{أ}^{٢}\text{ص}_{١}}$ (س − س$_{١}$)

أ^{٢}ص ص$_{١}$ − أ^{٢} ص$_{١}^{٢}$ = − ب^{٢} س س$_{١}$ + ب^{٢} س$_{١}^{٢}$

(÷ أ^{٢}ب^{٢})

$\frac{\text{ص ص}_{١}}{\text{ب}^{٢}}$ − $\frac{\text{ص}_{١}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ = $\frac{-\text{س س}_{١}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{س}_{١}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}$

$\frac{\text{س س}_{١}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص ص}_{١}}{\text{ب}^{٢}}$ = $\frac{\text{س}_{١}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص}_{١}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$

$\frac{\text{س س}_{١}}{\text{أ}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص ص}_{١}}{\text{ب}^{٢}}$ = ١

٤٠ لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع الدائرة

∵ ص = س^{٢} − ٣س + ٥ ∴ ص − ٥ = س^{٢} − ٣س

∵ س^{٢} − ٣س + ص^{٢} = ٢٥ ∴ ص − ٥ + ص^{٢} = ٢٥

ص^{٢} + ص − ٣٠ = ٠ ∴ (ص + ٦)(ص − ٥) = ٠

ص = −٦ ، ص = ٥

بالتعويض فى معادلة المنحنى عن ص

∴ عندما ص = −٦ ∴ س^{٢} − ٣س + ٥ = −٦

س^{٢} − ٣س − ١١ = ٠

س = $\frac{٣ + \sqrt{٥٣}}{٢}$ (مرفوض)

لا تحققان معادلة الدائرة عندما ص = ٥

∴ س^{٢} − ٣س + ٥ = ٥ ∴ س^{٢} − ٣س = ٠

س (س − ٣) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٣

تحققان معادلة الدائرة

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$ ∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٠،٥)} = ٢ \times ٠ - ٣ = -٣$

معادلة العمودي عند (٠ ، ٥)

$ص - ٥ = \frac{١}{٣}(س - ٠)$ ∴ $٣ص - س - ١٥ = ٠$

$\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٣،٥)} = ٢ \times ٣ - ٣ = ٣$

معادلة العمودي عند (٣ ، ٥)

$ص - ٥ = \frac{-١}{٣}(س - ٣)$ ∴ $٣ص - ١٥ = -س + ٣$

$س + ٣ص - ١٨ = ٠$

---

(١١) $ص = س^٢ + ٥$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

∴ ميل المماس $= ٢س$

المستقيم $ص = ٤س + أ$ ⇐ ميله $= ٤$

∴ $٢س = ٤$ ∴ $س = ٢$

عند $س = ٢$ ∴ $ص = ٩$

النقطة (٢ ، ٩) ∋ للمستقيم

$٩ = ٤ \times ٢ + أ$ ∴ $أ = ١$

---

(١٢) $٢س \times \frac{ءص}{ءس} + \frac{٢}{٢\sqrt{س ص}} \times (س \times \frac{ءص}{ءس} + ص)$

$= -٢س$ عند (١ ، ٤)

∴ $٨ \times \frac{ءص}{ءس} + \frac{١}{٢}(\frac{ءص}{ءس} + ٤) = -٢$

$٨\frac{ءص}{ءس} + \frac{١}{٢}\frac{ءص}{ءس} + ٢ = -٢$ (بالضرب فى ٢)

$١٦\frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} + ٤ = -٤$

⇐ $١٧\frac{ءص}{ءس} = -٤ - ٤ = -٨$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٨}{١٧}$ المعادلة هى :

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$ ⇐ $ص - ٤ = \frac{-٨}{١٧}(س - ١)$

$١٧ص - ٦٨ = -٨س + ٨$ ⇐ $٨س + ١٧ص - ٧٦ = ٠$

---

(١٣) $ص = أ \text{ جا } س \text{ جتا } س + ب = \frac{أ}{٢} \text{ جا } ٢س + ب$

∵ النقطة $(\frac{\pi}{٢} ، ٣)$ تقع على المنحنى

∴ $٣ = ٠ + ب$ ∴ $ب = ٣$

$ص'$ للمنحنى = ميل المستقيم

$أ \text{ جتا } ٢س = -٢$ ∴ $أ \text{ جتا } \pi = -٢$

∴ $-أ = -٢$ ∴ $أ = ٢$

تمارين (٧) على التكامل

(١) ① ٩ ② ٦

③ $\frac{-١}{٣}$ ④ ١٠٩

⑤ $ص = ٣س^٢ - ١١س + ٥$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س - ١١$ ⇐ $٢س + ص - ٥ = ٠$

$٢ + \frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٢$

∵ المماس للمنحنى // المستقيم

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنى $= \frac{ءص}{ءس}$ للمستقيم

∴ $٦س - ١١ = -٢$

∴ $٦س = ٩$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

بالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ $ص = ٦\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - ١١ \times \frac{٣}{٢} + ٥ = \frac{٣١}{٢}$

∴ النقطة هى $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{٣١}{٢}\right)$

---

⑥ $ص = (س^٢ + س)(س^٣ + ٥)$

$\frac{ءص}{ءس} = (س^٢ + س) \times ٣س^٢ + (س^٣ + ٥)(٢س + ١)$

عند النقطة (−٢ ، −٦)

∴ $م = \frac{ءص}{ءس} = (٤ + (-٢)) \times ٣ \times ٤ + (-٨ + ٥)$

$(-٤ + ١) = ٣٣$

معادلة المماس هى $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

$\frac{ص + ٦}{س + ٢} = ٣٣$

$٣٣س + ٦٦ = ص + ٦$

$٣٣س - ص + ٦٠ = ٠$

معادلة العمودى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{-١}{م}$

$\frac{ص + ٦}{س + ٢} = \frac{-١}{٣٣}$

$٣٣ص + ١٩٢ = -س - ٢$

$س + ٣٣ص + ١٩٤ = ٠$

---

(٢) ① $س^٢ - ٣س + ث$ ② $س^٣ - س^٢ + ٥س + ث$

③ $\frac{١}{٥}س + ث$ ④ $\frac{٢}{٣س} + ث$

⑤ $١٠س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{١٥}س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑥ $\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٥} \text{ جتا } ٥س + ث$

⑧ $\int (٣\sqrt{س} - \frac{٢}{س^{٢}})\,ءس$

$= \int (٣س^{\frac{١}{٢}} - ٢س^{-٢})\,ءس$

$= \frac{٣س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢س^{-١}}{-١} + ث = ٢س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{-١} + ث$

⑨ $\int (أس^{٢} + ٥س + هـ)\,ءس$

$= \frac{أس^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + هـ س + ث$

⑩ $\int س(س - ٤)\,ءس = \int (س^{٢} - ٤س)\,ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + ث$

⑪ $\int س^{٢}(٣س - \frac{٥}{س})\,ءس$

$= \int (٣س^{٣} - ٥س)\,ءس = \frac{٣}{٤}س^{٤} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + ث$

⑫ $\int (س - ٣)(س + ٣)\,ءس$

$= \int (س^{٢} - ٩)\,ءس = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٩س + ث$

٥ ① $\int (س - ٥)(س + ١)\,ءس$

$= \int (س^{٢} - ٤س - ٥)\,ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ث$

② $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢}\,ءس$

$= \int (س - ٢\sqrt{س} + ١)\,ءس$

$= \int (س - ٢س^{\frac{١}{٢}} + ١)\,ءس$

$= \frac{١}{٢}س^{٢} - \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + س + ث$

③ $\int (س - \frac{١}{س})^{٢}\,ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}})\,ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢ + س^{-٢})\,ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - س^{-١} + ث$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - \frac{١}{س} + ث$

④ $\int (\frac{٢س^{٢} + ٣}{س^{٢}})\,ءس$

$= \int (\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}})\,ءس + \int \frac{٣}{س^{٢}}\,ءس$

$= \int ٢\,ءس + \int ٣س^{-٢}\,ءس$

$= ٢س + ٣س^{-١} + ث = ٢س - \frac{٣}{س} + ث$

⑦ $٢س^{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}س + ث$

⑧ $\frac{١}{٤}(س + ٥)^{٤} + ث$ ⑨ $\frac{١}{١١}(س - ١)^{١١} + ث$

⑩ $\frac{١}{٢٤}(س^{٢} + ٤س - ٧)^{١٢} + ث$

⑪ $\frac{-١}{٤}(٤س^{٢} - ٤س + ١)^{-٤} + ث = \frac{-١}{٤(٢س - ١)^{٨}} + ث$

⑫ $\frac{١}{٦}(س - ١)^{٦} + ث$ ⑬ $\frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{-٣} + ث$

⑭ $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

⑮ $جا\left(س + \frac{\pi}{٤}\right) + ث$

⑯ $س + ث$ ⑰ $س + جتا\,س + ث$

⑱ $-جتا\,س + ث$ ⑲ $ظا^{٢}س + ث$

⑳ $-\frac{١}{٢}جتا\,٢س + ث$ ㉑ $س^{٢} + ٥س$ ㉒ $س^{٢} + ث$

٣ ① -٢ ② $جا\,س + ث$ ③ $س + ث$

④ $س + ث$ ⑤ $جا\,س + جتا\,س$

⑥ $جا\,س - جتا\,س + ث$ ⑦ $(س - ١)^{٦} + ث$

⑧ $\frac{١}{٩}\sqrt{(٢س - ١)^{٣}}$ ⑨ $\frac{١}{٩}(٥س + ٣)^{\frac{٩}{٥}}$ ⑩ $\frac{١}{٢}$

٤ ① $\int ٩س^{٢}\,ءس = \frac{٩س^{٣}}{٣} + ث = ٣س^{٣} + ث$

② $\int ١٢س^{-٢}\,ءس = \frac{١٢س^{-١}}{-١} + ث$

$= -١٢س^{-١} + ث = \frac{-١٢}{س} + ث$

③ $\int ٥\sqrt{س^{٣}}\,ءس = \int ٥س^{\frac{٣}{٢}}\,ءس$

$= \frac{٥س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ث = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ث = ٢\sqrt{س^{٥}} + ث$

④ $\int \sqrt[٣]{س}\,ءس = \int س^{\frac{١}{٣}}\,ءس$

$= \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ث = \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + ث$

⑤ $\int \frac{-٨}{٥}ل^{-٣}\,ءل = \frac{\frac{-٨}{٥}ل^{-٢}}{-٢} + ث$

$= \frac{٤}{٥}ل^{-٢} + ث = \frac{٤}{٥ل^{٢}} + ث$

⑥ $\int ٢(٣ع^{٢} - ٥)\,ءع = \int (٦ع^{٢} - ١٠)\,ءع$

$= \frac{٦ع^{٣}}{٣} - ١٠ع + ث = ٢ع^{٣} - ١٠ع + ث$

⑦ $\int (٤س^{٢} + ٥س - ٢)\,ءس$

$= \frac{٤س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} - ٢س + ث$

٥) $\int \frac{\text{س}^6+3\text{س}^4+\text{س}^2}{\text{س}^2}\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}^4+3\text{س}^2+1)\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{5}\text{س}^5+\text{س}^3+\text{س}+\text{ث}$

---

٦) $\int \left(\frac{\text{س}^2-4}{\text{س}-2}\right)\text{ء س}$

$= \int \left(\frac{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}{(\text{س}-2)}\right)\text{ء س}$

$= \int (\text{س}+2)\,\text{ء س} = \frac{1}{2}\text{س}^2+2\text{س}+\text{ث}$

---

٧) $\int \left(\frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}\right)\text{ء س}$

$= \int \left(\frac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)}{(\text{س}-1)}\right)\text{ء س}$

$= \int (\text{س}^2+\text{س}+1)\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3+\frac{1}{2}\text{س}^2+\text{س}+\text{ث}$

---

٨) $\int \left(\frac{\text{س}^3+8}{\text{س}^2-2\text{س}+4}\right)\text{ء س}$

$= \int \left(\frac{(\text{س}+2)(\text{س}^2-2\text{س}+4)}{\text{س}^2-2\text{س}+4}\right)\text{ء س}$

$= \int (\text{س}+2)\,\text{ء س} = \frac{1}{2}\text{س}^2+2\text{س}+\text{ث}$

---

٩) $\int \left(\frac{\text{س}^2-5\text{س}+6}{\text{س}-2}\right)\text{ء س}$

$= \int \left(\frac{(\text{س}-3)(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)}\right)\text{ء س}$

$= \int (\text{س}-3)\,\text{ء س} = \frac{1}{2}\text{س}^2-3\text{س}+\text{ث}$

---

١٠) $\int 6(\text{س}-2)^5\,\text{ء س}$

$= \frac{6}{6}(\text{س}-2)^6+\text{ث} = (\text{س}-2)^6+\text{ث}$

---

١١) $\int 3(\text{س}+3)^{-4}\,\text{ء س}$

$= \frac{3(\text{س}+3)^{-3}}{-3}+\text{ث} = -(\text{س}+3)^{-3}+\text{ث}$

$= \frac{-1}{(\text{س}+3)^3}+\text{ث}$

---

١٢) $\int (8-3\text{س})^4\,\text{ء س}$

$= \frac{(8-3\text{س})^5}{5\times -3}+\text{ث} = \frac{-1}{15}(8-3\text{س})^5+\text{ث}$

---

١٣) $\int (2\text{ع}-3)^{\frac{7}{3}}\,\text{ء ع}$

$= \frac{(2\text{ع}-3)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}\times 2}+\text{ث} = \frac{3}{20}(2\text{ع}-3)^{\frac{10}{3}}+\text{ث}$

---

١٤) $\int \frac{12}{(2\text{س}-5)^4}\,\text{ء س} = 12\int (2\text{س}-5)^{-4}\,\text{ء س}$

$= 12\times\frac{(2\text{س}-5)^{-3}}{2\times -3}+\text{ث} = -2(2\text{س}-5)^{-3}+\text{ث}$

$= \frac{-2}{(2\text{س}-5)^3}+\text{ث}$

---

١٥) $\int \frac{7}{\sqrt{\text{س}+4}}\,\text{ء س}$

$= 7\int (\text{س}+4)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ء س} = \frac{7(\text{س}+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\text{ث}$

$= \frac{7(\text{س}+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\text{ث} = 14\sqrt{\text{س}+4}+\text{ث}$

---

١٦) $\int \text{س}^2\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)^2\text{ء س}$

$= \int \left[\text{س}\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)\right]^2\text{ء س} = \int (3\text{س}+1)^2\,\text{ء س}$

$= \frac{(3\text{س}+1)^3}{3\times 3}+\text{ث} = \frac{1}{9}(3\text{س}+1)^3+\text{ث}$

---

١٧) $\int \text{س}^6\left(1-\frac{2}{\text{س}}\right)^6\text{ء س}$

$= \int \left[\text{س}\left(1-\frac{2}{\text{س}}\right)\right]^6\text{ء س} = \int (\text{س}-2)^6\,\text{ء س}$

$= \frac{1}{7}(\text{س}-2)^7+\text{ث}$

---

١٨) $\int \text{س}\sqrt{\frac{4}{\text{س}}-\frac{5}{\text{س}^2}}\,\text{ء س}$

$= \int \left[\text{س}^2\left(\frac{4}{\text{س}}-\frac{5}{\text{س}^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\text{ء س}$

$= \int (4\text{س}-5)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء س} = \frac{(4\text{س}-5)^{\frac{3}{2}}}{4\times\frac{3}{2}}+\text{ث}$

$= \frac{1}{6}(4\text{س}-5)^{\frac{3}{2}}+\text{ث}$

---

١٩) $\int (\text{س}-1)(\text{س}^2-2\text{س}+1)\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}-1)(\text{س}-1)^2\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}-1)^3\,\text{ء س} = \frac{1}{4}(\text{س}-1)^4+\text{ث}$

---

٢٠) $\int \sqrt{\text{س}-3}\,(\text{س}-3)^4\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}-3)^{\frac{1}{2}}(\text{س}-3)^4\,\text{ء س}$

$= \int (\text{س}-3)^{\frac{9}{2}}\,\text{ء س} = \frac{(\text{س}-3)^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}+\text{ث}$

$= \frac{2}{11}(\text{س}-3)^{\frac{11}{2}}+\text{ث}$

٢١) $\int \frac{(٤س^{٢} - ٤س + ١)^{٧}}{(٢س - ١)^{٢}} \, د س$

$= \int \frac{[(٢س - ١)^{٢}]^{٧}}{(٢س - ١)^{٢}} \, د س = \int \frac{(٢س-١)^{١٤}}{(٢س-١)^{٢}} \, د س$

$= \int (٢س - ١)^{١٢} \, د س = \frac{(٢س - ١)^{١٣}}{٢ \times ١٣} + ث$

$= \frac{١}{٢٦} (٢س - ١)^{١٣} + ث$

---

٢٢) $\int \frac{س}{(س+٢)^{٣}} \, د س = \int \frac{س+٢-٢}{(س+٢)^{٣}} \, د س$

$= \int \frac{س+٢}{(س+٢)^{٣}} \, د س - ٢ \int \frac{١}{(س+٢)^{٣}} \, د س$

$= \int (س + ٢)^{-٢} \, د س - ٢ \int (س+٢)^{-٣} \, د س$

$= \frac{(س+٢)^{-١}}{-١} - ٢ \, \frac{(س+٢)^{-٢}}{-٢} + ث$

$= \frac{-١}{س+٢} + \frac{١}{(س+٢)^{٢}} + ث$

---

٢٣) $\int س (س+٢)^{٥} \, د س$

$= \int (س + ٢ - ٢)(س+٢)^{٥} \, د س$

$= \int (س+٢)(س+٢)^{٥} \, د س - ٢ \int (س+٢)^{٥} \, د س$

$= \int (س+٢)^{٦} \, د س - ٢ \int (س+٢)^{٥} \, د س$

$= \frac{١}{٧} (س+٢)^{٧} - \frac{٢}{٦} (س+٢)^{٦} + ث$

$= \frac{١}{٧} (س+٢)^{٧} - \frac{١}{٣} (س+٢)^{٦} + ث$

---

٢٤) $\int \sqrt[٥]{س^{٢} + ٢س + ١} \, د س$

$= \int [(س+١)^{٢}]^{\frac{١}{٥}} \, د س$

$= \int (س+١)^{\frac{٢}{٥}} \, د س = \frac{(س+١)^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٧} (س+١)^{\frac{٧}{٥}} + ث$

---

٢٥) $\int (س^{٢} - ٢)^{٢} \, د س = \int (س^{٤} - ٤س^{٢} + ٤) \, د س$

$= \frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤س + ث$

---

٢٦) $\int \frac{(٢س+١)(س-٢)}{\sqrt{س}} \, د س$

$= \int \frac{٢س^{٢} - ٣س - ٢}{س^{\frac{١}{٢}}} \, د س$

$= \int (٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}}) \, د س$

$= \frac{٢س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{٣س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٤}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} - ٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + ث$

---

٢٧) $\int س (٣س^{٢} - ٥)^{٣} \, د س$

$\because د(س) = ٣س^{٢} - ٥ \qquad \therefore د'(س) = ٦س$

$\therefore \frac{١}{٦} \int ٦س (٣س^{٢} - ٥)^{٣} \, د س$

$= \frac{١}{٢٤} \times (٣س^{٢} - ٥)^{٤} + ث$

---

٢٨) $\int س (٥س^{٢} - ٥)^{-٧} \, د س$

$\because د(س) = (٥س^{٢} + ٢) \qquad \therefore د'(س) = ١٠س$

$\therefore \frac{١}{١٠} \int ١٠س (٥س^{٢} + ٢)^{-٧} \, د س$

$= \frac{-١}{٦٠} (٥س^{٢} + ٢)^{-٦} + ث = \frac{-١}{٦٠ (٥س^{٢} + ٢)^{٦}} + ث$

---

٢٩) $\int \frac{س^{٣}}{(س^{٤} + ١)^{٦}} \, د س$

$\because د(س) = س^{٤} + ١ \qquad \therefore د'(س) = ٤س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} \int ٤س^{٣} (س^{٤} + ١)^{-٦} \, د س$

$= \frac{-١}{٢٠} (س^{٤} + ١)^{-٥} + ث = \frac{-١}{٢٠ (س^{٤} + ١)^{٥}} + ث$

---

٣٠) $\int (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥) \, د س$

$\because د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥$

$\therefore د'(س) = ٣س^{٢} + ٤س$

$\int (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥) \, د س$

$= \frac{١}{٢} (س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥)^{٢} + ث$

٦

١) $\int (٥ \, جا \, س - ٣ \, جتا \, س) \, د س$

$= -٥ \, جتا \, س - ٣ \, جا \, س + ث$

---

٢) $\int (جا \, ٢س + ٢ \, جتا \, ٥س) \, د س$

$= -\frac{١}{٢} \, جتا \, ٢س + \frac{٢}{٥} \, جا \, ٥س + ث$

---

٣) $\int (٩ \, جتا \, س - قا^{٢} \, ٣س) \, د س$

$= ٩ \, جا \, س - \frac{١}{٣} \, ظا \, ٣س + ث$

---

٤) $\int (٣ + ٤ \, قا^{٢} \, س) \, د س = ٣س + ٤ \, ظا \, س + ث$

---

٥) $\int جا(٥س - ١) \, د س = -\frac{١}{٥} \, جتا(٥س - ١) + ث$

---

٦) $\int جتا(٢ - س) \, د س = - \, جا(٢ - س) + ث$

---

٧) $\int جا\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٢}\right) \, د س = -٤ \, جتا\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٢}\right) + ث$

---

٨) $\int (جتا^{٢} \, س - جا^{٢} \, س) \, د س$

$= \int جتا \, ٢س \, د س = \frac{١}{٢} \, جا \, ٢س + ث$

---

٩) $\int ٢ \, جتا^{٢} \, س \, د س$

$= \int (١ + جتا \, ٢س) \, د س = س + \frac{١}{٢} \, جا \, ٢س + ث$

⑩ $\int (٤ - \text{جا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (٤ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{٧}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{٧}{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا }٢\text{س} + \text{ث}$

⑪ $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^٢\,\text{ءس}$

$= \int (\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} + ٢\,\text{جا س جتا س})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + \text{جا }٢\text{س})\,\text{ءس} = \text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س} + \text{ث}$

⑫ $\int (١ + \text{جتا س})^٢\,\text{ءس}$

$= \int (١ + ٢\,\text{جتا س} + \text{جتا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (١ + ٢\,\text{جتا س} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{٣}{٢} + ٢\,\text{جتا س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س} + ٢\,\text{جا س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا }٢\text{س} + \text{ث}$

⑬ $\int (\text{جتا}^٢\text{س} + \text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س} + \text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}}{٢} + \frac{١}{٤}\,\text{جا }٢\text{س} + \text{ظا س} + \text{ث}$

⑭ $\int \text{جا س جتا س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{جا }٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س} + \text{ث} = \frac{-١}{٤}\,\text{جتا }٢\text{س} + \text{ث}$

⑮ $\int (\text{جتا س} + \text{قا س})^٢\,\text{ءس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} + ٢\,\text{جتا س قا س} + \text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س} + ٢ + \text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا }٢\text{س} + \text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا }٢\text{س} + \text{ظا س} + \text{ث}$

⑯ $\int (١ + \text{ظا}^٢\,\frac{\text{س}}{٢})\,\text{ءس}$

$= \int \text{قا}^٢\,\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس} = ٢\,\text{ظا}\,\frac{\text{س}}{٢} + \text{ث}$

⑰ $\int \left(\frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{١+\text{جا س}}\right)\text{ءس} = \int \left(\frac{١-\text{جا}^٢\text{س}}{١+\text{جا س}}\right)\text{ءس}$

$= \int \frac{(١-\text{جا س})(١+\text{جا س})}{(١+\text{جا س})}\,\text{ءس}$

$= \int (١ - \text{جا س})\,\text{ءس} = \text{س} + \text{جتا س} + \text{ث}$

⑱ $\int \frac{\text{جتا }٢\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{جتا س} - \text{جا س})\,\text{ءس} = \text{جا س} + \text{جتا س} + \text{ث}$

⑲ $\int \frac{\text{ءس}}{١-\text{جا}^٢\text{س}} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{جتا}^٢\text{س}}$

$= \int \text{قا}^٢\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظا س} + \text{ث}$

⑳ $\int \text{ظا}^٢\text{س قتا}^٢\text{س}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قا}^٢\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظا س} + \text{ث}$

[٧] ① $\frac{١}{٣}\int (٣\text{س}^٢ + ٣)(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^{-٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(\text{س}^٣ + ٣\text{س})^{-١}}{-١} + \text{ث} = \frac{-١}{٣(\text{س}^٣ + ٣\text{س})} + \text{ث}$

② $\int \frac{١٥}{\text{س}^٨}(٣\text{س}^٣ - \text{س}^٢)^٤\,\text{ءس}$

$= \int ١٥\left(\frac{١}{\text{س}^٢}(٣\text{س}^٣ - \text{س}^٢)\right)^٤\,\text{ءس}$

$= ١٥\int (٣\text{س} - ١)^٤\,\text{ءس}$

$= \frac{١٥ \times (٣\text{س} - ١)^٥}{٣ \times ٥} + \text{ث} = (٣\text{س} - ١)^٥ + \text{ث}$

③ $\int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)^٥\,\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س}^٢\left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)\right)^٥\,\text{ءس}$

$= \int (٢\text{س} + ٣)^٥\,\text{ءس}$

$= \frac{(٢\text{س} + ٣)^٦}{٢ \times ٦} + \text{ث} = \frac{١}{١٢}(٢\text{س} + ٣)^٦ + \text{ث}$

④ $\int \frac{\text{س} + ١}{(٣\text{س} + ١)^٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int \frac{٣\text{س} + ٣}{(٣\text{س} + ١)^٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int \frac{٣\text{س} + ١}{(٣\text{س} + ١)^٥}\,\text{ءس} + \frac{١}{٣}\int \frac{٣ - ١}{(٣\text{س} + ١)^٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س} + ١)^{-٤}\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣}\int (٣\text{س} + ١)^{-٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣\text{س} + ١)^{-٣}}{-٣ \times ٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{(٣\text{س} + ١)^{-٤}}{٣ \times -٤} + \text{ث}$

$= \frac{-١}{٢٧(٣\text{س} + ١)^٣} - \frac{١}{١٨(٣\text{س} + ١)^٤} + \text{ث}$

⑤ $\int \frac{س-1}{(2س-1)^3}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2س-2}{(2س-1)^3}\,\text{ء}س = \frac{1}{2}\int \frac{2س-1-1}{(2س-1)^3}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2س-1}{(2س-1)^3}\,\text{ء}س + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{(2س-1)^3}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{2}\int (2س-1)^{-2}\,\text{ء}س - \frac{1}{2}\int (2س-1)^{-3}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{2} \times \frac{(2س-1)^{-1}}{2\times -1} - \frac{1}{2} \times \frac{(2س-1)^{-2}}{2\times -2} + ث$

$= \frac{-1}{4(2س-1)} + \frac{1}{8(2س-1)^2} + ث$

---

⑥ $\int س\sqrt{3س+2}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{3}\int 3س\sqrt{3س+2}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{3}\int (3س+2-2)(3س+2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{3}\int (3س+2)(3س+2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}س - \frac{2}{3}$

$\int (3س+2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{3}\int (3س+2)^{\frac{3}{2}}\,\text{ء}س - \frac{2}{3}\int (3س+2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}س$

$= \frac{1}{3} \times \frac{(3س+2)^{\frac{5}{2}}}{3\times\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \times \frac{(3س+2)^{\frac{3}{2}}}{3\times\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{2}{45}(3س+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{27}(3س+2)^{\frac{3}{2}} + ث$

---

⑦ $\int \frac{س^2+8س}{(س+4)^5}\,\text{ء}س$

$= \int \frac{س^2+8س+16-16}{(س+4)^5}\,\text{ء}س$

$= \int \frac{(س+4)^2}{(س+4)^5}\,\text{ء}س - \int \frac{16}{(س+4)^5}\,\text{ء}س$

$= \int (س+4)^{-3}\,\text{ء}س - 16\int (س+4)^{-5}\,\text{ء}س$

$= \frac{(س+4)^{-2}}{-2} - \frac{16\times(س+4)^{-4}}{-4} + ث$

$= \frac{-1}{2(س+4)^2} + \frac{4}{(س+4)^4} + ث$

---

⑧ $\int \frac{3س^3-24س^2+48س+5}{س^2-8س+16}\,\text{ء}س$

$= \int \frac{3س^3-24س^2+48س}{س^2-8س+16}\,\text{ء}س + \int \frac{5}{س^2-8س+16}\,\text{ء}س$

$= \int \frac{3س(س^2-8س+16)}{(س^2-8س+16)}\,\text{ء}س + \int \frac{5}{(س-4)^2}\,\text{ء}س$

$= \int 3س\,\text{ء}س + 5\int (س-4)^{-2}\,\text{ء}س$

$= \frac{3س^2}{2} + \frac{5(س-4)^{-1}}{-1} + ث$

$= \frac{3}{2}س^2 - \frac{5}{س-4} + ث$

---

8 ① $\int طا^2س\,\text{ء}س = \int (قا^2س + 1)\,\text{ء}س$

$= طاس + س + ث$

---

② $\int 4\,جا^4س\,\text{ء}س = \int 4(جا^2س)^2\,\text{ء}س$

$= \int 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}جتا\,2س)^2\,\text{ء}س$

$= \int 4[\frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{4}جتا\,2س + \frac{1}{4}جتا^2 2س]\,\text{ء}س$

$= \int [1 - 2جتا\,2س + جتا^2 2س]\,\text{ء}س$

$= \int [1 - 2جتا\,2س + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا\,4س]\,\text{ء}س$

$= \int [\frac{3}{2} - 2جتا\,2س + \frac{1}{2}جتا\,4س]\,\text{ء}س$

$= \frac{3}{2}س - جا\,2س + \frac{1}{8}جا\,4س + ث$

---

③ $\int [\frac{جتا^2س+1}{جتاس}]^2\,\text{ء}س$

$= \int [جتا\,س + \frac{1}{جتاس}]^2\,\text{ء}س$

$= \int (جتا^2س + 2 + \frac{1}{جتا^2س})\,\text{ء}س$

$= \int [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا\,2س + 2 + قا^2س]\,\text{ء}س$

$= \int [\frac{5}{2} + \frac{1}{2}جتا\,2س + قا^2س]\,\text{ء}س$

$= \frac{5}{2}س + \frac{1}{4}جا\,2س + طا\,س + ث$

---

④ $\int \frac{جا^3س+جتا^3س}{جاس+جتاس}\,\text{ء}س$

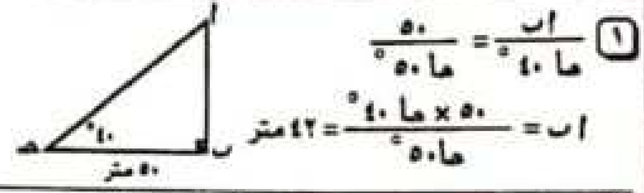
$= \int \frac{(جاس+جتاس)(جا^2س-جاس\,جتاس+جتا^2س)}{جاس+جتاس}\,\text{ء}س$

$= \int (1 - \frac{1}{2}جا\,2س)\,\text{ء}س$

$= س + \frac{1}{4}جتا\,2س + ث$

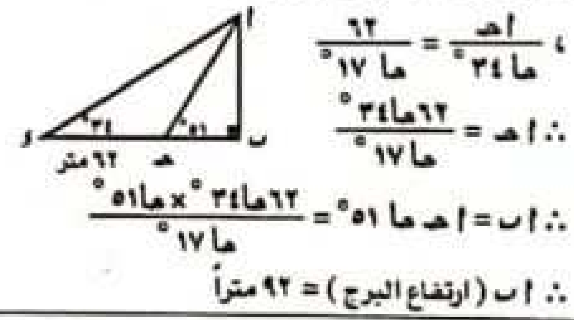
حلول تمارين حساب المثلثات

تمارين (١) على زوايا الارتفاع والانخفاض



(١) $\frac{\text{اب}}{\text{حا }٤٠°} = \frac{٥٠}{\text{حا }٥٠°}$

$\text{اب} = \frac{٥٠ \times \text{حا }٤٠°}{\text{حا }٥٠°} = ٤٢$ متر



(٢) في Δ ا حـ ء: ق(∠ حـ ا ء) = ٥١° - ٣٤° = ١٧°

، $\frac{\text{احـ}}{\text{حا }٣٤°} = \frac{٦٢}{\text{حا }١٧°}$

∴ $\text{احـ} = \frac{٦٢\text{ حا }٣٤°}{\text{حا }١٧°}$

∴ $\text{اب} = \text{احـ حا }٥١° = \frac{٦٢\text{ حا }٣٤° \times \text{حا }٥١°}{\text{حا }١٧°}$

∴ اب (ارتفاع البرج) = ٩٢ متراً



(٣) في Δ (ء ا حـ) يكون

ق(∠ ء ا حـ) = ٥٢°٣٠′ - ٢٥° = ٢٧°٣٠′

ويكون $\frac{٥٧}{\text{حا }٢٧°٣٠′} = \frac{\text{اء}}{\text{حا }٢٥°}$

$\text{اء} = \frac{٥٧}{\text{حا }٢٧°٣٠′} \times \text{حا }٢٥°$

= ٥٢,٢ متر

في Δ اب ء:

$\frac{\text{اب}}{\text{حا }٥٢°٣٠′} = \frac{٥٢,٢}{\text{حا }٩٠°}$

$\text{اب} = \frac{٥٢,٢}{\text{حا }٩٠°} \times \text{حا }٥٢°٣٠′ = ٤١,٤ = ٤١$ متر



(٤) بفرض أن اب هو ارتفاع البرج

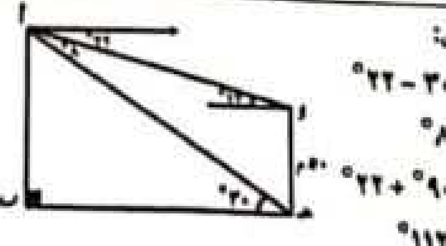
∴ ق(∠ حـ ا ء) = ٢١°٣٠′

في Δ ا حـ ء

$\frac{\text{اء}}{\text{حا }٢٠°٣٠′} = \frac{٥٠}{\text{حا }٢١°٣٠′}$

∴ $\text{اء} = \frac{٥٠\text{ حا }٢٠°٣٠′}{\text{حا }٢١°٣٠′} = ٤٧,٧٧$

في Δ اب حـ: اب = اء حا ٤٢° = ٣٢ متر



(٥) من الشكل المقابل:

ق(∠ ء ا حـ) = ٣٠ - ٢٢°

= ٨°

ق(∠ حـ ء ا) = ٩٠° + ٢٢°

= ١١٢°

في Δ ا حـ ء: $\frac{\text{احـ}}{\text{حا }١١٢°} = \frac{٥٠}{\text{حا }٨°}$

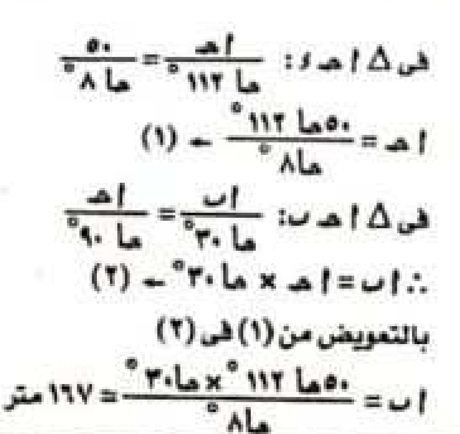
$\text{احـ} = \frac{٥٠\text{ حا }١١٢°}{\text{حا }٨°}$ ← (١)

في Δ احـ ب: $\frac{\text{اب}}{\text{حا }٣٠°} = \frac{\text{احـ}}{\text{حا }٩٠°}$

∴ اب = احـ × حا ٣٠° ← (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$\text{اب} = \frac{٥٠\text{ حا }١١٢° \times \text{حا }٣٠°}{\text{حا }٨°} = ١٦٧$ متر



(٦) ق(∠ ب ا ء) = ٩٠° + ١٥° = ١٠٥°

، ق(∠ ا ء ب) = ٢٦° - ١٥° = ١١°

∴ $\frac{٢٠}{\text{حا }١١°} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا }١٠٥°}$

∴ $\text{ب ء} = \frac{٢٠\text{ حا }١٠٥°}{\text{حا }١١°}$

∴ ارتفاع الجبل = حـ ء = ب ء × حا ٣٦°

$= \frac{٢٠\text{ حا }١٠٥ \times \text{حا }٢٦°}{\text{حا }١١°} = ٤٤$ متراً

(٧) في Δ ا حـ ء

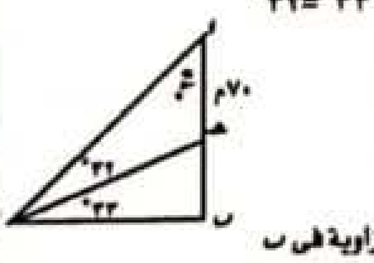
يكون $\frac{٦٥}{\text{حا }٣٢°} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{حا }٩٠°}$

$\text{ا حـ} = \frac{٦٥}{\text{حا }٣٢°} \times \text{حا }٩٠°$

= ١٢٢,٦٦ = ١٢٣ متر

في Δ ا ب حـ يكون $\frac{\text{اب}}{\text{حا }١٠°٤٨′} = \frac{١٢٣}{\text{حا }٢١°١٢′}$

$\text{اب} = \frac{١٢٣}{\text{حا }٢١°١٢′} \times \text{حا }١٠°٤٨′ = ٦٣,٧ = ٦٤$ متر



(٨) Δ ا حـ ء

ق(∠ ء) = ٩٠° - ٦٥° = ٢٥°

، ق(∠ حـ ا ء) = ٦٥° - ٣٣° = ٣٢°

$\frac{\text{ا حـ}}{\text{حا }٢٥°} = \frac{٧٠}{\text{حا }٣٢°}$

∴ $\text{ا حـ} = \frac{٧٠\text{ حا }٢٥°}{\text{حا }٣٢°}$

في Δ ا ب حـ القائم الزاوية في ب

⇐ ب حـ = ا حـ حا ٣٣°

∴ $\text{ب حـ} = \frac{٧٠\text{ حا }٢٥°\text{ حا }٣٣°}{\text{حا }٣٢°} = ٣٠$ م

(٩) في Δ أ هـ ء يكون: أ هـ / جا ٢٠° = ٦٠ / جا ٣٠°

أ هـ = ٦٠ / جا ٣٠° × جا ٢٠° = ٤١ متر

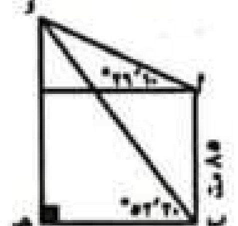
في Δ أ ب هـ يكون: أ ب / جا ٤٠° = ٤١ / جا ٩٠°

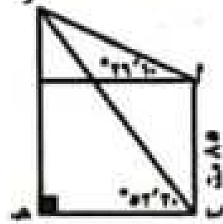
أ ب = ٤١ / جا ٩٠° × جا ٤٠° = ٢٦,٨٩ متر

أ ب (ارتفاع التل) = ٢٧ متر

(١٠) في Δ أ ب ء:

ق(∠ أ ب ء) = ٤٠َ ٣٧° ، ق(∠ ء أ ب) = ١٠َ ٢٦°





ب ء / جا ١٠َ ١١٦° = ٨٥ / جا ١٠َ ٢٦°

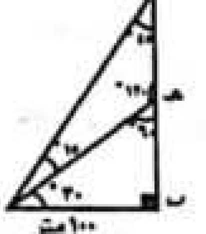
ب ء = ٨٥ جا ١٠َ ١١٦° / جا ١٠َ ٢٦°

= ١٧٣ متر

في Δ ء ب هـ:

هـ ء = ب ء جا ٢٠َ ٥٢° = ١٣٧ متر

(١١) في Δ أ ب هـ: ب هـ / جا ٣٠° = ١٠٠ / جا ٦٠°



ب هـ = ١٠٠ / جا ٦٠° × جا ٣٠°

= ٥٧,٧ متر

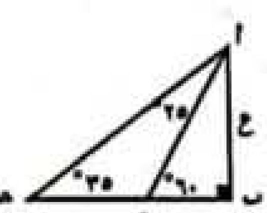
عندما ق(∠ ب أ ء) = ٤٥°

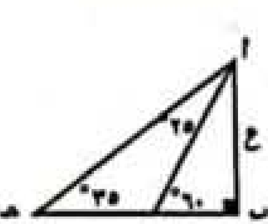
∴ ب ء = ١٠٠ متر

∴ ء هـ (المسافة التي يجب بناؤها) = ١٠٠ − ٥٧,٧ = ٤٢,٣ متر

(١٢) ف = ٢ × ٣٠٠ = ٦٠٠ متر ، ق(∠ هـ أ ء) = ٢٥°

أ ء / جا ٣٥° = ٦٠٠ / جا ٢٥°





∴ أ ء = ٦٠٠ جا ٣٥° / جا ٢٥°

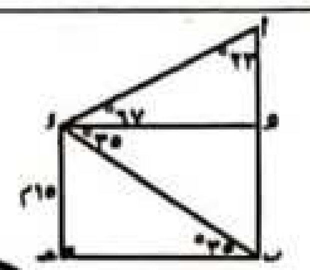
ع = أ ب = أ ء جا ٦٠°

= ٦٠٠ جا ٣٥° / جا ٢٥° × جا ٦٠°

= ٧٠٥,٢٢٠٤٩ = ٧٠٥ متراً

(١٣) في Δ ء ب هـ:

ق(∠ ء ب هـ) = ٣٥°



ء هـ / جا ب = ء ب / جا هـ

١٥ / جا ٣٥° = ء ب / جا ٩٠°

ء ب = ١٥ جا ٩٠° / جا ٣٥° = ٢٦,١٥ م

في Δ أ ب ء:

ق(∠ أ) = ٩٠° − ٦٧° = ٢٣°

ق(∠ أ ء ب) = ٦٧° + ٣٥° = ١٠٢°

أ ب / جا(∠ أ ء ب) = ء ب / جا أ ∴ أ ب / جا ١٠٢° = ٢٦,١٥ / جا ٢٣°

أ ب = ٢٦,١٥ × جا ١٠٢° / جا ٢٣° = ٦٥ م

(١٤) في Δ أ ب هـ:

طا(∠ أ هـ ب) = ١٠٠ / ٢٢

ق(∠ أ هـ ب) = ٣٦َ ٧٧°

∴ ق(∠ أ هـ ء) = ٩٠° − ٣٦َ ٧٧° = ٢٤َ ١٢°

ق(∠ هـ أ ء) = ٣٦َ ٧٧° − ٣٧َ ٤٢° = ٥٩َ ٣٤°

أ هـ = √((١٠٠)² + (٢٢)²) = ١٠٢ م

في Δ أ هـ ء:

أ هـ / جا(∠ أ ء هـ) = هـ ء / جا(∠ هـ أ ء)

١٠٢ / جا ٣٧َ ١٣٢° = هـ ء / جا ٥٩َ ٣٤°

هـ ء = ١٠٢ × جا ٥٩َ ٣٤° / جا ٣٧َ ١٣٢° = ٧٩ متر

(١٥) في Δ أ ب ء:

٣ / جا ١٠° = أ ء / جا ١١٠°

∴ أ ء = ٣ جا ١١٠° / جا ١٠° = ١٦,٢٣

في Δ أ ء هـ:

أ هـ = أ ء جا ٣٠° = ٨,١٢ كم

(١٦) Δ أ ب هـ: أ هـ / جا ٩٠° = ١٠٠√٢ / جا ٤٥°

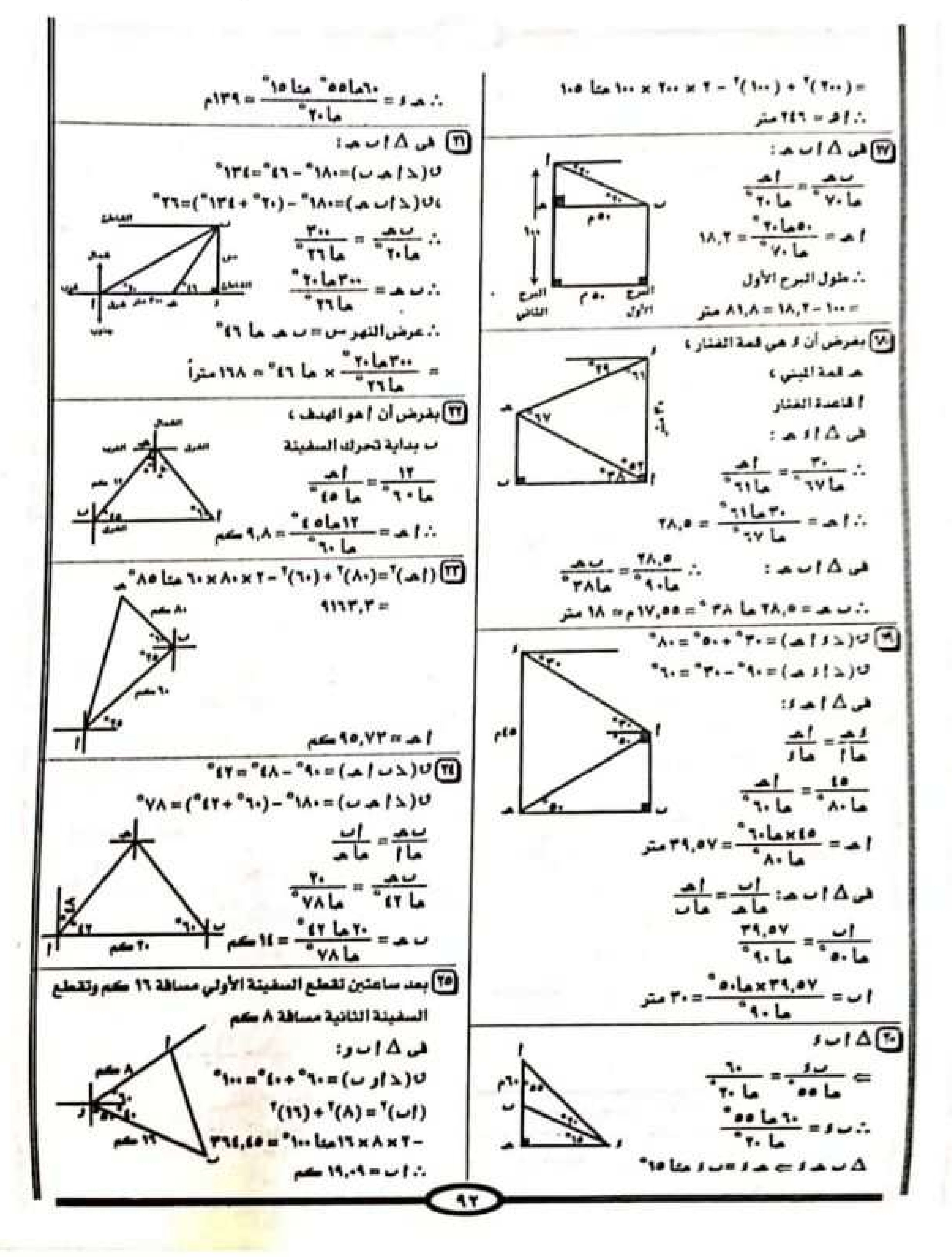
∴ أ هـ = ١٠٠√٢ × جا ٩٠° / جا ٤٥° = ٢٠٠ متر

في Δ هـ ء و: هـ و / جا ٩٠° = ٥٠ / جا ٣٠°

∴ هـ و = ٥٠ جا ٩٠° / جا ٣٠° = ١٠٠ متر

ق(∠ أ هـ و) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٠°) = ١٠٥°

(أ و)² = (أ هـ)² + (هـ و)² − ٢ أ هـ × هـ و جتا ١٠٥°



$= (٢٠٠)^2 + (١٠٠)^2 - ٢ \times ٢٠٠ \times ١٠٠$ جتا ١٠٥

∴ أ هـ = ٢٤٦ متر

(١٧) في Δ أ ب هـ:

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٧٠°} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٢٠°}$

$\text{أ هـ} = \frac{٥٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ٧٠°} = ١٨,٢$

∴ طول البرج الأول

= ١٠٠ − ١٨,٢ = ٨١,٨ متر

(١٨) بفرض أن د هي قمة الفنار ،

هـ قمة المبنى ،

أ قاعدة الفنار

في Δ د أ هـ:

$∴ \frac{٣٠}{\text{جا } ٦٧°} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٦١°}$

$∴ \text{أ هـ} = \frac{٣٠ \text{ جا } ٦١°}{\text{جا } ٦٧°} = ٢٨,٥$

في Δ أ ب هـ: $∴ \frac{٢٨,٥}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٣٨°}$

∴ ب هـ = ٢٨,٥ جا ٣٨° = ١٧,٥٥م ≈ ١٨ متر

(١٩) ق(∠ د أ هـ) = ٣٠° + ٥٠° = ٨٠°

ق(∠ د أ هـ) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

في Δ أ هـ د:

$\frac{\text{د هـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا د}}$

$\frac{٤٥}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٦٠°}$

$\text{أ هـ} = \frac{٤٥ \times \text{جا } ٦٠°}{\text{جا } ٨٠°} = ٣٩,٥٧$ متر

في Δ أ ب هـ: $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا ب}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٥٠°} = \frac{٣٩,٥٧}{\text{جا } ٩٠°}$

$\text{أ ب} = \frac{٣٩,٥٧ \times \text{جا } ٥٠°}{\text{جا } ٩٠°} = ٣٠$ متر

(٢٠) Δ أ ب د

$\Leftarrow \frac{\text{ب د}}{\text{جا } ٥٥°} = \frac{٦٠}{\text{جا } ٢٠°}$

$∴ \text{ب د} = \frac{٦٠ \text{ جا } ٥٥°}{\text{جا } ٢٠°}$

Δ ب هـ د ⟸ هـ د = ب د جتا ١٥°

$∴ \text{هـ د} = \frac{٦٠ \text{ جا } ٥٥° \text{ جتا } ١٥°}{\text{جا } ٢٠°} = ١٣٩$م

(٢١) في Δ أ ب هـ:

ق(∠ أ هـ ب) = ١٨٠° − ٤٦° = ١٣٤°

ق(∠ أ ب هـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ١٣٤°) = ٢٦°

$∴ \frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٢٠°} = \frac{٣٠٠}{\text{جا } ٢٦°}$

$∴ \text{ب هـ} = \frac{٣٠٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ٢٦°}$

∴ عرض النهر س = ب هـ جا ٤٦°

$= \frac{٣٠٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ٢٦°} \times \text{جا } ٤٦° = ١٦٨$ متراً

(٢٢) بفرض أن أ هو الهدف ،

ب بداية تحرك السفينة

$\frac{١٢}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٤٥°}$

$∴ \text{أ هـ} = \frac{١٢ \text{ جا } ٤٥°}{\text{جا } ٦٠°} = ٩,٨$ كم

(٢٣) $(\text{أ هـ})^2 = (٨٠)^2 + (٦٠)^2 - ٢ \times ٨٠ \times ٦٠$ جتا ٨٥°

= ٩١٦٣,٣

أ هـ = ٩٥,٧٣ كم

(٢٤) ق(∠ ب أ هـ) = ٩٠° − ٤٨° = ٤٢°

ق(∠ أ هـ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٢°) = ٧٨°

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}}$

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٧٨°}$

$\text{ب هـ} = \frac{٢٠ \text{ جا } ٤٢°}{\text{جا } ٧٨°} = ١٤$ كم

(٢٥) بعد ساعتين تقطع السفينة الأولى مسافة ١٦ كم وتقطع السفينة الثانية مسافة ٨ كم

في Δ أ ب و:

ق(∠ أ و ب) = ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠°

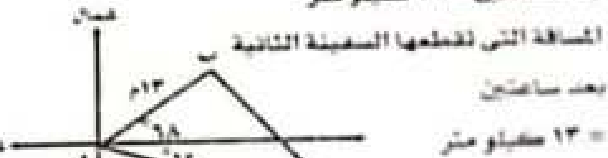
$(\text{أ ب})^2 = (٨)^2 + (١٦)^2$

− ٢ × ٨ × ١٦ جتا ١٠٠° = ٣٦٤,٤٥

∴ أ ب = ١٩,٠٩ كم

(٢٦) المسافة التي تقطعها السفينة الأولى بعد ساعتين = ٢٢ كيلو متر

المسافة التي تقطعها السفينة الثانية بعد ساعتين = ١٣ كيلو متر



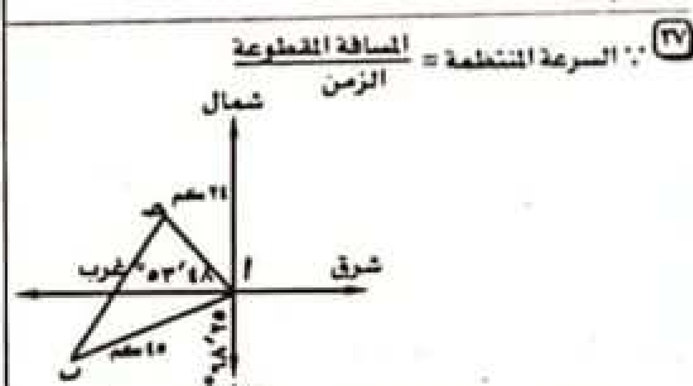
ف^٢ = (٢٢)^٢ + (١٣)^٢ − ٢ × ٢٢ × ١٣ جتا ٨٠°

= ٥٥٣,٦٧٣٢٤

∴ ف = ٢٣,٥٣ كيلو متر

وهي المسافة بين السفينتين بعد مضي ساعتين من لحظة تحركهما معاً

(٢٧) ∵ السرعة المنتظمة = $\dfrac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن}}$



المسافة المقطوعة = السرعة المنتظمة × الزمن

∴ أ ب = ١٥ × ٣ = ٤٥ كم

، أ هـ = ٨ × ٣ = ٢٤ كم

∴ ق(∠ب أ و) = ٩٠° − ٦٨°٢٥' = ٢١°٣٥'

∴ ق(∠ب أ هـ) = ٢١°٣٥' + ٥٣°٤٨' = ٧٥°٢٣'

في Δ أ ب هـ: بتطبيق قاعدة جيب التمام

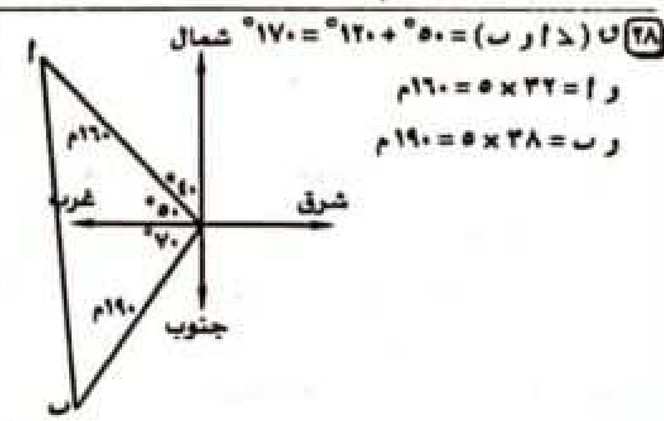
(ب هـ)^٢ = (٤٥)^٢ + (٢٤)^٢ − ٢ × ٤٥ × ٢٤ جتا ٧٥°٢٣'

∴ ب هـ = ٤٥,٣٤ كم

(٢٨) ق(∠أ و ب) = ٥٠° + ١٢٠° = ١٧٠°

و أ = ٣٢ × ٥ = ١٦٠م

و ب = ٣٨ × ٥ = ١٩٠م



في Δ أ و ب:

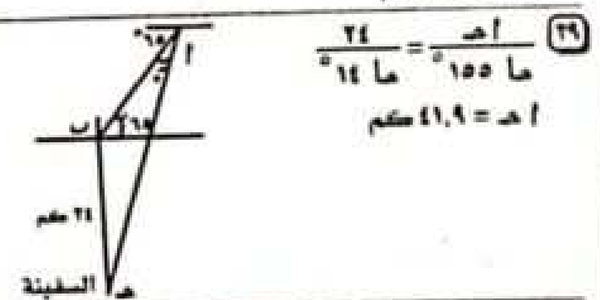
(أ ب)^٢ = (و أ)^٢ + (و ب)^٢ − ٢ و أ × و ب جتا (∠أ و ب)

(أ ب)^٢ = (١٦٠)^٢ + (١٩٠)^٢ − ٢ × ١٦٠ × ١٩٠ جتا ١٢٠°

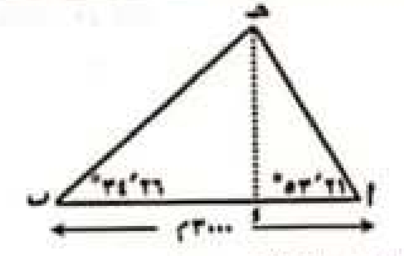
∴ أ ب = ٣٠٣ م

(٢٩) $\dfrac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ١٥٥°} = \dfrac{٢٤}{\text{جا } ١٤°}$

أ هـ = ٤١,٩ كم



(٣٠)



بفرض أن ارتفاع الطائرة هو هـ د

ق(∠أ هـ ب) = ١٨٠° − (٥٣°٢١' + ٣٤°٢٦') = ٩٢°١٣'

في Δ أ هـ ب:

$\dfrac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٣٤°٢٦'} = \dfrac{٣٠٠٠}{\text{جا } ٩٢°١٣'}$

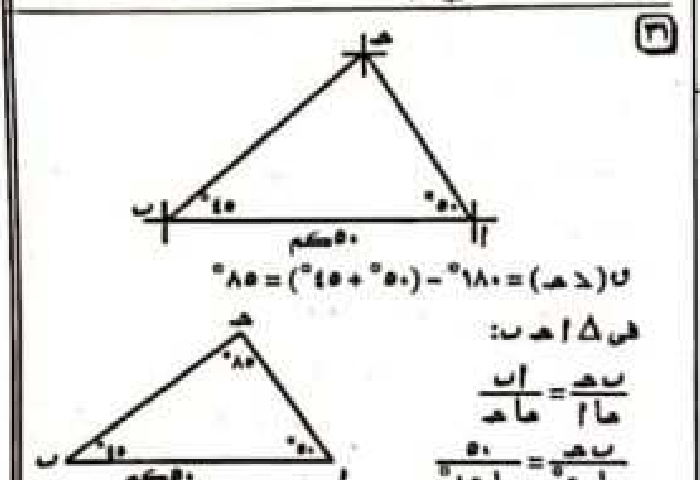
أ هـ = $\dfrac{٣٠٠٠ \times \text{جا } ٣٤°٢٦'}{\text{جا } ٩٢°١٣'}$ = ١٦٩٧,٦ متر

في Δ أ هـ د: $\dfrac{\text{أ هـ}}{\text{جا د}} = \dfrac{\text{هـ د}}{\text{جا أ}}$

$\dfrac{١٦٩٧,٦}{\text{جا } ٩٠°} = \dfrac{\text{هـ د}}{\text{جا } ٥٣°٢١'}$

هـ د = $\dfrac{١٦٩٧,٦ \times \text{جا } ٥٣°٢١'}{\text{جا } ٩٠°}$ = ١٣٦٢ متر

(٣١)



ق(∠هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٤٥°) = ٨٥°

في Δ أ هـ ب:

$\dfrac{\text{ب هـ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}}$

$\dfrac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٥٠°} = \dfrac{٥٠}{\text{جا } ٨٥°}$

ب هـ = ٥٠ جا ٥٠° / جا ٨٥° = ٣٨,٤٤ كم

سرعة السفينة = المسافة / الزمن = ٣٨,٤٤ / ٢ = ١٩,٢٢ كم/س

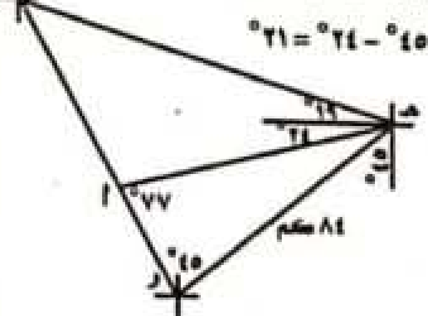
(٣٣) وحدة المسافة التي تحركتها السفينة خلال ٣ ساعات

و هـ = ٣ × ٢٨ = ٨٤ كم

في Δ و ا هـ:

ق(∠ ا و هـ) = ٣٧° + ٤٥° = ٨٢°

ق(∠ ا هـ و) = ٤٥° − ٢٤° = ٢١°



ق(∠ هـ ا و) = ١٨٠° − (٨٢° + ٢١°) = ٧٧°

و هـ / جا(∠ هـ ا و) = ا هـ / جا(∠ ا و هـ)

٨٤ / جا ٧٧° = ا هـ / جا ٨٢°

ا هـ = ٨٤ جا ٨٢° / جا ٧٧° = ٨٥,٤ متر

في Δ ا هـ ب:

ق(∠ ا هـ ب) = ٢٤° + ١٩° = ٤٣°

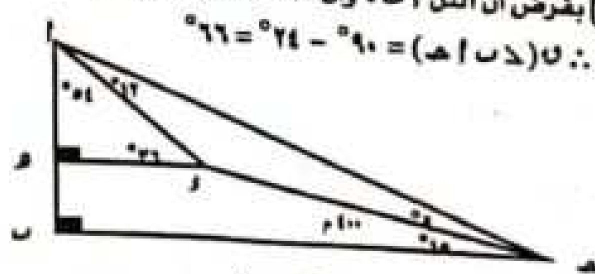
ق(∠ ب) = ٧٧° − ٤٣° = ٣٤°

ا هـ / جا ب = ا ب / جا(∠ ا هـ ب)   ∴ ٨٥,٤ / جا ٣٤° = ا ب / جا ٤٣°

ا ب = ٨٥,٤ × جا ٤٣° / جا ٣٤° = ١٠٤ كم

(٣٦) بفرض أن التل ا ب ، وأن هـ ، د نقطتا الرصد

∴ ق(∠ ب ا هـ) = ٩٠° − ٢٤° = ٦٦°



ق(∠ د ا و) = ٩٠° − ٣٦° = ٥٤°

ق(∠ هـ ا د) = ٦٦° − ٥٤° = ١٢°

في Δ ا هـ د:

ق(∠ ا د هـ) = ١٨٠° − (١٢° + ٩°) = ١٥٩°

ا هـ / جا ١٥٩° = ٤٠٠ / جا ١٢°

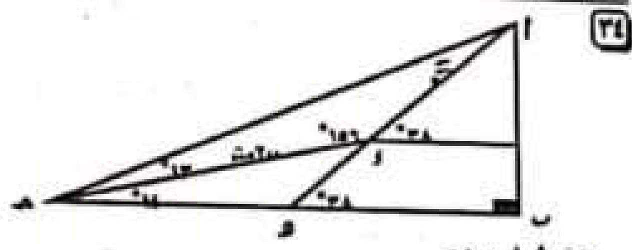
ا هـ = ٤٠٠ جا ١٥٩° / جا ١٢° = ٦٨٩,٢٥ متر

في Δ ا ب هـ:

ا ب / جا(∠ ا هـ ب) = ا هـ / جا ب   ∴ ا ب / جا ٢٤° = ٦٨٩,٥ / جا ٩٠°

∴ ا ب = ٦٨٩,٥ × جا ٢٤° / جا ٩٠° = ٢٨٠ متر

(٣٤)



في Δ ا هـ د:

ق(∠ ا هـ د) = ٢٧° − ١٤° = ١٣°

∵ زاوية ا د ب خارجة عن Δ ا د هـ

∴ ق(∠ د ا هـ) = ٣٨° − ٢٧° = ١١°

∴ ق(∠ ا د هـ) = ١٨٠° − (١١° + ١٣°) = ١٥٦°

في Δ ا د هـ: ∵ ا هـ / جا ١٥٦° = ٢٠٠ / جا ١١°

∴ ا هـ = ٢٠٠ × جا ١٥٦° / جا ١١° ← (١)

في Δ ا ب هـ: ∵ ا ب / جا ٢٧° = ا هـ / جا ٩٠°

∴ ا ب = ا هـ × جا ٢٧° ← (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

ا ب = ٢٠٠ × جا ١٥٦° / جا ١١° × جا ٢٧°   ∴ ا ب = ١٩٤ متر

(٣٥) بفرض أن ا قمة البرج ، ب قمة المنزل

في Δ ا و د:

ا د / جا ٩٠° = ٥٠ / جا ٧٥° = و د / جا ١٥°

∴ ا د = ٥٠ / جا ٧٥° = ٥١,٧٦ متر

و د = ٥٠ جا ١٥° / جا ٧٥° = ١٣,٤ متر

في Δ ب د هـ:

١٢ / جا ٢٥° = د ب / جا ٩٠° = د هـ / جا ٦٥°

∴ د ب = ٢٨,٣٩ ، د هـ = ٢٨,٣٩ جا ٦٥° = ٢٥,٧٣

المسافة بين البرجين = ء و + و هـ = ١٣,٤ + ٢٥,٧٣

= ٣٩,١٣ متر

$(\text{أ ب})^٢ = (\text{أ و})^٢ + (\text{ب و})^٢ - ٢\,\text{أ و} \times \text{ب و جتا } ٨٠^\circ$

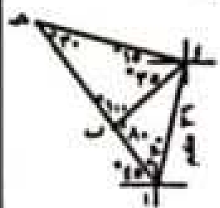
∴ أ ب = ٥٤,٥٤ متر

(٣٦) بفرض أن النقطتين الثابتتين هما ب ، هـ وبداية حركة السفينة أ

∵ ق(∠ د و أ ب) = ٤٥° + ٣٠° = ٧٥° ، ق(∠ د أ و ب) = ٢٥°

∴ ق(∠ أ ب و) = ٨٠° ، ق(∠ د و ب هـ) = ١٠٠°

∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٣٥° + ١٥°) = ٣٠°



في Δ أ و ب : $\frac{٣٦}{\text{جا } ٨٠^\circ} = \frac{\text{و ب}}{\text{جا } ٧٥^\circ}$

∴ و ب = $\frac{٣٦ \text{ جا } ٧٥^\circ}{\text{جا } ٨٠^\circ}$ = ٣٥,٣١ كم

في Δ و ب هـ :

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا } ٥٠^\circ} = \frac{\text{و ب}}{\text{جا } ٣٠^\circ}$

∴ ب هـ = $\frac{٣٥,٣١ \text{ جا } ٥٠^\circ}{\text{جا } ٣٠^\circ}$ = ٥٤,١ كم

(٣٧) بفرض أن الهدف هو هـ وموقع الطائرة في الفترتين أ ، ب



في Δ أ د هـ :

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٠٠٠}{\text{جا } ٤٦' ١٨^\circ}$

∴ أ هـ = $\frac{١٠٠٠}{\text{جا } ٤٦' ١٨^\circ}$ = ١٣٨٣,١٩

في Δ أ ب هـ :

ق(∠ أ ب هـ) = ١٨٠° − ٨٢° ٣٦' = ٩٧° ٢٤'

ق(∠ أ هـ ب) = ١٨٠° − (٩٧° ٢٤' + ٤٦° ١٨')

= ٣٦° ١٨'

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٩٧^\circ ٢٤'} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٣٦^\circ ١٨'}$

∴ أ ب = $\frac{١٣٨٣,١٩ \times \text{جا } ٣٦^\circ ١٨'}{\text{جا } ٩٧^\circ ٢٤'}$ = ٨٢٥,٧٥

∴ سرعة الطائرة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٨٢٥,٧٥}{٣}$

= ٢٧٥,٢٥ متر/دقيقة

(٣٨) بفرض أن موقع السفينة عند الساعة العاشرة هو أ وموقعها الساعة الواحدة هو ب وموقع الفنار هو هـ بعد ٣ ساعات

تتحرك السفينة مسافة = ٢٥ × ٣ = ٧٥ كم

ق(∠ هـ أ ب) = ٢٠° + (٩٠° − ٣٧°) = ٨٣°

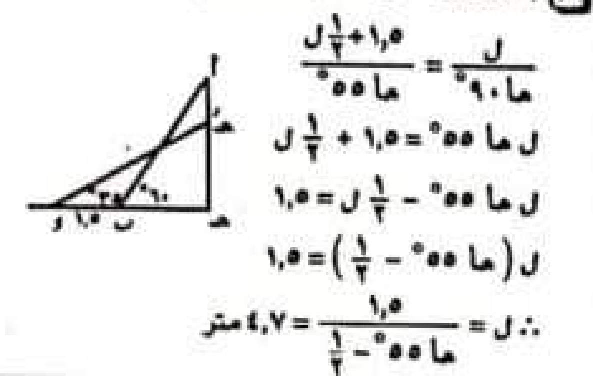
ق(∠ أ ب هـ) = ٤٥° + ٣٧° = ٧٢°

∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − (٧٢° + ٨٣°) = ٢٥°

∴ $\frac{٧٥}{\text{جا } ٢٥^\circ} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{جا } ٨٣^\circ}$

∴ هـ ب = $\frac{٧٥ \text{ جا } ٨٣^\circ}{\text{جا } ٢٥^\circ}$ = ١٧٦,١٤ كم

(٣٩) بفرض أن طول السلم = أ ب = ل



$\frac{\text{ل}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١,٥ + \frac{١}{٢}\text{ل}}{\text{جا } ٥٥^\circ}$

ل جا ٥٥° = ١,٥ + $\frac{١}{٢}$ ل

ل جا ٥٥° − $\frac{١}{٢}$ ل = ١,٥

ل (جا ٥٥° − $\frac{١}{٢}$) = ١,٥

∴ ل = $\frac{١,٥}{\text{جا } ٥٥^\circ - \frac{١}{٢}}$ = ٤,٧ متر

(٤٠) بفرض أن الارتفاع هو ع

ظتا هـ = $\frac{\text{أ و}}{\text{ع}}$

∵ أ و = ع ظتا هـ

ظتا ى = $\frac{\text{ب و}}{\text{ع}}$ ∴ ب و = ع ظتا ى

ف = أ و − ب و ⟸ ف = ع ظتا هـ − ع ظتا ى

ف = ع (ظتا هـ − ظتا ى)

∴ ع = $\frac{\text{ف}}{\text{ظتا هـ} - \text{ظتا ى}}$

∴ ع = $\frac{٥٠٠}{\text{ظتا } ٣٥^\circ - \text{ظتا } ٤٧^\circ}$ = ١٠٠٩ متر

تمارين (٢) على الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياس زاويتين

(١) ① ق(∠ ص أ س) = ٤٦° − ٣٥° = ١١°

في Δ أ ب ص :

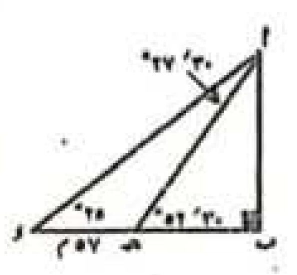
$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{جا ب}}$

$\frac{٦٠}{\text{جا } ٤٦^\circ} = \frac{\text{أ ص}}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

أ ص = $\frac{٦٠ \times \text{جا } ٩٠^\circ}{\text{جا } ٤٦^\circ}$ = ٨٣,٤ م

في Δ أ ص س : $\frac{٨٣,٤}{\text{جا } ٣٥^\circ} = \frac{\text{س ص}}{\text{جا } ١١^\circ}$

∴ س ص = $\frac{٨٣,٤ \times \text{جا } ١١^\circ}{\text{جا } ٣٥^\circ}$ = ٢٧,٧ م



② ق(∠ هـ أ د) $= ٣٠َ\ ٥٢° - ٢٥°$
$= ٣٠َ\ ٢٧°$

في Δ أ هـ د:

$$\frac{\text{أهـ}}{\text{جا } ٢٥°} = \frac{٥٧}{\text{جا } ٣٠َ\ ٢٧°}$$

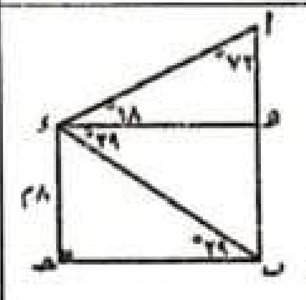
$$\text{أهـ} = \frac{٥٧ \times \text{جا } ٢٥°}{\text{جا } ٣٠َ\ ٢٧°} = ٥٢,٢ \text{ م}$$

في Δ أ ب هـ:

$$\frac{\text{أب}}{\text{جا } ٣٠َ\ ٥٢°} = \frac{٥٢,٥}{\text{جا } ٩٠°}$$

$$\therefore \text{أب} = \frac{٥٢,٢ \times \text{جا } ٣٠َ\ ٥٢°}{\text{جا } ٩٠°} = ٤١ \text{ م}$$

③



ق(∠ د) $= ٩٠° - ١٨° = ٧٢°$

ق(∠ د ب هـ) = ق(∠ هـ د ب) = ٢٩° بالتبادل

في Δ د ب هـ:

$$\frac{\text{د ب}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{٨}{\text{جا } ٢٩°}$$

$$\therefore \text{د ب} = \frac{٨ \text{ جا } ٩٠°}{\text{جا } ٢٩°} = ١٦,٥ \text{ م}$$

في Δ أ ب د:

$$\frac{\text{أب}}{\text{جا } ٤٧°} = \frac{١٦,٥}{\text{جا } ٧٢°}$$

$$\text{أب} = \frac{١٦,٥ \times \text{جا } ٤٧°}{\text{جا } ٧٢°} = ١٣ \text{ م}$$

[2]
① ١ ② $\frac{١}{٢}$ ③ جتا (س − ص)
④ صفر ⑤ ١ ⑥ $\sqrt{٣}$
⑦ جتا أ ⑧ جا س ⑨ −٣
⑩ ١ ⑪ $\frac{١}{٢}$ ⑫ ٥٥° ، ٢٣٥°

[3]
① $\frac{١}{٢}$ ② ١ ③ جتا ٢س
④ ٢٠° ، ٨٠° ⑤ − جا θ
⑥ $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + $\sqrt{٣}$ جا θ) ⑦ ٢ جا أ جتا ب
⑧ جتا ٢س ⑨ ظا (٤٥° + س)

⑩ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⑪ ١ ⑫ ٢ − $\sqrt{٣}$
⑬ $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ ⑭ $\sqrt{٣}$ − ٢

[4]
① المقدار = جا (٤٠° + ٢٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

② المقدار = جتا (٧٠° − ١٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

③ المقدار = جتا (٤٠° + ٥٠°) = جتا ٩٠° = صفر

④ المقدار = جا (٢٢° + ٨°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

⑤ المقدار = ظا (٦٣° − ١٨°) = ظا ٤٥° = ١

⑥ المقدار $= \frac{\text{جا }(٢٥° + ٢٠°)}{\text{جتا }(٨٠° - ٣٥°)} = \frac{\text{جا } ٤٥°}{\text{جتا } ٤٥°} =$ ظا ٤٥° = ١

⑦ (أ) جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠°)

= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$$

(ب) جتا ١٥° = جتا (٦٠° − ٤٥°)

= جتا ٦٠° جتا ٤٥° + جا ٦٠° جا ٤٥°

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٦}}{٤}$$

(ج) ظا ١٠٥° = ظا (٤٥° + ٦٠°)

$$= \frac{\text{ظا } ٤٥° + \text{ظا } ٦٠°}{١ - \text{ظا } ٤٥° \text{ ظا } ٦٠°} = \frac{١+\sqrt{٣}}{١-\sqrt{٣}} \times \frac{١+\sqrt{٣}}{١+\sqrt{٣}}$$

$$= \frac{١+٣+٢\sqrt{٣}}{١-٣} = \frac{٤+٢\sqrt{٣}}{-٢} = -٢-\sqrt{٣}$$

(د) جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ = جتا ($\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦}$)

= جتا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$ − جا $\frac{\pi}{٤}$ جا $\frac{\pi}{٦}$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}}{٤}$$

[5]
① المقدار = جتا (٤٠° + س)

② المقدار = جتا [أ − (أ + $\frac{\pi}{٢}$)] = جتا $\frac{\pi}{٢}$ = صفر

③ جتا أ جتا ب + جا أ جا ب − [جتا أ جتا ب − جا أ جا ب]
= ٢ جا أ جا ب

④ جا أ جتا ب + جتا أ جا ب − [جا أ جتا ب − جتا أ جا ب]
= ٢ جتا أ جا ب

[6]
① (أ) ظا (أ + ب) $= \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{٢+٣}{١-٦} = -١$

(ب) ظا (أ − ب) $= \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{٢-٣}{١+٦} = \frac{-١}{٧}$

② $ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ \, ظا ب} = \frac{\frac{١}{٤}+\frac{٣}{٥}}{١-\frac{١}{٤}\times\frac{٣}{٥}} = ١$

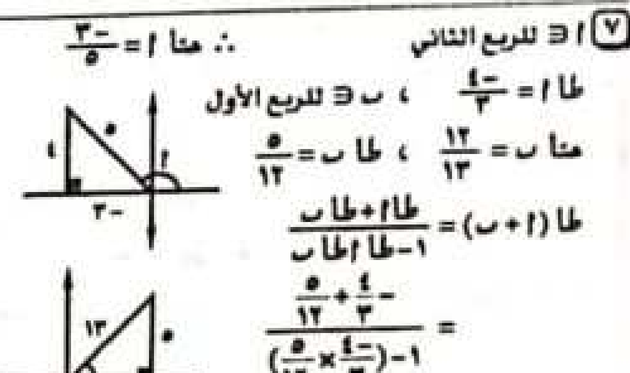
③ $ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ \, ظا ب} = \frac{\frac{٤}{٥}+\frac{١}{٩}}{١-\frac{٤}{٥}\times\frac{١}{٩}} = ١$

$\therefore أ + ب = ٤٥°$

⑦ أ ∈ للربع الثاني $\therefore$ $جتا أ = \frac{-٣}{٥}$

$ظا أ = \frac{-٤}{٣}$ ، ب ∈ للربع الأول

$جتا ب = \frac{١٢}{١٣}$ ، $ظا ب = \frac{٥}{١٢}$



$ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ \, ظا ب}$

$= \frac{-\frac{٤}{٣}+\frac{٥}{١٢}}{١-(\frac{-٤}{٣}\times\frac{٥}{١٢})}$

$= \frac{-١١}{١٢} \div \frac{١٤}{٩} = \frac{-٣٣}{٥٦}$

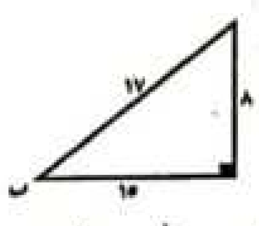
$جا(أ-ب) = جا أ \, جتا ب - جتا أ \, جا ب$

$= \frac{٤}{٥}\times\frac{١٢}{١٣} - \frac{-٣}{٥}\times\frac{٥}{١٣}$

$= \frac{٤٨}{٦٥} + \frac{١٥}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٥}$

⑧ أ ، ب تقعان في الربع الأول





$جا أ = \frac{٤}{٥}$ ، $جتا أ = \frac{٣}{٥}$ ، $جا ب = \frac{٨}{١٧}$ ، $جتا ب = \frac{١٥}{١٧}$

$ظا أ = \frac{٤}{٣}$ ، $ظا ب = \frac{٨}{١٥}$

① $جا(أ+ب) = جا أ \, جتا ب + جتا أ \, جا ب$

$= \frac{٤}{٥}\times\frac{١٥}{١٧} + \frac{٣}{٥}\times\frac{٨}{١٧} = \frac{٨٤}{٨٥}$

② $ظا(أ-ب) = \frac{ظا أ - ظا ب}{١ + ظا أ \, ظا ب} = \frac{\frac{٤}{٣}-\frac{٨}{١٥}}{١+\frac{٤}{٣}\times\frac{٨}{١٥}} = \frac{٣٦}{٧٧}$

③ لإيجاد قا (أ − ب) نوجد قيمة جتا (أ − ب)

$جتا(أ-ب) = جتا أ \, جتا ب + جا أ \, جا ب$

$= \frac{٣}{٥}\times\frac{١٥}{١٧} + \frac{٤}{٥}\times\frac{٨}{١٧} = \frac{٧٧}{٨٥}$

$\therefore قا(أ-ب) = \frac{١}{جتا(أ-ب)} = \frac{٨٥}{٧٧}$

④ لإيجاد ظتا (أ + ب) نوجد أولاً ظا (أ + ب)

$ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ \, ظا ب}$

$= \frac{\frac{٤}{٣}+\frac{٨}{١٥}}{١-\frac{٤}{٣}\times\frac{٨}{١٥}} = \frac{٨٤}{١٣}$

$\therefore ظتا(أ+ب) = \frac{١٣}{٨٤}$

⑨ $جتا أ = \frac{٣}{٥}$ ، $جا ب = \frac{٢٤}{٢٥}$

$جا(أ+ب) = جا أ \, جتا ب + جتا أ \, جا ب$

$= \frac{٤}{٥}\times\frac{٧}{٢٥} + \frac{٣}{٥}\times\frac{٢٤}{٢٥}$

$= \frac{٢٨}{١٢٥} + \frac{٧٢}{١٢٥} = \frac{١٠٠}{١٢٥} = \frac{٤}{٥}$

$جتا(أ-ب) = جتا أ \, جتا ب + جا أ \, جا ب$

$= \frac{٣}{٥}\times\frac{٧}{٢٥} + \frac{٤}{٥}\times\frac{٢٤}{٢٥}$

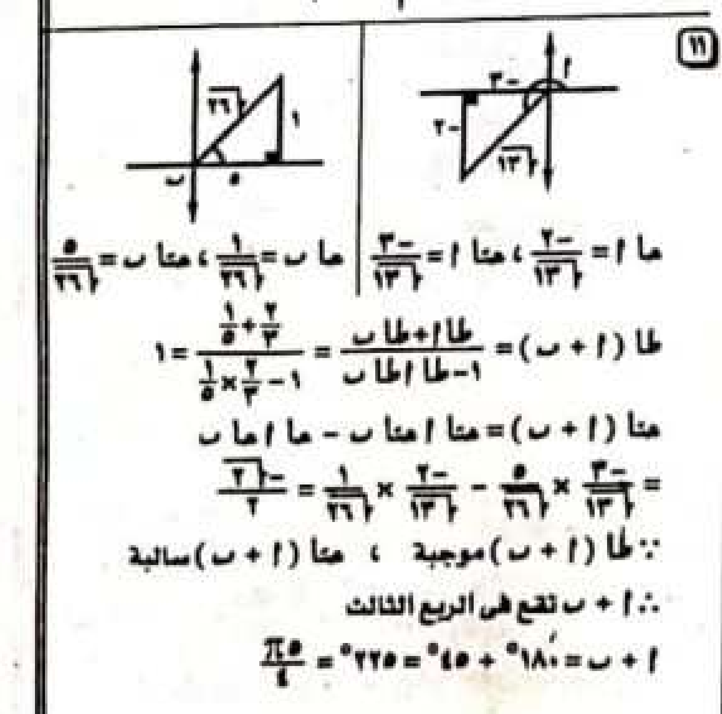
$= \frac{٢١}{١٢٥} + \frac{٩٦}{١٢٥} = \frac{١١٧}{١٢٥}$

⑩ $جتا(أ-ب) = جتا أ \, جتا ب + جا أ \, جا ب$

$= (-\frac{٣}{٥})\times(-\frac{١٢}{١٣}) + (-\frac{٤}{٥})\times\frac{٥}{١٣}$

$= \frac{٣٦}{٦٥} - \frac{٢٠}{٦٥} = \frac{١٦}{٦٥}$.

⑪



$جا أ = \frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$ ، $جتا أ = \frac{-٣}{\sqrt{١٣}}$ ، $جا ب = \frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ ، $جتا ب = \frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$

$ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ \, ظا ب} = \frac{\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٥}}{١-\frac{٢}{٣}\times\frac{١}{٥}} = ١$

$جتا(أ+ب) = جتا أ \, جتا ب - جا أ \, جا ب$

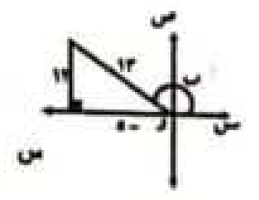
$= \frac{-٣}{\sqrt{١٣}}\times\frac{٥}{\sqrt{٢٦}} - \frac{-٢}{\sqrt{١٣}}\times\frac{١}{\sqrt{٢٦}} = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ ظا (أ + ب) موجبة ، جتا (أ + ب) سالبة

$\therefore$ أ + ب تقع في الربع الثالث

$أ + ب = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥° = \frac{٥\pi}{٤}$

(١٢)



جا أ $= \frac{-٨}{١٧}$ ، جتا أ $= \frac{-١٥}{١٧}$ ، ظا أ $= \frac{٨}{١٥}$

جا ب $= \frac{١٢}{١٣}$ ، جتا ب $= \frac{-٥}{١٣}$ ، ظا ب $= \frac{-١٢}{٥}$

① جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

$= \frac{-١٥}{١٧} \times \frac{-٥}{١٣} + \frac{-٨}{١٧} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{-٢١}{٢٢١}$

② جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$= \frac{-٨}{١٧} \times \frac{-٥}{١٣} + \frac{-١٥}{١٧} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{-١٤٠}{٢٢١}$

③ ظا (أ − ب) $= \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٨}{١٥} - (\frac{-١٢}{٥})}{١ + \frac{٨}{١٥} \times \frac{-١٢}{٥}}$

$= \frac{-٢٢٠}{٢١}$

(١٣) ① جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{١٧} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٨}{١٧}$

$= \frac{٧٧}{٨٥}$

② جتا هـ = − جتا (أ + ب)

= − (جتا أ جتا ب − جا أ جا ب)

$= -(\frac{٤}{٥} \times \frac{١٥}{١٧} - \frac{٣}{٥} \times \frac{٨}{١٧}) = -\frac{٣٦}{٨٥}$

(١٤) جتا أ $= \frac{-٤}{٥}$ ، جا أ $= \frac{-٣}{٥}$

∴ جا ب $= \frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب $= \frac{-١٢}{١٣}$

جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

$= \frac{-٣}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} - (\frac{-٤}{٥}) \times \frac{٥}{١٣}$

$= \frac{٣٦}{٦٥} + \frac{٢٠}{٦٥} = \frac{٥٦}{٦٥}$

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

$= \frac{-٤}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} - (\frac{-٣}{٥}) \times \frac{٥}{١٣}$

$= \frac{٤٨}{٦٥} + \frac{١٥}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٥}$

(١٥) ∵ أ أصغر قياس موجب ، جا أ $= \frac{٣}{٥}$

∴ أ تقع في الربع الثاني ، جتا أ $= \frac{-٤}{٥}$

∴ جتا ب $= \frac{-١٢}{١٣}$ ، ب أصغر قياس موجب

∴ ب تقع في الربع الثاني ∴ جا ب $= \frac{٥}{١٣}$

جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} - (\frac{-٤}{٥}) \times \frac{٥}{١٣} = \frac{-١٦}{٦٥}$

جتا (أ − ب) $= \frac{-٤}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٣}{٦٥}$

(١٦) ① جا أ $= \frac{٣}{٥}$ ، جتا أ $= \frac{٤}{٥}$

∵ جتا ب $= \frac{٥}{١٣}$ ∴ جا ب $= \frac{١٢}{١٣}$

جا هـ = جا [١٨٠ − (أ + ب)] = جا (أ + ب)

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{٦٣}{٦٥}$

② جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} - \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \times \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

$= \frac{١ - ٢\sqrt{٣٠}}{١٢}$

جتا هـ = جتا [١٨٠° − (أ + ب)]

= − جتا (أ + ب) $= \frac{٢\sqrt{٣٠} - ١}{١٢}$

(١٧) ① جتا (٤٩°٣٦′ + ٤٠°٢٤′) = جتا ٩٠°

② = جا $(\frac{٤\pi}{٣} + \frac{٢\pi}{٣})$ = جا ٢π

③ = جتا $(\frac{\pi}{٤} + أ + \frac{\pi}{٤} - أ)$ = جتا $\frac{\pi}{٢}$

④ = جتا (٧٥° − ١٥°) = جتا ٦٠° $= \frac{١}{٢}$

⑤ = − جتا (١٢٠° + ٦٠°) = − جتا ١٨٠°

⑥ = جا (٤٠° − ٧٠°) = جا − ٣٠° = − جا ٣٠°

⑦ = ظا $(\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{١٢})$ = ظا $\frac{\pi}{٤}$

⑧ = ظا (٣٠° + ١٥°) = ظا ٤٥°

⑨ جا (− ٣٠٥°) = جا ٥٥°

∴ جتا (− ٣٥°) جا ٥٥° − جا (− ٣٥°) جتا ٥٥°

= جا [٥٥° − (− ٣٥°)] = جا ٩٠°

⑩ جا ٦٥° جتا ٢٥° + جتا ٦٥° جا ٢٥°

= جا (٦٥° + ٢٥°) = جا ٩٠°

⑪ $= \frac{\text{ظا ٤٥°} + \text{ظا هـ}}{١ - \text{ظا ٤٥° ظا هـ}} = \frac{١ + \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٣}} = ٢$

(١٨) ① جا (س − ٤٠°) = جا ٣٠° أو = جا ١٥٠°

∴ س − ٤٠° = ٣٠° ∴ س = ٧٠°

أو س − ٤٠° = ١٥٠° ∴ س = ١٩٠°

② جتا (٣س − ٢س) = جتا ٣٠° أو جتا ٣٣٠°

∴ س = ٣٠° أو س = ٣٣٠°

③ جتا (٥٢° + ٨°) = جا س

جتا ٦٠° = جا س ∴ س = ٣٠° أو س = ١٥٠°

④ ظا (س − ٢٢°١٥′) = ظا ١٣٥° أو ظا ٣١٥°

∴ س = ١٣٥° + ٢٢°١٥′ = ١٥٧°١٥′

س = ٣١٥° + ٢٢°١٥′ = ٣٣٧°١٥′

(١٩) ① المقدار = جتا (س + ٧٥° − س − ٤٥°)

= جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ لا يتوقف على س

② = ظا (س + ٨٥°١٧′ − س − ٤٠°١٧′) = ظا ٤٥° = ١

∴ لا يتوقف على س

(٢٠) ① الطرف الأيمن = جا (٣٠° + ٢٠°) + جتا (٦٠° + ٢٠°)

= جا ٣٠° جتا ٢٠° + جتا ٣٠° جا ٢٠° + جتا ٦٠° جتا ٢٠ − جا ٦٠° جا ٢٠°

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٢٠° + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٢٠° + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢٠° − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٢٠°

= جتا ٢٠° = الطرف الأيسر

② ، ③ بنفس الطريقة السابقة

④ ظا (٨٠° − ٣٥°) = ظا ٤٥°

∴ $\frac{\text{ظا ٨٠° − ظا ٣٥°}}{\text{١ + ظا ٨٠° ظا ٣٥°}}$ = ١

∴ ظا ٨٠° − ظا ٣٥° = ١ + ظا ٨٠° ظا ٣٥°

∴ ظا ٨٠° − ظا ٣٥° − ظا ٨٠ ظا ٣٥° = ١

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا (٣س − ٢س)}}{\text{جتا (٣س − ٢س)}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

= ظا س = الطرف الأيسر

(٢١) ① الطرف الأيمن = جتا (٧٥°) = جتا (٣٠° + ٤٥°)

= جتا ٣٠° جتا ٤٥° − جا ٣٠° جا ٤٥°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}-١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

= $\frac{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}}{٤}$ = الطرف الأيسر

② الطرف الأيمن = ظا (٧٥°) = ظا (٤٥° + ٣٠°)

= $\frac{\text{ظا ٤٥° + ظا ٣٠}}{\text{١ − ظا ٤٥° ظا ٣٠}}$

= $\frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - ١ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣}+١}{\sqrt{٣}-١} \times \frac{\sqrt{٣}+١}{\sqrt{٣}+١}$

= $\frac{٣ + ٢\sqrt{٣} + ١}{٢} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{٢} = ٢ + \sqrt{٣}$

= الطرف الأيسر

③ الطرف الأيمن = ظا ٥٠° = ظا (٤٥° + ٥°)

= $\frac{\text{ظا ٤٥° + ظا ٥°}}{\text{١ − ظا ٤٥° ظا ٥°}} = \frac{\text{١ + ظا ٥°}}{\text{١ − ظا ٥°}}$ = الطرف الأيسر

④ الطرف الأيمن = ظا (٤٥° − أ) = $\frac{\text{ظا ٤٥° − ظا أ}}{\text{١ + ظا ٤٥ ظا أ}}$

= $\frac{\text{١ − ظا أ}}{\text{١ + ظا أ}} = \frac{١ - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{١ + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}} = \frac{\frac{\text{جتا أ − جا أ}}{\text{جتا أ}}}{\frac{\text{جتا أ + جا أ}}{\text{جتا أ}}}$

= $\frac{\text{جتا أ − جا أ}}{\text{جتا أ + جا أ}}$

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا(أ+ب) + جا(أ−ب)}}{\text{جتا(أ+ب) + جتا (أ−ب)}}$

= $\frac{\text{جا أ جتا ب + جا ب جتا أ + جا أ جتا ب − جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب + جا ب جا أ + جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$

= $\frac{\text{٢ جا أ جتا ب}}{\text{٢ جتا أ جتا ب}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ = ظا أ = الطرف الأيسر

⑥ الطرف الأيمن = جا (٣٠° − أ) + جتا (أ − ٦٠°)

= جا ٣٠° جتا أ − جتا ٣٠° جا أ + جتا أ جتا ٦٠° + جا أ جا ٦٠°

= $\frac{١}{٢}$ جتا أ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا أ + $\frac{١}{٢}$ جتا أ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا أ = جتا أ

الطرف الأيسر = جا (٩٠° + أ)

= جا ٩٠° جتا أ + جتا ٩٠° جا أ

= ١ × جتا أ + صفر × جا أ = جتا أ

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

⑦ الطرف الأيمن = جتا أ جتا ٣٠° + جا أ جا ٣٠°

+ جا أ جتا ٦٠° − جتا أ جا ٦٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا أ + $\frac{١}{٢}$ جا أ + $\frac{١}{٢}$ جا أ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا أ = جا أ

= الطرف الأيسر

⑧ الطرف الأيمن = جا ($\frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢٤}$)

= جا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ = الأيسر

⑨ الطرف الأيمن = جا (٤٥° + ٥°) + جتا (٤٥° + ٥°)

= جا ٤٥° جتا ٥° + جتا ٤٥° جا ٥° + جتا ٤٥° جتا ٥°

جتا ٥° − جا ٤٥° جا ٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٥°

+ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٥° + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا ٥° − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا ٥°

= $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ جتا ٥° = $\sqrt{٢}$ جتا ٥° = الطرف الأيسر

(٢٢) المقدار = جتا [(أ + ب) − أ] = جتا ب

(٢٣) ① الطرف الأيمن = جا (س + ٦٠ − س − ١٥)

= جا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = الطرف الأيسر

② الطرف الأيمن = جتا ٦٠° جتا س − جا ٦٠° جا س +

جتا ٦٠° جتا س + جا ٦٠° جا س − جتا س

= $\frac{١}{٢}$ جتا س + $\frac{١}{٢}$ جتا س − جتا س = صفر = الأيسر

---

③ الطرف الأيمن

$= \frac{\text{طا س} - \text{طا } ٤٥°}{١ + \text{طا س طا } ٤٥°} + \frac{\text{طا س} - \text{طا } ١٣٥°}{١ + \text{طا س طا } ١٣٥°}$

$= \frac{\text{طا س} - ١}{١ + \text{طا س}} + \frac{\text{طا س} + ١}{١ - \text{طا س}} = \frac{\text{٤ طا س}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ س}}$

= الطرف الأيسر

---

④ الطرف الأيمن :

= جتا هـ + جتا هـ جتا ١٢٠° + جا هـ جا ١٢٠° + جتا هـ

جتا ١٢٠° − جا هـ جا ١٢٠° = جتا هـ − $\frac{١}{٢}$ جتا هـ − $\frac{١}{٢}$ جتا هـ

= صفر = الطرف الأيسر

---

٢٤ طا (س − ص) $= \frac{\text{طا س} - \text{طا ص}}{١ + \text{طا س طا ص}} = \frac{\frac{٣}{٤} - \text{طا ص}}{١ + \frac{٣}{٤}\text{طا ص}} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٩}{٤}$ − ٣ طا ص = ١ + $\frac{٣}{٤}$ طا ص ∴ طا ص = $\frac{١}{٣}$

---

٢٥ أ تقع فى الربع الأول

جا أ = $\frac{٣}{٥}$

، جتا أ = $\frac{٤}{٥}$

طا أ = $\frac{٣}{٤}$

طا ب = −٧

طا (أ + ب) $= \frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{١ - \text{طا أ طا ب}} = \frac{\frac{٣}{٤} + (-٧)}{١ - (\frac{٣}{٤} \times -٧)} = -١$

∴ أ + ب = ١٣٥°

---

٢٦ طا (θ + ٤٥°) $= \frac{\text{طا } \theta + \text{طا } ٤٥°}{١ - \text{طا } \theta \text{ طا } ٤٥°} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{\text{طا } \theta + ١}{١ - \text{طا } \theta} = \frac{٣}{٢}$

٢ طا θ + ٢ = ٣ − ٣ طا θ ∴ ٥ طا θ = ١ ∴ طا θ = $\frac{١}{٥}$

---

٢٧ طا (أ + هـ) $= \frac{\text{طا أ} + \text{طا هـ}}{١ - \text{طا أ طا هـ}} = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥}} = \frac{٧}{٩}$

بوضع أ + هـ = ء

طا (ب + ء) $= \frac{\text{طا ب} + \text{طا ء}}{١ - \text{طا ب طا ء}} = \frac{\frac{١}{٨} + \frac{٧}{٩}}{١ - \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٩}} = \frac{\frac{٦٥}{٧٢}}{\frac{٦٥}{٧٢}} = ١$

∴ أ + ب + هـ = ٤٥°

---

٢٨ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

= $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٦}$

جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٦}$

---

٢٩ $\frac{\text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}} = \frac{١}{٣}$

٣ جتا أ جتا ب − ٣ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٣ جتا أ جتا ب − جتا أ جتا ب = ٣ جا أ جا ب + جا أ جا ب

٢ جتا أ جتا ب = ٤ جا أ جا ب (÷ ٢)

∴ ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب ÷ (جتا أ جتا ب)

$\frac{\text{٢ جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} = \frac{\text{جتا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}$

٢ طا أ طا ب = ١ (÷ طا ب)

٢ طا أ = $\frac{١}{\text{طا ب}}$ ∴ ٢ طا أ = ظتا ب ،

عندما طا أ = $\frac{٢}{٥}$ ∴ ٢ × $\frac{٢}{٥}$ = ظتا ب

ظتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ∴ طا ب = $\frac{٥}{٤}$

طا (أ − ب) $= \frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{١ + \text{طا أ طا ب}}$

$= \frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٥}{٤}}{١ + \frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٤}} = \frac{-١٧}{٣٠}$

---

٣٠ ① أ − ب = ٤٥° ∴ أ = ٤٥° + ب

طا (٤٥° + ب) $= \frac{\text{طا } ٤٥° + \text{طا ب}}{١ - \text{طا } ٤٥° \text{ طا ب}} = \frac{١ + \text{طا ب}}{١ - \text{طا ب}}$

---

② أ − ب = ٤٥° ∴ طا أ = طا (٤٥° + ب)

$= \frac{\text{طا } ٤٥° + \text{طا ب}}{١ - \text{طا } ٤٥° \text{ طا ب}} = \frac{١ + \text{طا ب}}{١ - \text{طا ب}} = \frac{١ + \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}{١ - \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}$

$= \frac{\text{جتا ب} + \text{جا ب}}{\text{جتا ب} - \text{جا ب}}$

---

٣١ أ + ب = ١٨٠° − هـ

طا (أ + ب) = طا (١٨٠° − هـ) = − طا هـ

∴ $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{١ - \text{طا أ طا ب}}$ = − طا هـ

∴ طا أ + طا ب = − طا هـ + طا أ طا ب طا هـ

∴ طا أ + طا ب + طا هـ = طا أ طا ب طا هـ

---

٣٢ طا (أ + ب) = طا (٩٠° − هـ)

∴ $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{١ - \text{طا أ طا ب}}$ = ظتا هـ ∴ $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{١ - \text{طا أ طا ب}} = \frac{١}{\text{طا هـ}}$

∴ طا أ طا هـ + طا ب طا هـ = ١ − طا أ طا ب

∴ طا أ طا ب + طا ب طا هـ + طا أ طا هـ = ١

٣٣ ٣(هتا ا هتا ب - ها ا ها ب)

=٢(هتا ا هتا ب + ها ا ها ب)

∴ ٣ هتا ا هتا ب - ٣ ها ا ها ب

= ٢ هتا ا هتا ب + ٢ ها ا ها ب

∴ هتا ا هتا ب = ٥ ها ا ها ب

بالقسمة على ٥ هتا ا هتا ب ∴ طا ا طا ب = $\frac{١}{٥}$

---

٣٤ الطرف الأيمن = ها^{٢}س + ها^{٢}ص + ٢ها س ها ص + هتا^{٢}س

+ هتا^{٢}ص + ٢ هتا س هتا ص

= ١ + ٢ ها س ها ص + ١ + ٢ هتا س هتا ص

= ٢ + ٢ هتا س هتا ص + ٢ ها س ها ص

= ٢ + ٢ هتا (س - ص) = الأيسر

---

٣٥ طا (ا + ب) = $\frac{طا ا + طا ب}{١ - طا ا طا ب}$ = $\frac{\frac{١}{٥} + \frac{٢}{٣}}{١ - \frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٣}}$ = ١

∴ ق(∠ا) + ق(∠ب) = ٤٥° ∴ ق(∠هـ) = ١٣٥°

---

٣٦ الطرف الأيمن = $\frac{ها ا هتا ب - هتا ا ها ب}{هتا ا هتا ب}$

+ $\frac{ها ب هتا هـ - هتا ب ها هـ}{هتا ب هتا هـ}$

= $\frac{ها ا هتا ب}{هتا ا هتا ب}$ - $\frac{هتا ا ها ب}{هتا ا هتا ب}$

+ $\frac{ها ب هتا هـ}{هتا ب هتا هـ}$ - $\frac{هتا ب ها هـ}{هتا ب هتا هـ}$

= $\frac{ها ا}{هتا ا}$ - $\frac{ها ب}{هتا ب}$ + $\frac{ها ب}{هتا ب}$ - $\frac{ها هـ}{هتا هـ}$

= طا ا - طا ب + طا ب - طا هـ = طا ا - طا هـ

= الطرف الأيسر

---

٣٧ س = طا ٧٥° = طا (٤٥° + ٣٠°)

= $\frac{طا ٤٥° + طا ٣٠°}{١ - طا ٤٥° طا ٣٠°}$ = $\frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}}$ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١}$ = ٢ + $\sqrt{٣}$

∴ س^{٢} - ٢$\sqrt{٣}$ س - ١ = ٧ + ٤$\sqrt{٣}$ - ٤$\sqrt{٣}$ - ٦ - ١

= صفر

---

٣٨ ت = $\frac{٥}{٢}$ ها ١٦٥° ن

ت = $\frac{٥}{٢}$ ها (٤٥° ن + ١٢٠° ن)   عند ن = ١

= $\frac{٥}{٢}$ [ها ٤٥° هتا ١٢٠° + هتا ٤٥° ها ١٢٠°]

= $\frac{٥}{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (-$\frac{١}{٢}$) + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

= $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٥(\sqrt{٦} - \sqrt{٢})}{٨}$

---

٣٩ ① ها ($\frac{س + ص + ع}{٢}$) = ها ($\frac{١٨٠°}{٢}$) = ها ٩٠° = ١

---

② هتا($\frac{ا + ب - هـ}{٢}$) هتا هـ + ها($\frac{-(ا + ب - هـ)}{٢}$) ها هـ

= هتا ($\frac{ا + ب - هـ}{٢}$) هتا هـ - ها ($\frac{ا + ب - هـ}{٢}$) ها هـ

= هتا ($\frac{ا + ب - هـ}{٢}$ + هـ) = هتا ($\frac{ا + ب - هـ + ٢هـ}{٢}$)

= هتا (ا + ب + هـ) = هتا ١٨٠° = صفر

---

③ المقدار = ها (س + ١٥°) = -١ (أصغر قيمة لـ ها)

س + ١٥° = ٢٧٠° ∴ س = ٢٥٥°

---

④ المقدار = هتا (س - ٢٠°) = ١ (أكبر قيمة لـ هتا)

س - ٢٠° = صفر ∴ س = ٢٠°

---

⑤ ها^{٢}س + هتا^{٢}ص + ٢ ها س هتا ص = $\frac{١}{٤}$ ← (١)

هتا^{٢}س + ها^{٢}ص + ٢ هتا س ها ص = $\frac{١}{٩}$ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

١ + ١ + ٢ (ها س هتا ص + هتا س ها ص) = $\frac{١٣}{٣٦}$

٢ ها (س + ص) = $\frac{١٣}{٣٦}$ - ٢ = $\frac{-٥٩}{٣٦}$

ها (س + ص) = $\frac{-٥٩}{٧٢}$

---

⑥ ها ٧٠° - طا ٣٠° هتا ٧٠°

= ها ٧٠° - $\frac{ها ٣٠°}{هتا ٣٠°}$ هتا ٧٠°

= $\frac{هتا ٣٠° ها ٧٠° - ها ٣٠° هتا ٧٠°}{هتا ٣٠°}$ = $\frac{ها (٧٠° - ٣٠°)}{هتا ٣٠°}$

= $\frac{ها ٤٠°}{ها ٣٠°}$ = ر + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٢ر}{\sqrt{٣}}$

---

⑦ ها (٢ا + ب) = ها [ا + (ا + ب)]

= ها ا هتا (ا + ب) + هتا ا ها (ا + ب)

= $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ + $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{١}{٣}$

= $\frac{٦\sqrt{٢} + ٤}{١٥}$

---

⑧ ها ا هتا ب + هتا ا ها ب = $\frac{١}{٣}$ ← (١)

ها ا هتا ب - هتا ا ها ب = $\frac{١}{٢}$ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٢ ها ا هتا ب = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{٦}$ (÷٢)

ها ا هتا ب = $\frac{٥}{١٢}$

⑨ أ هـ = $\sqrt{\text{٢}^{\text{٢}} + \text{٤}^{\text{٢}}} = \text{٢}\sqrt{\text{٥}}$

و هـ = $\sqrt{\text{٣}^{\text{٢}} + \text{٤}^{\text{٢}}} = \text{٥}$

ق(∠أ هـ و) = ١٨٠° − (ق(∠أ هـ ب) + ق(∠د و هـ))

= [٩٠° − ق(∠أ هـ ب)] + [٩٠° − ق(∠د و هـ)]

= ق(∠أ) + ق(∠د و)

∴ س = أ + و

جا س = جا (أ + و)

= جا أ جتا و + جتا أ جا و

= $\frac{\text{٤}}{\text{٢}\sqrt{\text{٥}}} \times \frac{\text{٤}}{\text{٥}} + \frac{\text{٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٥}}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٥}} = \frac{\text{١١}\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢٥}}$

---

⑩

بفرض أن طول ضلع المربع = ٢ ل

أ و = $\sqrt{(\text{٢ل})^{\text{٢}} + \text{ل}^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٥}}$ ل

θ + س = ٤٥°

θ = ٤٥° − س

ظا θ = ظا (٤٥° − س)

= $\frac{\text{ظا ٤٥° − ظا س}}{\text{١ + ظا ٤٥° ظا س}} = \frac{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

---

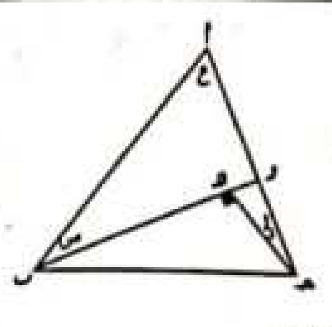
⑪ ظا ٦٥° = ظتا ٢٥° = أ ∴ ظا ٢٥° = $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$

ظا ٤٠° = ظا (٦٥° − ٢٥°)

= $\frac{\text{ظا ٦٥° − ظا ٢٥°}}{\text{١ + ظا ٦٥° ظا ٢٥°}} = \frac{\text{أ} - \frac{\text{١}}{\text{أ}}}{\text{١} + \text{أ} \times \frac{\text{١}}{\text{أ}}} = \frac{\text{أ}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{٢أ}}$

---

⑫



نرسم $\overline{\text{ب هـ}}$

يقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في و

∵ ∠جـ و هـ خارجة عن Δ أ ب و

∴ ق(∠جـ و هـ) = ق(∠ع) + ق(∠ص)

∵ س = ٩٠° − (ع + ص)

∴ جتا س = جتا [٩٠° − (ع + ص)] = جا (ع + ص)

جتا س = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∴ ظا س = $\frac{\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢}}$

---

⑬ أ + س + ب = ٩٠°

س = ٩٠° − (أ + ب)

ظتا س = ظتا [٩٠° − (أ + ب)]

= ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{٩}} + \frac{\text{٤}}{\text{٣}}}{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٩}} \times \frac{\text{٤}}{\text{٣}}} = \frac{\text{٢٧}}{\text{١٤}}$

---

⑭ و هـ = $\sqrt{\text{٣}^{\text{٢}} + \text{٤}^{\text{٢}}} = \text{٥}$

هـ ب = $\sqrt{\text{١٧}^{\text{٢}} - \text{٨}^{\text{٢}}} = \text{١٥}$

ق(∠د و هـ) = ق(∠أ و هـ) + ق(∠د هـ ب)

س = $\theta + \alpha$

جا س = جا $(\theta + \alpha)$ = جا θ جتا α + جتا θ جا α

= $\frac{\text{٣}}{\text{٥}} \times \frac{\text{١٥}}{\text{١٧}} + \frac{\text{٤}}{\text{٥}} \times \frac{\text{٨}}{\text{١٧}} = \frac{\text{٧٧}}{\text{٨٥}}$

---

⑮ $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ جا س + جتا س = ١

∴ ظا ٣٠° جا س + جتا س = ١

$\frac{\text{جا ٣٠°}}{\text{جتا ٣٠°}}$ جا س + جتا س = ١ (× جتا ٣٠°)

جا ٣٠° جا س + جتا ٣٠° جتا س = جتا ٣٠°

جتا (٣٠° − س) = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

قا (٣٠° − س) = $\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$

---

⑯ ظتا س = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ← ظا س = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

ظتا س = ٧ ← ظا س = $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$

∵ س + ص + ع = ١٨٠°

س + ص = ١٨٠° − ع

ظا (س + ص) = ظا (١٨٠° − ع)

$\frac{\text{ظا س + ظا ص}}{\text{١ − ظا س ظا ص}}$ = − ظا ع

$\frac{\frac{\text{٣}}{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٧}}}{\text{١} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \frac{\text{١}}{\text{٧}}}$ = − ظا ع

١ = − ظا ع ∴ ظا ع = −١

---

⑰ بفرض أن س = أ + ب

ظا س = ظا (أ + ب)

= $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٥}}}{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}}} = \frac{\text{٧}}{\text{٩}}$

∴ ظا س = $\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$

أ + ب + هـ = س + هـ

طا (أ + ب + جـ) = طا س + طا جـ

$= \frac{\text{طا س + طا جـ}}{\text{١ − طا س طا جـ}} = \frac{\frac{٧}{٩} + \frac{١}{٨}}{١ - \frac{٧}{٩} \times \frac{١}{٨}}$

∴ طا (أ + ب + جـ) = ١ ∴ أ + ب + جـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

---

(٣٨) ٤ جتا (س + ص) = ٣ جتا (س − ص)

٤ جتا س جتا ص − ٤ جا س جا ص

= ٣ جتا س جتا ص + ٣ جا س جا ص

١ = ٧ طا س طا ص ∴ طا س طا ص = $\frac{١}{٧}$

---

(٣٩) أ + ب + جـ = ٩٠° ∴ أ + ب = ٩٠° − جـ

طا (أ + ب) = طا (٩٠° − جـ)

$\frac{\text{طا أ + طا ب}}{\text{١ − طا أ طا ب}} = \text{ظتا جـ} = \frac{١}{\text{طا جـ}}$

∴ طا أ طا جـ + طا ب طا جـ = ١ − طا أ طا ب

∴ طا أ طا ب + طا أ طا جـ + طا ب طا جـ = ١

---

(٤٠) المقدار = جتا ($\frac{\pi}{٣}$ + س + $\frac{\pi}{٦}$) = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = − جا س

---

(٤١) ∵ أ + ب = ١٢٠° ∴ أ = ١٢٠° − ب

جتا أ = جا (٩٠° − أ) = جا [٩٠° − (١٢٠° − ب)]

= جا (ب − ٣٠°)

∴ ٢ جتا أ = ٢ جا (ب − ٣٠°)

= ٢ (جا ب جتا ٣٠° − جتا ب جا ٣٠°)

= ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ب − $\frac{١}{٢}$ جتا ب) = $\sqrt{٣}$ جا ب − جتا ب

∴ $\sqrt{٣}$ جا ب − جتا ب = ($\sqrt{٣}$ − ١) جا ب

$\sqrt{٣}$ جا ب − جتا ب = $\sqrt{٣}$ جا ب − جا ب

∴ $\frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}} = ١$ ∴ طا ب = ١

∴ ب = ٤٥° ∴ أ = ١٢٠° − ٤٥° = ٧٥°

---

(٤٢) بفرض أن أ ، ب ، جـ قياسات زوايا Δ

أ + ب + جـ = ١٨٠° ∴ $\frac{أ}{٢} + \frac{ب}{٢} + \frac{جـ}{٢} = ٩٠°$

طا ($\frac{أ}{٢} + \frac{ب}{٢}$) = طا (٩٠° − $\frac{جـ}{٢}$) = ظتا $\frac{جـ}{٢}$

∴ $\frac{\text{طا } \frac{أ}{٢} + \text{طا } \frac{ب}{٢}}{١ - \text{طا } \frac{أ}{٢} \text{ طا } \frac{ب}{٢}} = \frac{١}{\text{طا } \frac{جـ}{٢}}$

طا $\frac{أ}{٢}$ طا $\frac{جـ}{٢}$ + طا $\frac{ب}{٢}$ طا $\frac{جـ}{٢}$ = ١ − طا $\frac{أ}{٢}$ طا $\frac{ب}{٢}$

∴ طا $\frac{أ}{٢}$ طا $\frac{ب}{٢}$ + طا $\frac{ب}{٢}$ طا $\frac{جـ}{٢}$ + طا $\frac{أ}{٢}$ طا $\frac{جـ}{٢}$ = ١

---

(٤٣) جا ب = جا (أ + جـ)

= جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

∴ جا ب = $\frac{\sqrt{١٩٥}}{٢٢} \times \frac{١}{١٤} + \frac{١٧}{٢٢} \times \frac{\sqrt{١٩٥}}{١٤}$

$= \frac{١٨ \sqrt{١٩٥}}{٢٢ \times ١٤}$

∴ أ : ب : جـ = $\frac{\sqrt{١٩٥}}{٢٢} : \frac{١٨\sqrt{١٩٥}}{٢٢ \times ١٤} : \frac{\sqrt{١٩٥}}{١٤}$ = ٧ : ٩ : ١١

---

(٤٤) الطرف الأيمن = $\frac{\text{طا ٣أ − طا أ}}{\text{١ + طا ٣أ طا أ}} \times \frac{\text{طا ٣أ + طا أ}}{\text{١ − طا ٣أ طا أ}}$

= طا (٣أ − أ) × طا (٣أ + أ)

= طا ٢أ طا ٤أ

---

(٤٥) (جا أ جتا ب + جتا أ جا ب) جا جـ

− (جا ب جتا جـ + جتا ب جا جـ) جا أ

= جا أ جتا ب جا جـ + جتا أ جا ب جا جـ − جا أ جا ب

جتا جـ − جا أ جتا ب جا جـ

= جتا أ جا ب جا جـ − جا أ جا ب جتا جـ

= جا ب (جتا أ جا جـ − جا أ جتا جـ) = جا ب جا (جـ − أ)

---

(٤٦) ∵ طا (٢جـ + ٥جـ) = طا ٧ جـ

∴ $\frac{\text{طا ٢جـ + طا ٥جـ}}{\text{١ − طا ٢جـ طا ٥جـ}}$ = طا ٧ جـ

∴ طا ٢جـ + طا ٥جـ = طا ٧جـ − طا ٢جـ طا ٥جـ طا ٧جـ

∴ طا ٢جـ + طا ٢جـ طا ٥جـ طا ٧جـ + طا ٥جـ = طا ٧ جـ

---

(٤٧) ٢ (جتا ٤٥° جتا س − جا ٤٥° جا س)

× (جتا ٤٥° جتا ص + جا ٤٥° جا ص)

= ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا س − جا س) × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا ص + جا ص)

= جتا س جتا ص + جتا س جا ص − جا س جتا ص − جا س

جا ص

= (جتا س جتا ص − جا س جا ص)

+ (جتا س جا ص − جا س جتا ص)

= جتا (س + ص) − جا (س − ص)

---

(٤٨) مجموع الجذرين = $\frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{٢}{١} = ٢$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢}$ = −٢

∴ طا (أ + ب) = $\frac{\text{طا أ + طا ب}}{\text{١ − طا أ طا ب}} = \frac{٢}{١ - (-٢)} = \frac{٢}{٣}$

(٤٩) (جتا س جتا ص − جا س جا ص)

× (جتا س جتا ص + جا س جا ص)

= جتا² س جتا² ص − جا² س جا² ص

= جتا² س جتا² ص − (١ − جتا² س)(١ − جتا² ص)

= جتا² س جتا² ص − [١ − جتا² ص − جتا² س + جتا² س جتا² ص]

= جتا² س جتا² ص − ١ + جتا² ص + جتا² س − جتا² س جتا² ص

= جتا² س + جتا² ص − ١

(٥٠) في △ أ د ب:

$(أد)^2 = (٢\sqrt{٥})^2 - (٢)^2 = ١٦$

∴ أ د = ٤ سم

ظا (س + ص) = $\frac{\text{ظا س + ظا ص}}{\text{١ − ظا س ظا ص}}$

$= \frac{\frac{٢}{٤} + \frac{٥}{٤}}{١ - \frac{٢}{٤} \times \frac{٥}{٤}} \times \frac{١٦}{١٦} = \frac{٨ + ٢٠}{١٦ - ١٠} = \frac{١٤}{٣}$

تمارين (٣) على الدوال المثلثية لضعف الزاوية

(١) ① $\frac{١}{٢}$ ② جتا ٢ س

③ − جا θ ④ ٢٠°، ٨٠°

⑤ أ تقع في الربع الثاني

جتا أ = $\frac{-٣}{٥}$

ظا أ = $\frac{-٤}{٣}$

ب تقع في الربع الأول

جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$

ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$

$= \frac{\frac{-٤}{٣} + \frac{٥}{١٢}}{١ - (\frac{-٤}{٣} \times \frac{٥}{١٢})} = \frac{-٣٣}{٥٦}$

جا (أ − ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + (\frac{-٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣})$

$= \frac{٣٣}{٦٥}$

(٦) ق(∠ أ د) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°

في △ أ ب د:

$\frac{\text{ب د}}{\text{جا ٢٠°}} = \frac{٦٠}{\text{جا ٣٠°}}$

ب د = $\frac{\text{٦٠ × جا ٢٠°}}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٤١ متر

في △ ب هـ د:

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{٤١}{\text{جا ٩٠°}}$

ب هـ = $\frac{\text{٤١ × جا ٤٠°}}{\text{جا ٩٠°}}$ = ٢٦ متر

(٢) ① جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ② جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

③ جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ④ جتا ١٥٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑤ ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⑥ ظا ٤٥° = ١

⑦ $\frac{\text{جتا (٤٣° − ٣٧°)}}{\frac{١}{٢}\text{جا ٨٤°}} = \frac{\text{٢ جتا ٦}}{\text{جتا ٦}} = ٢$

(٣) جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = $٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

جتا ٢أ = جتا² أ − جا² أ

$= \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$

ظا ٢أ = $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ − ظا² أ}} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{٢٤}{٧}$

(٤) ① جا θ = $\frac{٤}{٥}$

جتا θ = $\frac{٣}{٥}$

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ θ تقع في الربع الأول

جا ٢θ = ٢ جا θ جتا θ = $٢ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

جتا ٢θ = ١ − ٢ جا² θ = $١ - ٢(\frac{٤}{٥})^2 = \frac{-٧}{٢٥}$

ظا ٢θ = $\frac{\text{٢ظا θ}}{\text{١ − ظا² θ}} = \frac{٢ \times \frac{٤}{٣}}{١ - (\frac{٤}{٣})^2} = \frac{-٢٤}{٧}$

أو ظا ٢θ = $\frac{\text{جا ٢θ}}{\text{جتا ٢θ}} = \frac{-٢٤}{٧}$

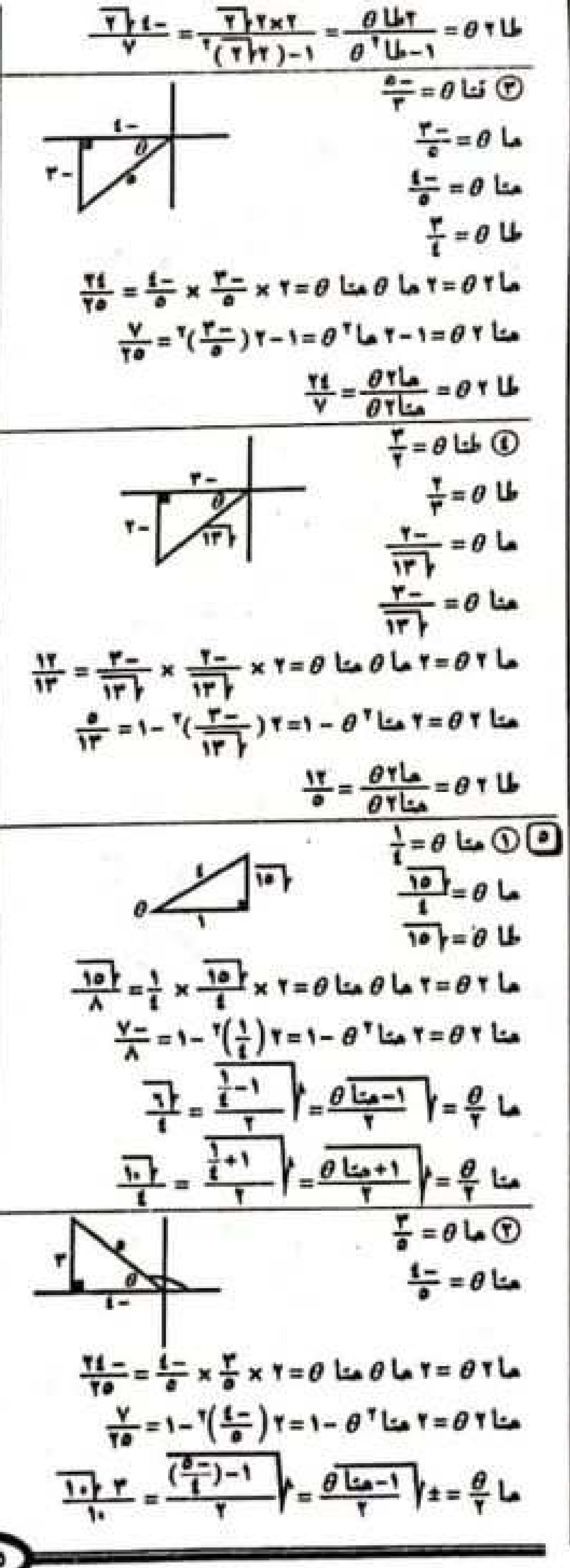
② جتا θ = $\frac{١}{٣}$

جا θ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

ظا θ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{١} = ٢\sqrt{٢}$

جا ٢θ = ٢ جا θ جتا θ = $٢ \times \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$

جتا ٢θ = ٢ جتا² θ − ١ = $٢(\frac{١}{٣})^2 - ١ = \frac{-٧}{٩}$



$\text{ظا}\,٢\theta = \frac{٢\,\text{ظا}\,\theta}{١-\text{ظا}^٢\theta} = \frac{٢\times٢\sqrt{٢}}{١-(٢\sqrt{٢})^٢} = \frac{-٤\sqrt{٢}}{٧}$

③ $\text{قتا}\,\theta = \frac{-٥}{٣}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{-٣}{٥}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{-٣}{٥}\times\frac{-٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ١-٢\,\text{جا}^٢\theta = ١-٢(\frac{-٣}{٥})^٢ = \frac{٧}{٢٥}$

$\text{ظا}\,٢\theta = \frac{\text{جا}\,٢\theta}{\text{جتا}\,٢\theta} = \frac{٢٤}{٧}$

④ $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٢}$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٢}{٣}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{-٣}{\sqrt{١٣}}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{-٢}{\sqrt{١٣}}\times\frac{-٣}{\sqrt{١٣}} = \frac{١٢}{١٣}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = ٢(\frac{-٣}{\sqrt{١٣}})^٢ - ١ = \frac{٥}{١٣}$

$\text{ظا}\,٢\theta = \frac{\text{جا}\,٢\theta}{\text{جتا}\,٢\theta} = \frac{١٢}{٥}$

⑤ ① $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٤}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

$\text{ظا}\,\theta = \sqrt{١٥}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{\sqrt{١٥}}{٤}\times\frac{١}{٤} = \frac{\sqrt{١٥}}{٨}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = ٢(\frac{١}{٤})^٢ - ١ = \frac{-٧}{٨}$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{٢} = \sqrt{\frac{١-\text{جتا}\,\theta}{٢}} = \sqrt{\frac{١-\frac{١}{٤}}{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{٤}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢} = \sqrt{\frac{١+\text{جتا}\,\theta}{٢}} = \sqrt{\frac{١+\frac{١}{٤}}{٢}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٤}$

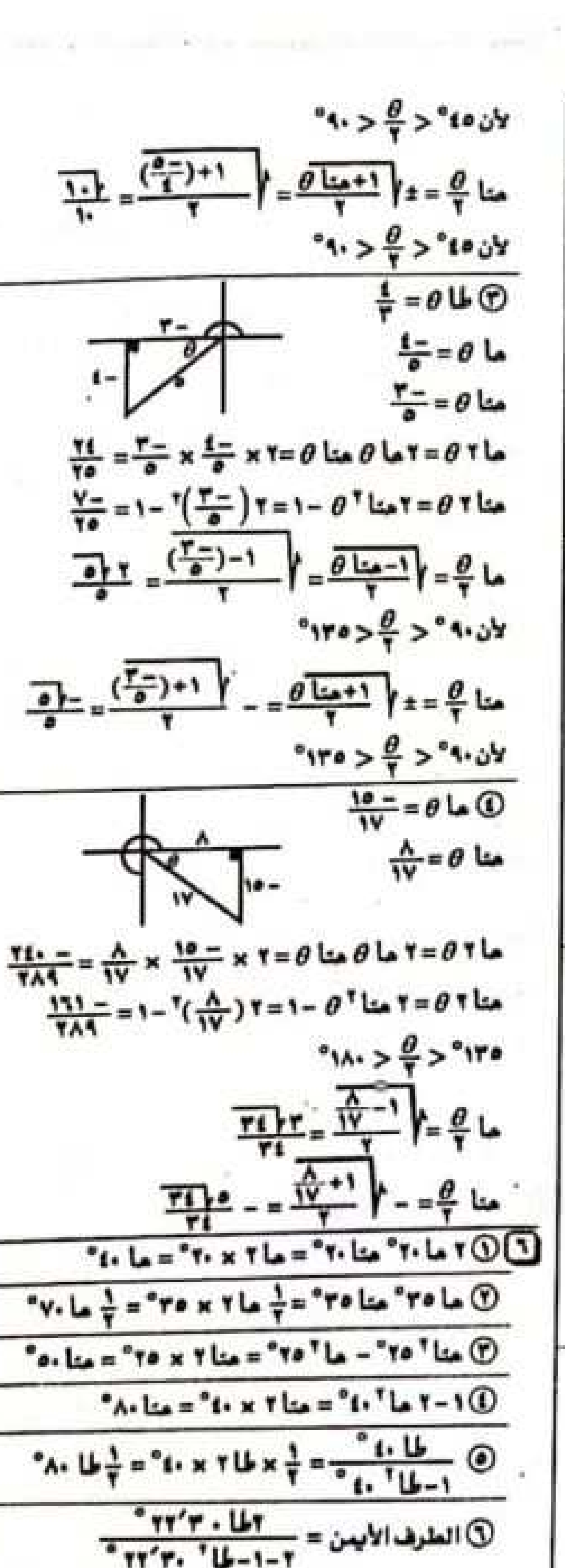
② $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{٣}{٥}\times\frac{-٤}{٥} = \frac{-٢٤}{٢٥}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = ٢(\frac{-٤}{٥})^٢ - ١ = \frac{٧}{٢٥}$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١-\text{جتا}\,\theta}{٢}} = \sqrt{\frac{١-(\frac{-٤}{٥})}{٢}} = \frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$



لأن $٤٥° < \frac{\theta}{٢} < ٩٠°$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١+\text{جتا}\,\theta}{٢}} = \sqrt{\frac{١+(\frac{-٤}{٥})}{٢}} = \frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$

لأن $٤٥° < \frac{\theta}{٢} < ٩٠°$

③ $\text{ظا}\,\theta = \frac{٤}{٣}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{-٣}{٥}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{-٤}{٥}\times\frac{-٣}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = ٢(\frac{-٣}{٥})^٢ - ١ = \frac{-٧}{٢٥}$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{٢} = \sqrt{\frac{١-\text{جتا}\,\theta}{٢}} = \sqrt{\frac{١-(\frac{-٣}{٥})}{٢}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$

لأن $٩٠° < \frac{\theta}{٢} < ١٣٥°$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١+\text{جتا}\,\theta}{٢}} = -\sqrt{\frac{١+(\frac{-٣}{٥})}{٢}} = \frac{-\sqrt{٥}}{٥}$

لأن $٩٠° < \frac{\theta}{٢} < ١٣٥°$

④ $\text{جا}\,\theta = \frac{-١٥}{١٧}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{٨}{١٧}$

$\text{جا}\,٢\theta = ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta = ٢\times\frac{-١٥}{١٧}\times\frac{٨}{١٧} = \frac{-٢٤٠}{٢٨٩}$

$\text{جتا}\,٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = ٢(\frac{٨}{١٧})^٢ - ١ = \frac{-١٦١}{٢٨٩}$

$١٣٥° < \frac{\theta}{٢} < ١٨٠°$

$\text{جا}\,\frac{\theta}{٢} = \sqrt{\frac{١-\frac{٨}{١٧}}{٢}} = \frac{٣\sqrt{٣٤}}{٣٤}$

$\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢} = -\sqrt{\frac{١+\frac{٨}{١٧}}{٢}} = -\frac{٥\sqrt{٣٤}}{٣٤}$

⑥ ① $٢\,\text{جا}\,٢٠°\,\text{جتا}\,٢٠° = \text{جا}\,٢\times٢٠° = \text{جا}\,٤٠°$

② $\text{جا}\,٣٥°\,\text{جتا}\,٣٥° = \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٢\times٣٥° = \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٧٠°$

③ $\text{جتا}^٢\,٢٥° - \text{جا}^٢\,٢٥° = \text{جتا}\,٢\times٢٥° = \text{جتا}\,٥٠°$

④ $١-٢\,\text{جا}^٢\,٤٠° = \text{جتا}\,٢\times٤٠° = \text{جتا}\,٨٠°$

⑤ $\frac{\text{ظا}\,٤٠°}{١-\text{ظا}^٢\,٤٠°} = \frac{١}{٢}\times\text{ظا}\,٢\times٤٠° = \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\,٨٠°$

⑥ الطرف الأيمن $= \frac{٢\,\text{ظا}\,٢٢°٣٠'}{٢-١-\text{ظا}^٢\,٢٢°٣٠'}$

$= \frac{٢\,\text{ظا}\,٢٢°٣٠'}{١-\text{ظا}^٢\,٢٢°٣٠'} = \text{ظا}\,٢\times٢٢\frac{١}{٢}° = \text{ظا}\,٤٥°$



⑦ جا $(٢٥° - ٣٥°)$ = جا $(-١٠°)$ = − جا $١٠°$

⑧ جتا $(٤٠° - ١٠°)$ = جتا $٣٠°$

⑨ طا $(٥٠° - ٤٠°)$ = طا $١٠°$

⑩ ١ + (طا $(٧٠° + ١٠°)$) = ١ + طا $٨٠°$ = ظتا $٨٠°$

⑪ $\frac{١ - (١ - ٢\,\text{جا}^٢\,\theta) + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{١ + (٢\,\text{جتا}^٢\,\theta - ١) + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{٢\,\text{جا}^٢\,\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{٢\,\text{جتا}^٢\,\theta + ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}$

$= \frac{٢\,\text{جا}\,\theta(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta)}{٢\,\text{جتا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta)} = \text{طا}\,\theta$

⑫ $\frac{١ - (١ - ٢\,\text{جا}^٢\,\frac{\theta}{٢}) + ٢\,\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}}{١ + (٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\theta}{٢} - ١) + ٢\,\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}}$

$= \frac{٢\,\text{جا}^٢\,\frac{\theta}{٢} + ٢\,\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}}{٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\theta}{٢} + ٢\,\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}}$

$= \frac{٢\,\text{جا}\,\frac{\theta}{٢}(\text{جا}\,\frac{\theta}{٢} + \text{جتا}\,\frac{\theta}{٢})}{٢\,\text{جتا}\,\frac{\theta}{٢}(\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\frac{\theta}{٢})} = \text{طا}\,\frac{\theta}{٢}$

[٧]

① جتا $٣٠°$ ② جتا ٦س ③ جا ٦θ

④ $\frac{-١}{٨}$ ⑤ $\frac{٢٤}{٢٥}$ ⑥ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑦ $\frac{\pm ٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ ⑧ $\frac{١}{٢}$ ⑨ $\frac{٣}{٢}$

⑩ ٢ جتا ٣س

[٨]

① ٢ جا أ جتا أ ② جتا ٢س

③ $\frac{١}{٢}$ جا ٢أ ④ $-\frac{١}{٢}$ طا ٢أ ⑤ $\frac{-١٧}{٢٥}$

⑥ $\frac{-٧}{٩}$ ⑦ جتا $٣٠°$ ⑧ جتا $١٠٠°$

⑨ جا ٦س ⑩ $\frac{٢٤}{٢٥}$ ⑪ $\frac{١}{٢}$

⑫ $٢ - \sqrt{٣}$ ⑬ $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ⑭ $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

⑮ جا^٢ هـ ⑯ ٢جتا^٢ ٢أ

[٩] جا أ = $\frac{٥}{١٣}$

أ تقع في الربع الثاني

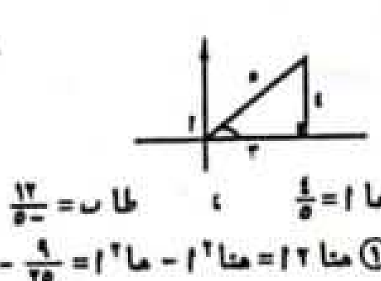
جتا أ = $\frac{-١٢}{١٣}$

∵ جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = $٢ \times \frac{٥}{١٣} \times \left(\frac{-١٢}{١٣}\right) = \frac{-١٢٠}{١٦٩}$

جتا ٢أ = جتا^٢ أ − جا^٢ أ = $\left(\frac{-١٢}{١٣}\right)^٢ - \left(\frac{٥}{١٣}\right)^٢$

$= \frac{١٤٤}{١٦٩} - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١١٩}{١٦٩}$

[١٠]



جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، طا ب = $\frac{١٢}{-٥}$

① جتا ٢أ = جتا^٢ أ − جا^٢ أ = $\frac{٩}{٢٥} - \frac{١٦}{٢٥} = \frac{-٧}{٢٥}$

② طا ٢ب = $\frac{٢\,\text{طا}\,ب}{١ - \text{طا}^٢\,ب} = \frac{٢ \times \frac{-١٢}{٥}}{١ - \left(\frac{-١٢}{٥}\right)^٢}$

$= \frac{\frac{-٢٤}{٥}}{\frac{٢٥ - ١٤٤}{٢٥}} = -\frac{٢٤}{٥} \times \frac{٢٥}{-١١٩}$

$= \frac{-١٢٠}{-١١٩} = \frac{١٢٠}{١١٩}$

[١١] أ قياس زاوية حادة

∴ أ تقع في الربع الأول

جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$

، جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، طا أ = $\frac{١٢}{٥}$

جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = $٢ \times \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٢٠}{١٦٩}$

جتا ٢أ = ٢ جتا^٢ أ − ١ = $٢ \times \left(\frac{٥}{١٣}\right)^٢ - ١ = \frac{-١١٩}{١٦٩}$

طا ٢أ = $\frac{\text{جا}\,٢أ}{\text{جتا}\,٢أ} = \frac{-١٢٠}{١٦٩}$

$٠° < \frac{أ}{٢} < ٤٥°$

جتا $\frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا}\,أ}{٢}} = \sqrt{\frac{١ + \frac{٥}{١٣}}{٢}}$

جتا $\frac{أ}{٢} = \frac{٣\sqrt{١٣}}{١٣}$

[١٢] ∵ س تقع في الربع الثالث

، طا س = $\frac{٣}{٤}$

∴ جا س = $\frac{-٣}{٥}$

، جتا س = $\frac{-٤}{٥}$

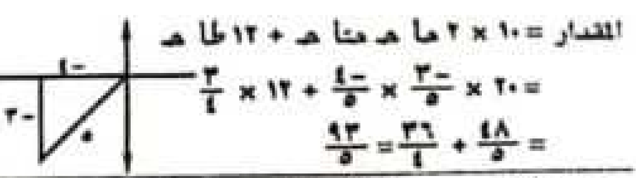
جا ٢س = ٢ جا س جتا س = $٢ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

جتا ٢س = ٢ جتا^٢ س − ١ = $٢\left(\frac{-٤}{٥}\right)^٢ - ١ = \frac{٧}{٢٥}$

طا ٢س = $\frac{\text{جا}\,٢س}{\text{جتا}\,٢س} = \frac{٢٤}{٧}$

[١٣] ① ∵ هـ تقع في الربع الثالث ، جا هـ = $\frac{-٣}{٥}$

∴ جتا هـ = $\frac{-٤}{٥}$ ، طا هـ = $\frac{٣}{٤}$



المقدار $= ١٠ \times ٢ \text{ جا هـ جتا هـ} + ١٢ \text{ ظا هـ}$

$$= ٢٠ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥} + ١٢ \times \frac{٣}{٤}$$

$$= \frac{٤٨}{٥} + \frac{٣٦}{٤} = \frac{٩٣}{٥}$$

② $$\frac{\text{جا}٢\text{هـ}}{٢\text{جتا}٢\text{هـ}} = \frac{٢\text{جا هـ جتا هـ}}{٢(\text{جتا}^٢\text{هـ} - \text{جا}^٢\text{هـ})}$$

$$= \frac{٢ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥}}{٢ \times [(\frac{-٤}{٥})^٢ - (\frac{-٣}{٥})^٢]} = \frac{١٢}{٧}$$

③ $$\frac{\text{جتا}٢\text{هـ}}{\text{جا}٢\text{هـ}} = \frac{\text{جتا}^٢\text{هـ} - \text{جا}^٢\text{هـ}}{٢\text{جا هـ جتا هـ}}$$

$$= \frac{\frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥}}{٢ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥}} = \frac{٧}{٢٤}$$

⑭ $\text{جتا ب} = \frac{-٤}{٥}$

$\text{جا ب} = \frac{-٣}{٥}$

$$\text{جا}٢\text{ب} = ٢\text{جا ب جتا ب} = ٢\left(\frac{-٣}{٥}\right)\left(\frac{-٤}{٥}\right) = \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$\text{جتا}٢\text{ب} = ٢\text{جتا}^٢\text{ب} - ١ = ٢\left(\frac{-٤}{٥}\right)^٢ - ١ = \frac{٧}{٢٥}$$

$$\frac{\text{جا}٢\text{ب}}{\text{جتا}٢\text{ب}} = \frac{٢٤}{٧}$$

⑮ $٥ \text{ جا أ} = ٣$ ، $\text{جا أ} = \frac{٣}{٥}$

، أ زاوية حادة

$$\text{جتا}(٢\text{أ} + ٩٠^\circ) = -\text{جا }٢\text{أ} = -٢\text{جا أ جتا أ}$$

$$= -٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{-٢٤}{٢٥}$$

، $$\text{جتا }٢\text{أ} = ١ - ٢\text{جا}^٢\text{أ} = ١ - ٢\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٧}{٢٥}$$

⑯ $$\text{ظا}(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا }٢\text{ب}}{١ - \text{ظا أ ظا }٢\text{ب}}$$

، ∵ $$\text{ظا }٢\text{ب} = \frac{٢\text{ظا ب}}{١ - \text{ظا}^٢\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{٩}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

∴ $$\text{ظا}(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{٢٥}{٢٥} = ١$$

⑰ $\text{ظا أ} = \frac{٤}{٣}$ ، $\text{جا أ} = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{جتا أ} = \frac{٣}{٥}$

$\text{جا ب} = \frac{١}{\sqrt{٨٢}}$ ، $\text{جتا ب} = \frac{٩}{\sqrt{٨٢}}$

$$\text{ظا }٢\text{ب} = \frac{٢\text{ظا ب}}{١ - \text{ظا}^٢\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٩}}{١ - \frac{١}{٨١}} = \frac{٩}{٤٠}$$

$$\text{ظا}(\text{أ} - ٢\text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا }٢\text{ب}}{١ + \text{ظا أ ظا }٢\text{ب}} = \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{٩}{٤٠}}{١ + \frac{٤}{٣} \times \frac{٩}{٤٠}} = \frac{١٣٣}{١٥٦}$$

$$\text{جتا }٢\text{ب} = ٢\text{جتا}^٢\text{ب} - ١ = ٢ \times \frac{٨١}{٨٢} - ١ = \frac{٤٠}{٤١}$$

⑱ $$\frac{١ + \text{جا }٢\text{أ}}{١ + \text{جتا }٢\text{أ}} = \frac{١ + ٢\text{جا أ جتا أ}}{١ + (٢\text{جتا}^٢\text{أ} - ١)}$$

$$= \frac{١ + ٢\text{جا أ جتا أ}}{٢\text{جتا}^٢\text{أ}}$$

$$= \frac{١ + ٢ \times \frac{١}{\sqrt{١٠}} \times \frac{٣}{\sqrt{١٠}}}{٢\left(\frac{٣}{\sqrt{١٠}}\right)^٢} = \frac{١ + \frac{٦}{١٠}}{٢ \times \frac{٩}{١٠}} = \frac{١٦}{١٨} = \frac{٨}{٩}$$

⑲ ∵ أ تقع في الربع الأول:

∴ $\text{جا أ} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، $\text{جتا أ} = \frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

∵ ب تقع في الربع الثاني:

∴ $\text{جتا ب} = \frac{-٣}{٥}$ ، $\text{ظا ب} = \frac{-٤}{٣}$

$$\text{جتا }٢\text{أ} = ٢\text{جتا}^٢\text{أ} - ١ = ٢ \times \frac{٩}{١٠} - ١ = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{جا }٢\text{أ} = ٢\text{جا أ جتا أ} = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{١٠}} \times \frac{٣}{\sqrt{١٠}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{ظا }٢\text{أ} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\text{أ}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{جتا}(٢\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتا }٢\text{أ جتا ب} - \text{جا }٢\text{أ جا ب}$$

$$= \frac{٤}{٥} \times \frac{-٣}{٥} - \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{-٢٤}{٢٥}$$

∴ $$\text{قا}(٢\text{أ} + \text{ب}) = \frac{-٢٥}{٢٤}$$

$$\text{جا}(٢\text{أ} - \text{ب}) = \text{جا }٢\text{أ جتا ب} - \text{جتا }٢\text{أ جا ب}$$

$$= \frac{٣}{٥} \times \frac{-٣}{٥} - \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = -١$$

$$\text{قتا}(٢\text{أ} - \text{ب}) = -١$$

$$\text{ظتا}(٢\text{أ} + \text{ب}) = \frac{١ - \text{ظا }٢\text{أ ظا ب}}{\text{ظا }٢\text{أ} + \text{ظا ب}} = \frac{١ - \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣}}{\frac{٣}{٤} + (\frac{-٤}{٣})} = \frac{-٢٤}{٧}$$

⑳ $\text{جتا }٢\text{أ} = ١ - ٢\text{جا}^٢\text{أ}$

∴ $\frac{٧}{٨} = ١ - ٢\text{جا}^٢\text{أ}$ ∴ $٢\text{جا}^٢\text{أ} = ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

∴ $\text{جا}^٢\text{أ} = \frac{١}{١٦}$ ∴ $\text{جا أ} = \frac{١}{٤}$

∴ $$\text{جتا }٤\text{أ} = ٢\text{جتا}^٢٢\text{أ} - ١ = ٢ \times \left(\frac{٧}{٨}\right)^٢ - ١ = \frac{١٧}{٣٢}$$

(٢١) $طا\ ب = \frac{٣}{٤}$

$طا\ ٢ب = \frac{٢طا\ ب}{١-طا^٢ب} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١-\frac{٩}{١٦}} = \frac{٢٤}{٧}$

$\therefore طا\ ب = \frac{٢ \times طا\frac{ب}{٢}}{١-طا^٢\frac{ب}{٢}} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore ٣طا^٢\frac{ب}{٢} + ٨طا\frac{ب}{٢} - ٣ = ٠$

$\therefore (٣طا\frac{ب}{٢} - ١)(طا\frac{ب}{٢} + ٣) = ٠$

$\therefore طا\frac{ب}{٢} = \frac{١}{٣}$ أو $طا\frac{ب}{٢} = -٣$

(٢٢) $ها\ س = \frac{٣}{٥}$

المقدار $= ٢\ هتا\ ٢س - ها\ (١٨٠ - ٢س)$

$= ٢هتا\ ٢س - ها\ ٢س = ٢ \times (\frac{٧}{٢٥}) - ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{-٢}{٥}$

(٢٣) $هتا\ ٢أ = \frac{١١٩}{١٦٩}$

$ها\ أ = \pm\sqrt{\frac{١-هتا\ ٢أ}{٢}} = \sqrt{\frac{١-\frac{١١٩}{١٦٩}}{٢}}$

$ها\ أ = \frac{٥}{١٣}$ لأن $٠° < أ < ٤٥°$

$هتا\ أ = \pm\sqrt{\frac{١+هتا\ ٢أ}{٢}} = \sqrt{\frac{١+\frac{١١٩}{١٦٩}}{٢}}$

$هتا\ أ = \frac{١٢}{١٣}$

$طا\ ٢أ = \frac{١٢٠}{١١٩}$

١٦٩ ، ١٢٠ ، ١١٩ ، ٢أ

(٢٤) $ها\frac{أ}{٢} = \frac{١}{٣}$

$هتا\frac{أ}{٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

$ها\ أ = ٢\ ها\frac{أ}{٢}\ هتا\frac{أ}{٢} = ٢ \times \frac{١}{٣} \times \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$

$هتا\ أ = ١ - ٢\ ها^٢\frac{أ}{٢} = ١ - ٢(\frac{١}{٣})^٢ = \frac{٧}{٩}$

٣ ، ١ ، ٢√٢ ، أ/٢

(٢٥) ① $هتا\ ٢٢°٣٠' = هتا\frac{٤٥°}{٢}$

$\because هتا\frac{أ}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١+هتا\ أ}{٢}}$ بوضع $أ = ٤٥°$

$٠ < ٢٢°٣٠' < ٩٠°$ تقع فى الربع الأول

$\therefore$ قيمة $هتا\frac{أ}{٢}$ موجبة

$\therefore هتا\ ٢٢°٣٠' = +\sqrt{\frac{١+هتا\ ٤٥°}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{١+\frac{\sqrt{٢}}{٢}}{٢} \times \frac{٢}{٢}} = \sqrt{\frac{٢+\sqrt{٢}}{٤}}$

$هتا\ ٢٢°٣٠' = \frac{\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}{٢}$

② $طا\ ٦٧°٣٠' = طا\frac{١٣٥°}{٢}$

$طا\frac{أ}{٢} = \sqrt{\frac{١-هتا\ أ}{١+هتا\ أ}}$ بوضع $أ = ١٣٥°$

$طا\frac{١٣٥°}{٢} = \sqrt{\frac{١-هتا\ ١٣٥°}{١+هتا\ ١٣٥°}} = \sqrt{\frac{١-(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})}{١+(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})} \times \frac{٢}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٢+\sqrt{٢}}{٢-\sqrt{٢}} \times \frac{٢+\sqrt{٢}}{٢+\sqrt{٢}}}$

$= \sqrt{\frac{٤+٤\sqrt{٢}+٢}{٤-٢}} = \sqrt{\frac{٦+٤\sqrt{٢}}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٢(٣+٢\sqrt{٢})}{٢}} = \sqrt{٣+٢\sqrt{٢}}$

③ $ها\ ١٥° = ها\frac{٣٠°}{٢}$

$ها\frac{أ}{٢} = \sqrt{\frac{١-هتا\ أ}{٢}}$ بوضع $أ = ٣٠°$

$ها\ ١٥° = \sqrt{\frac{١-هتا\ ٣٠°}{٢}} = \sqrt{\frac{١-\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢} \times \frac{٢}{٢}}$

$ها\ ١٥° = \sqrt{\frac{٢-\sqrt{٣}}{٤}} = \frac{\sqrt{٢-\sqrt{٣}}}{٢}$

(٢٦) ① الطرف الأيمن $= \frac{ها\ أ}{هتا\ أ} \times ٢ها\ أ\ هتا\ أ = ٢\ ها^٢أ$

= الطرف الأيسر

② الطرف الأيمن $= \frac{ها\ س}{هتا\ س} + \frac{هتا\ س}{ها\ س}$

$= \frac{ها^٢س+هتا^٢س}{ها\ س\ هتا\ س} = \frac{١}{ها\ س\ هتا\ س}$

$= \frac{٢}{ها\ ٢س} = ٢\ قتا\ ٢س$

= الطرف الأيسر

③ الطرف الأيمن $= ٢\ قتا\ ٢هـ = ٢ \times \frac{١}{ها\ ٢هـ}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢ها\ هـ\ هتا\ هـ} = قتا\ هـ\ قا\ هـ$

= الطرف الأيسر

④ الطرف الأيمن $= (هتا^٢و + ها^٢و)(هتا^٢و - ها^٢و)$

$= ١ \times هتا\ ٢و = هتا\ ٢و$

⑤ الطرف الأيمن $= (\frac{ها\ س}{هتا\ س} + \frac{هتا\ س}{ها\ س})$

$\times ٢ها\ س\ هتا\ س$

$= ٢(ها^٢س + هتا^٢س) = ٢$

⑥ الطرف الأيمن $= \frac{١}{ها^٢أ}(١-١+٢ها^٢أ) = ٢$

⑦ الطرف الأيمن $= ١ - \frac{١}{٢} \times ٢\,جا\,أ\,جتا\,أ \times \frac{جا\,أ}{جتا\,أ}$

$= ١ - جا^٢ أ = جتا^٢ أ$

⑧ الطرف الأيمن $= \frac{جتا\,ب}{جا\,ب} - \frac{جا\,ب}{جتا\,ب}$

$= \frac{جتا^٢ ب - جا^٢ ب}{جا\,ب\,جتا\,ب} = \frac{جتا\,٢ب}{\frac{١}{٢}جا\,٢ب}$

$=$ ٢ ظتا ٢ب = الطرف الأيسر

⑨ الطرف الأيمن = قتا ٢س + ظتا ٢س

$= \frac{١}{جا٢س} + \frac{جتا٢س}{جا٢س} = \frac{١+جتا٢س}{جا٢س}$

$= \frac{١+٢جتا^٢س-١}{٢جاس\,جتاس} = \frac{٢جتا^٢س}{٢جاس\,جتاس} = \frac{جتاس}{جاس}$

= ظتا س = الأيسر

∴ ظتا س = قتا ٢س + ظتا ٢س   بوضع س = ١٥°

∴ ظتا ١٥° = قتا (٢ × ١٥°) + ظتا (٢ × ١٥°)

= قتا ٣٠° + ظتا ٣٠° = $٢ + \sqrt{٣}$

⑩ الطرف الأيسر $= \frac{١-ظا^٢س}{١+ظا^٢س}$

$= \frac{١-\frac{جا^٢س}{جتا^٢س}}{١+\frac{جا^٢س}{جتا^٢س}} \times \frac{جتا^٢س}{جتا^٢س}$

$= \frac{جتا^٢س-جا^٢س}{جتا^٢س+جا^٢س} = \frac{جتا٢س}{١} =$ جتا ٢س = الأيمن

∴ جتا ٢س $= \frac{١-ظا^٢س}{١+ظا^٢س}$

بوضع س = ١٥°

∴ جتا ٢ × ١٥° $= \frac{١-ظا^٢ ١٥°}{١+ظا^٢ ١٥°}$

جتا ٣٠° $= \frac{١-ظا^٢ ١٥°}{١+ظا^٢ ١٥°}$ ∴ $\frac{١-ظا^٢ ١٥°}{١+ظا^٢ ١٥°} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑪ الطرف الأيمن $= \frac{جتا٢س}{جتاس-جاس}$

$= \frac{جتا^٢س-جا^٢س}{جتاس-جاس} = \frac{(جتاس-جاس)(جتاس+جاس)}{جتاس-جاس}$

= جتا س + جا س = الأيسر

⑫ الطرف الأيمن $= \frac{١-جتا٢أ}{٣+جتا٢أ} = \frac{١-(١-٢جا^٢أ)}{٣+٢جتا^٢أ-١}$

$= \frac{١-١+٢جا^٢أ}{٢+٢جتا^٢أ} = \frac{٢جا^٢أ}{٢(١+جتا^٢أ)} = \frac{جا^٢أ}{١+جتا^٢أ}$

= الطرف الأيسر

⑬ الطرف الأيمن $= \frac{جا(\pi-٢هـ)}{١-جتا٢هـ} = \frac{جا٢هـ}{١-(١-٢جا^٢هـ)}$

$= \frac{جا٢هـ}{٢جا^٢هـ} = \frac{٢جاهـ\,جتاهـ}{٢جا^٢هـ} = \frac{جتاهـ}{جاهـ} =$ ظتا هـ

⑭ الطرف الأيسر $= \frac{جتا٢\theta}{١+جا٢\theta}$

$= \frac{جتا^٢\theta-جا^٢\theta}{جا^٢\theta+٢جا\theta\,جتا\theta+جتا^٢\theta}$

حيث $١ = جا^٢\theta + جتا^٢\theta$ ، $جا\,٢\theta = ٢\,جا\theta\,جتا\theta$

$= \frac{(جتا\theta-جا\theta)(جتا\theta+جا\theta)}{(جا\theta+جتا\theta)^٢}$

$= \frac{جتا\theta-جا\theta}{جا\theta+جتا\theta}$

بالقسمة بسطاً ومقاماً على جا θ

$= \frac{\frac{جتا\theta}{جا\theta}-\frac{جا\theta}{جا\theta}}{\frac{جتا\theta}{جا\theta}+\frac{جا\theta}{جا\theta}} = \frac{ظتا\theta-١}{ظتا\theta+١}$

∴ $\frac{ظتا\theta-١}{ظتا\theta+١} = \frac{جتا٢\theta}{١+جا٢\theta}$ بوضع $\theta = ٢٢°٣٠'$

∴ $\frac{ظتا\,٢٢°٣٠' - ١}{ظتا\,٢٢°٣٠' + ١} = \frac{جتا٢(٢٢°٣٠')}{١+جا٢(٢٢°٣٠')} = \frac{جتا\,٤٥°}{١+جا\,٤٥°}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١+\frac{\sqrt{٢}}{٢}} \times \frac{٢}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢+\sqrt{٢}} \times \frac{٢-\sqrt{٢}}{٢-\sqrt{٢}}$

$= \frac{٢\sqrt{٢}-٢}{٤-٢} = \frac{٢(\sqrt{٢}-١)}{٢} = \sqrt{٢}-١$

⑮ الطرف الأيمن $= \frac{١-جتاهـ+جاهـ}{١+جتاهـ+جاهـ}$

$= \frac{١-جتا٢(\frac{هـ}{٢})+جا٢(\frac{هـ}{٢})}{١+جتا٢(\frac{هـ}{٢})+جا٢(\frac{هـ}{٢})}$

$= \frac{١-١+٢جا^٢\frac{هـ}{٢}+٢جا\frac{هـ}{٢}جتا\frac{هـ}{٢}}{١+٢جتا^٢\frac{هـ}{٢}-١+٢جا\frac{هـ}{٢}جتا\frac{هـ}{٢}}$

$= \frac{٢جا\frac{هـ}{٢}(جا\frac{هـ}{٢}+جتا\frac{هـ}{٢})}{٢جتا\frac{هـ}{٢}(جتا\frac{هـ}{٢}+جا\frac{هـ}{٢})}$

$= \frac{جا\frac{هـ}{٢}}{جتا\frac{هـ}{٢}} = ظا\frac{هـ}{٢} =$ الأيسر

⑯ الطرف الأيمن $= ٢\,جا^٢\,٢أ + جتا\,٤أ$

$= ٢\,جا^٢\,٢أ + (١-٢جا^٢\,٢أ) = ١$

⑰ الطرف الأيمن = ٢ جتا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{٣\text{س}}{٢}\right)$

= جتا ٢ $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{٣\text{س}}{٢}\right)$ + ١ = جتا (٩٠° − ٣س) + ١

= جا ٣س + ١ = الأيسر

---

⑱ الطرف الأيسر = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢أ)

= $\frac{١}{٢}$ (١ + ٢ جتا^{٢} أ − ١)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ جتا^{٢} أ = جتا^{٢} أ = الأيمن

∴ جتا^{٢} أ = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢أ)   بوضع أ = ١٥°

جتا^{٢} ١٥° = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ × ١٥°)

= $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ $\left(١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢}\right)$

جتا^{٢} ١٥° = $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٤}$ بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

جتا ١٥° = $\frac{\sqrt{٢ + \sqrt{٣}}}{٢}$

---

⑲ الطرف الأيمن = $\frac{٢\,\text{جا أ} - \text{جا ٢أ}}{\text{جا}^{٣}\,\text{أ}}$

= $\frac{٢\,\text{جا أ} - ٢\,\text{جا أ جتا أ}}{\text{جا}^{٣}\,\text{أ}}$ = $\frac{٢\,\text{جا أ}(١ - \text{جتا أ})}{\text{جا}^{٣}\,\text{أ}}$

= $\frac{٢(١ - \text{جتا}\,٢(\frac{\text{أ}}{٢}))}{\text{جا}^{٢}\,\text{أ}}$ = $\frac{٢(١ - ١ + ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢})}{٤\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$

= $\frac{٤\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}{٤\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$ = قا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = الأيسر

---

⑳ الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا ٢س}}{١ + \text{جتا ٢س}}$

= $\frac{٢\,\text{جاس جتاس}}{١ + ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١}$ = $\frac{٢\,\text{جاس جتاس}}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

= $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = طا س = الأيسر

---

(٢٧) ٤ جتا ٢هـ − ٣ جا ٢هـ = ٠

٤(جتا^{٢} هـ − جا^{٢} هـ) − ٣ × ٢ جا هـ جتا هـ = ٠

٤ جتا^{٢} هـ − ٦ جا هـ جتا هـ − ٤ جا^{٢} هـ = ٠   (÷ ٢)

٢ جتا^{٢} هـ − ٣ جا هـ جتا هـ − ٢ جا^{٢} هـ = ٠

(٢ جتا هـ + جا هـ)(جتا هـ − ٢ جا هـ) = ٠

إما ٢ جتا هـ = − جا هـ أو جتا هـ = ٢ جا هـ (÷ جتا هـ)

٢ = $\frac{-\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، طا هـ = −٢ (مرفوض)

١ = ٢ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، $\frac{١}{٢}$ = طا هـ

---

(٢٨) ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣

= ٤ جا $\left(٢\left(\frac{\text{هـ}}{٢}\right)\right)$ + ٣ جتا $\left(٢\left(\frac{\text{هـ}}{٢}\right)\right)$

= ٣ $\left(\text{جا}^{٢}\frac{\text{هـ}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\frac{\text{هـ}}{٢}\right)$

= ٤ × ٢ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ + ٣ $\left(\text{جتا}^{٢}\frac{\text{هـ}}{٢} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{هـ}}{٢}\right)$

= ٣ جا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$ + ٣ جتا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$

٨ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ + ٣ جتا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$ − ٣ جا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$ − ٣ جا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$

− ٣ جتا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ٠

٨ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ − ٦ جا^{٢} $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ٠

٢ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ $\left(٤\,\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢} - ٣\,\text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢}\right)$ = ٠

إما جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ٠

∴ $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ٠

مرفوض لأن هـ زاوية حادة موجبة

أو ٤ جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ٣ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

$\frac{٤\,\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}}{٣\,\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}}$ = $\frac{٣\,\text{جا}\frac{\text{هـ}}{٢}}{٣\,\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢}}$

$\frac{٤}{٣}$ = طا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

---

(٢٩) ① ٢ جا س جتا س = جا س

٢ جا س جتا س − جا س = ٠

جا س (٢ جتا س − ١) = ٠

إما جا س = ٠   أو   جتا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٠   أو   س = $\frac{\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ قيم س التي تحقق المعادلة هي:

$\frac{\pi}{٣}$ ، π ، $\frac{٥\pi}{٣}$

---

② جا ٢س = جتا س

٢ جا س جتا س − جتا س = ٠

جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

إما جتا س = ٠   أو   جا س = $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٢}$ أو   س = $\frac{\pi}{٦}$

أو س = $\frac{٣\pi}{٢}$ أو   س = $\frac{٥\pi}{٦}$

∴ قيم س التي تحقق المعادلة : $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

---

③ جتا^{٢} س − جا^{٢} س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا ٢س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

إما جتا ٢س = جتا $\left(\frac{\pi}{٤} + ٢\,\text{ن}\,\pi\right)$

أو جتا ٢س = جتا $\left(\frac{٧\pi}{٨} + ٢\,\text{ن}\,\pi\right)$ حيث ن ∈ ص

أما ٢س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢ن π (÷٢)

∴ س = $\frac{\pi}{8}$ + ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

∴ س = $\frac{\pi}{8}$ ، س = $\frac{9}{8}$ π

أو ٢س = $\frac{7\pi}{4}$ + ٢ن π (÷٢)

∴ س = $\frac{7\pi}{8}$ + ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

س = $\frac{7\pi}{8}$ ، س = $\frac{15}{8}$ π

---

④ ١ - ٢ جتا^2 س = $\frac{1}{2}$ ∴ - جتا ٢س = $\frac{1}{2}$

∴ جتا ٢س = $\frac{-1}{2}$

أما جتا ٢س = جتا ($\frac{2\pi}{3}$ + ٢ن π)

أو جتا ٢س = جتا ($\frac{4\pi}{3}$ + ٢ن π)   حيث ن ∈ ص

∴ ٢س = $\frac{2\pi}{3}$ + ٢ن π   أو ٢س = $\frac{4\pi}{3}$ + ٢ن π

إذا كان ٢س = ٢ $\frac{\pi}{3}$ + ٢ن π (÷٢)

∴ س = $\frac{\pi}{3}$ + ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

∴ س = $\frac{\pi}{3}$ ، س = $\frac{4}{3}$ π

إذا كان ٢س = $\frac{4\pi}{3}$ + ٢ن π (÷٢)

∴ س = $\frac{2\pi}{3}$ + ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

∴ س = $\frac{2\pi}{3}$ ، س = $\frac{5\pi}{3}$

∴ قيم س هي: $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$

---

⑤ جا^2 ٢س + ٢ جا ٢س + ١ = ٠

(جا ٢س + ١)^2 = ٠   ∴ جا ٢س + ١ = ٠

جا ٢س = -١

جا ٢س = جا ($\frac{3\pi}{2}$ + ٢ن π)

٢س = $\frac{3\pi}{2}$ + ٢ن π (÷٢)

س = $\frac{3\pi}{4}$ + ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

س = $\frac{3\pi}{4}$ ، س = $\frac{7\pi}{4}$

∴ قيم س هي: $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$

---

⑥ جتا^2 ٢س - ٢ جتا ٢س + ١ = ٠

(جتا ٢س - ١)^2 = ٠   ∴ جتا ٢س = ١

جتا ٢س = جتا (صفر + ٢ن π)

٢س = ٢ن π (÷٢)   ∴ س = ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

س = ٠ ، ن = π

∴ قيم س هي: π

---

⑦ جتا ٢س + ٣ جا س = ٢

١ - ٢ جا^2 س + ٣ جا س = ٢

٢ جا^2 س - ٣ جا س + ١ = ٠

(٢ جا س - ١)(جا س - ١) = ٠

أما جا س = $\frac{1}{2}$ أو جا س = ١

أما جا س = $\frac{1}{2}$

جا س = جا ($\frac{\pi}{6}$ + ٢ن π)

س = $\frac{\pi}{6}$ + ٢ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

س = $\frac{\pi}{6}$ ، س = $\frac{13}{6}$ π > ٢π (مرفوض)

جا س = جا ($\frac{5\pi}{6}$ + ٢ن π)   ∴ س = $\frac{5\pi}{6}$

أو جا س = ١

جا س = جا ($\frac{\pi}{2}$ + ٢ن π)

س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ن π

عندما ن = ٠ أو ن = ١

س = $\frac{\pi}{2}$ س = $\frac{5}{2}$ π > ٢π (مرفوض)

∴ قيم س هي: $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$

---

⑧ ٢(٢ جا $\frac{س}{2}$ جتا $\frac{س}{2}$) + $\sqrt{3}$ = ٠

٢ جا ٢($\frac{س}{2}$) + $\sqrt{3}$ = ٠   ∴ ٢ جا س = $-\sqrt{3}$

جا س = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

أما جا س = جا ($\frac{4\pi}{3}$ + ٢ن π) أو

جا س = جا ($\frac{5\pi}{3}$ + ٢ن π)

∴ س = $\frac{4\pi}{3}$ + ٢ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

∴ س = $\frac{4\pi}{3}$ ، س = $\frac{8}{3}$ π > ٢π (مرفوض)

∴ س = $\frac{٥\pi}{٣}$ + ٢ن π

عندما ن = ٠ ، ن = ١

∴ س = $\frac{٥\pi}{٣}$ ، س = $\frac{١٧}{٩}\pi$ > ٢π (مرفوض)

∴ قيم س هي: $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

---

(٩) ظا^{٢} س + ٢ $\sqrt{٣}$ ظا س = ١

٢ $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ − ظا^{٢} س

$\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{س}} = \sqrt{٣}$ ∴ ظا ٢س = $\sqrt{٣}$

ظا موجبة في كل من الربعين الأول والثالث

في الربع الأول: ٢س = $\frac{\pi}{٣}$ (÷٢) ∴ س = $\frac{\pi}{٦}$

في الربع الثالث: ٢س = π + $\frac{\pi}{٦}$ = ٧ $\frac{\pi}{٦}$ (÷٢)

س = $\frac{٧}{١٢}\pi$ ∴ قيم س هي: $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٧}{١٢}\pi$

---

(١٠) ∵ ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١

∴ ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ − ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{٢ \text{ ظا } \frac{س}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢} \frac{س}{٢}} = ١$ ∴ ظا س = ١

(ظا س موجب في كل من الربعين الأول والثالث

في الربع الأول: س = $\frac{\pi}{٤}$

في الربع الثالث: س = π + $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٥\pi}{٤}$

∴ قيم س التي تحقق المعادلة هي: $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

---

(١١) جتا س − ٢ جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س = ٠

١ − ٢ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ − ٢ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ٠

١ − ٤ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ٠ ∴ ٤ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ١ (÷٤)

جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ باخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

∴ جا $\frac{س}{٢}$ = ± $\frac{١}{٢}$ إما جا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

جا $\frac{س}{٢}$ = جا ($\frac{\pi}{٦}$ + ٢ن π) ∴ $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ن π

أو $\frac{س}{٢}$ = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ن π عندن = صفر ، ن = ١

$\frac{س}{٢}$ = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{س}{٢}$ = $\frac{٥\pi}{٦}$

س = $\frac{\pi}{٣}$ ، س = $\frac{٧\pi}{٣}$ > ٢π (مرفوض)

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ أو جا $\frac{س}{٢}$ = − $\frac{١}{٢}$

جا $\frac{س}{٢}$ = ($\frac{٧\pi}{٦}$ + ٢ن π) ، $\frac{١١\pi}{٦}$ + ٢ن π

∴ $\frac{س}{٢}$ = $\frac{٧\pi}{٦}$ + ٢ن π

عند ن = ٠ ، ن = ١

∴ $\frac{س}{٢}$ = $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١١}{٦}\pi$

س = $\frac{٧\pi}{٣}$ ، س = $\frac{١١}{٣}\pi$ > ٢π (مرفوض)

∴ قيم س هي: $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

---

(٣٠) جا ٣س جتا س + جتا ٣س جا س = جا (٣س + س)

= جا ٤س = ٢ جا ٢س جتا ٢س

∵ جتا^{٢} ٢س = ١ − جا^{٢} ٢س

∴ جتا^{٢} ٢س = ١ − $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ جتا ٢س = ± $\sqrt{\frac{٢٤}{٢٥}}$ = ± $\frac{٢}{٥}\sqrt{٦}$

∴ المقدار = ٢ × $\frac{١}{٥}$ × (± $\frac{٢}{٥}\sqrt{٦}$) = ± $\frac{٤}{٢٥}\sqrt{٦}$

---

(٣١) الأيسر = $\frac{١}{٢}$ (١ + ٢ جتا^{٢} أ − ١) = جتا^{٢} أ

∴ جتا^{٢} ١٥° = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ (١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

= $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٤}$

∴ جتا ١٥° = $\frac{\sqrt{٢ + \sqrt{٣}}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

---

(٣٢) الطرف الأيمن = $\frac{١ - \text{جتا ب}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\frac{ب}{٢})}{٢\text{جا}\frac{ب}{٢}\text{جتا}\frac{ب}{٢}}$

= $\frac{٢\text{جا}^{٢}\frac{ب}{٢}}{٢\text{جا}\frac{ب}{٢}\text{جتا}\frac{ب}{٢}}$ = $\frac{\text{جا}\frac{ب}{٢}}{\text{جتا}\frac{ب}{٢}}$ = ظا $\frac{ب}{٢}$

ظا ٧٥° = $\frac{١ - \text{جتا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٥٠°}$

∵ جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٧٥° = $\frac{١ - (\frac{-\sqrt{٣}}{٢})}{\frac{١}{٢}}$ = (٢ + $\sqrt{٣}$)

---

(٣٣) ٤ جتا أ = $\frac{١}{\text{جا أ}}$ ⟸ ٤ جا أ جتا أ = ١ ⟸ ٢ × ٢ جا أ = ١

∴ جا ٢أ = $\frac{١}{٢}$ ، ٢أ = ٣٠°

∴ أ = ١٥° أو ٢أ = ١٥٠° ∴ أ = ٧٥°

---

(٣٤) جا ب جتا ب (جتا^{٢} ب − جا^{٢} ب) = $\frac{١}{٤}$

∴ $\frac{١}{٢}$ جا ٢ب × جتا ٢ب = $\frac{١}{٤}$ بالضرب × ٤

∴ ٢ جا ٢ب جتا ٢ب = ١ ∴ جا ٤ب = ١

∵ جا ٩٠° = ١ ، ∴ ٤ب = ٩٠°

∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ٢٢° ، ∴ جتا ٤ب = جتا ٩٠° = صفر

---

(٣٥) $\text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{أ}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{٣}{٤}$

$\text{ظا (٢أ + ب)} = \frac{\text{ظا ٢أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا ٢أ ظا ب}} = \frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٧}}{١ - \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٧}} = ١$

∴ ٢أ + ب = ٤٥°

---

(٣٦) $\text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{أ}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{٣}{٤}$

$\text{ظا (٢أ + ب)} = \frac{\text{ظا ٢أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا ٢أ ظا ب}}$

$\frac{\frac{٣}{٤} + \text{ظا ب}}{١ - \frac{٣}{٤} \times \text{ظا ب}} = ١$ ∴ $\frac{٣}{٤}$ + ظا ب = ١ - $\frac{٣}{٤}$ ظا ب

∴ $\frac{٧}{٤}$ ظا ب = $\frac{١}{٤}$ ∴ ظا ب = $\frac{١}{٧}$

---

(٣٧) أ ، ب ، جـ قياسات زوايا Δ

∵ أ + ب + جـ = ١٨٠° ∴ أ + ب = ١٨٠° - جـ

∴ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}} = \frac{١ + ٢}{١ - ٢} = \text{- ظا جـ}$

∴ ظا جـ = ٣

$\text{ظا ٢جـ} = \frac{\text{٢ظا جـ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{جـ}} = \frac{٢ \times ٣}{١ - ٩} = \frac{-٣}{٤}$

---

(٣٨) ∵ جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، أ تقع في الربع الأول

∴ جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا أ = $\frac{٣}{٤}$

جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

جتا ٢أ = جتا²أ - جا²أ = $\frac{١٦}{٢٥}$ - $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

ظا ٢أ = $\frac{\text{جا ٢أ}}{\text{جتا ٢أ}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ × $\frac{٢٥}{٧}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

ظا (١٨٠° - ٢أ) = - ظا ٢أ = $\frac{-٢٤}{٧}$

جا (٢أ - ٩٠°) = - جتا ٢أ = $\frac{-٧}{٢٥}$

جتا (٢أ - ٣٦٠°) = جتا ٢أ = $\frac{٧}{٢٥}$

---

(٣٩) $\text{أ} = \frac{\text{٢ظا س}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{س}}$ ⇐ ∴ أ(١ - ظا²س) = ٢ظا س

∴ أ(١ - ب²) = ٢ب

---

(٤٠) ① $\text{ن} = \frac{\text{٢ع}^{٢}\text{ جا}\theta\text{ جتا}\theta}{\text{د}}$

$\text{ن} = \frac{\text{ع}^{٢}\text{(٢جا}\theta\text{ جتا}\theta\text{)}}{\text{د}}$ ∴ $\text{ن} = \frac{\text{ع}^{٢}\text{ جا٢}\theta}{\text{د}}$

② عندما ع = ١٤,٧ م/ث ، θ = ٣٠°

∴ $\text{ن} = \frac{(١٤,٧)^{٢} \times \text{جا ٢(٣٠)}^{\circ}}{٩,٨}$ ≃ ١٩ متر

---

(٤١) ① جتا ٧٢° = ٢ جتا² ٣٦° - ١

$= ٢\left(\frac{\sqrt{٥}+١}{٤}\right)^{٢} - ١ = \frac{\sqrt{٥}+٣}{٤} - ١ = \frac{\sqrt{٥}-١}{٤}$

---

② ∵ جا²أ + جا²ب = ١

جا²أ + ١ - جتا²ب = ١

جا²أ = جتا²ب ⇐ جا أ = جتا ب

∴ أ + ب = ٩٠° ⇐ جـ = ٩٠°

∴ جتا ٢جـ = جتا ١٨٠° = -١

---

③ $\text{ظا ٢س} = \frac{\text{٢ظا س}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{س}} = \frac{٣}{٤}$

٨ ظا س = ٣ - ٣ ظا²س

٣ ظا²س + ٨ ظا س - ٣ = ٠

(٣ ظا س - ١)(ظا س + ٣) = ٠

إما ظا س = $\frac{١}{٣}$ أو ظا س = -٣ (مرفوض)

∴ جا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ = $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$

---

④ $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا ٢س}} + \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا ٢س}} = ٧$

$\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٢س + جتا}^{٢}\text{ ٢س}}{\text{جتا ٢س جا ٢س}} = ٧$

$\frac{٢}{٢} \times \frac{١}{\text{جتا ٢س جا ٢س}} = ٧$

$\frac{٢}{\text{جا ٤س}} = ٧$ ∴ جا ٤س = $\frac{٢}{٧}$

---

⑤ جتا هـ - جا هـ = $\frac{١}{٢}$ بتربيع الطرفين

جتا²هـ + جا²هـ - ٢ جتا هـ جا هـ = $\frac{١}{٤}$

١ - جا ٢هـ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ جا ٢هـ = $\frac{٣}{٤}$

جا (١٨٠° + ٢هـ) = - جا ٢هـ = - $\frac{٣}{٤}$

⑥ $$\frac{2\,\text{جا}\frac{أ}{2}\,\text{جتا}\frac{أ}{2}}{1+2\,\text{جتا}^2\frac{أ}{2}-1}=\frac{2\,\text{جا}\frac{أ}{2}\,\text{جتا}\frac{أ}{2}}{2\,\text{جتا}^2\frac{أ}{2}}=\frac{\text{جا}\frac{أ}{2}}{\text{جتا}\frac{أ}{2}}=\text{ظا}\,\frac{أ}{2}$$

⑦ $$\text{جتا}^2\text{س}-\text{جا}^2\text{س}=\text{جا}\,2\text{س}=\frac{4}{5}$$

$$\text{جا س جتا }3\text{س}+\text{جتا س جا }3\text{س}=\text{جا }4\text{س}$$

$$=2\,\text{جا }2\text{س جتا }2\text{س}$$

$$=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(42) بتربيع الطرفين

$$\therefore \text{جا}^2أ+\text{جتا}^2أ-2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ=\frac{1}{7}$$

$$1-2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ=\frac{1}{7} \qquad \text{جا}\,2أ=\frac{6}{7}$$

$$\because أ\in\,]45^\circ ، 90^\circ[\qquad \therefore 2أ\in\,]90^\circ ، 180^\circ[$$

$$\therefore \text{جتا}\,2أ=\frac{-\sqrt{13}}{7}$$

$$\text{ظا}\,2أ=\frac{-6}{\sqrt{13}}=\frac{-6\sqrt{13}}{13}$$

(43) $$\text{جا}\,أ=\frac{24}{25} \quad ، \quad \text{جتا}\,ب=\frac{4}{5}$$

$$2\,\text{جا}^2\frac{أ}{2}=1-\text{جتا}\,أ=1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$$

$$\therefore \text{جا}^2\frac{أ}{2}=\frac{9}{25} \qquad \therefore \text{جا}\frac{أ}{2}=\frac{3}{5}$$

$$\text{جتا}\left(\frac{أ}{2}+ب\right)=\text{جتا}\frac{أ}{2}\,\text{جتا}\,ب-\text{جا}\frac{أ}{2}\,\text{جا}\,ب$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$$

$$\text{جتا}(أ+ب)=\text{جتا}\,أ\,\text{جتا}\,ب-\text{جا}\,أ\,\text{جا}\,ب$$

$$=\frac{7}{25}\times\frac{4}{5}-\frac{24}{25}\times\frac{3}{5}=\frac{-44}{125}$$

$$\text{جتا}(أ+ب)=2\,\text{جتا}^2\left(\frac{أ+ب}{2}\right)-1$$

$$2\,\text{جتا}^2\left(\frac{أ+ب}{2}\right)=\text{جتا}(أ+ب)+1$$

$$=\frac{-44}{125}+1=\frac{81}{125}$$

$$\therefore \text{جتا}^2\left(\frac{أ+ب}{2}\right)=\frac{81}{250}$$

$$\therefore \text{جتا}\left(\frac{أ+ب}{2}\right)=\frac{9}{5\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{50}$$

(44) بالضرب × 2

$$\therefore 2\,\text{جا س جتا س}=\frac{3}{5} \qquad \therefore \text{جا}\,2\text{س}=\frac{3}{5}$$

$$\text{جتا}\,(2\text{س}+90^\circ)=-\,\text{جا}\,2\text{س}=\frac{-3}{5}$$

$$\text{جا}\,(360^\circ-2\text{س})=-\,\text{جا}\,2\text{س}=\frac{-3}{5}$$

(45) الطرف الأيمن $$=\frac{2\,\text{ظا}\,هـ}{\text{قا}^2\,هـ}=\frac{2\,\text{جا}\,هـ}{\text{جتا}\,هـ}\times\text{جتا}^2\,هـ$$

$$=2\,\text{جا}\,هـ\,\text{جتا}\,هـ=\text{جا}\,2هـ$$

$$\sqrt{2}\times\frac{2\,\text{ظا}\,22.5^\circ}{1+\text{ظا}^2\,22.5^\circ}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

(46) الأيمن $$=\frac{\text{جا}\,أ+2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}{(1+\text{جتا}\,2أ)+\text{جتا}\,أ}=\frac{\text{جا}\,أ(1+2\,\text{جتا}\,أ)}{2\,\text{جتا}^2أ+\text{جتا}\,أ}$$

$$=\frac{\text{جا}\,أ(1+2\,\text{جتا}\,أ)}{\text{جتا}\,أ(2\,\text{جتا}\,أ+1)}=\text{ظا}\,أ$$

∴ المقدار $=\text{ظا}\,45^\circ=1$

(47) الأيمن $$=\frac{1-\text{ظا}^2أ}{\text{قا}^2أ}=\left(1-\frac{\text{جا}^2أ}{\text{جتا}^2أ}\right)\times\text{جتا}^2أ$$

$$=\text{جتا}^2أ-\text{جا}^2أ=\text{جتا}\,2أ$$

$$\frac{1-\text{ظا}^2\frac{\pi}{12}}{1+\text{ظا}^2\frac{\pi}{12}}=\text{جتا}\frac{\pi}{6}=\text{جتا}\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(48) $$\frac{\text{جتا}\,2أ}{1+\text{جا}\,2أ}=\frac{\text{جتا}^2أ-\text{جا}^2أ}{1+2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}$$

$$=\frac{(\text{جتا}أ-\text{جا}أ)(\text{جتا}أ+\text{جا}أ)}{(\text{جا}^2أ+\text{جتا}^2أ)+2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}$$

$$=\frac{(\text{جتا}أ-\text{جا}أ)(\text{جتا}أ+\text{جا}أ)}{(\text{جتا}أ+\text{جا}أ)^2}$$

$$=\frac{\text{جتا}أ-\text{جا}أ}{\text{جتا}أ+\text{جا}أ}$$ بقسمة حدي الكسر على جتا أ

$$=\frac{1-\text{ظا}أ}{1+\text{ظا}أ}$$

(49) الأيمن $$=\frac{1}{\text{جا}\,2أ}+\frac{\text{جتا}\,2أ}{\text{جا}\,2أ}=\frac{1+\text{جتا}\,2أ}{\text{جا}\,2أ}$$

$$=\frac{2\,\text{جتا}^2أ}{2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}=\frac{\text{جتا}أ}{\text{جا}أ}=\text{ظتا}\,أ=$$ الأيسر

(50) بضرب بسط ومقام الطرف الأيمن × (جتا أ − جا أ)

$$\frac{(\text{جتا}أ-\text{جا}أ)^2}{(\text{جتا}أ+\text{جا}أ)(\text{جتا}أ-\text{جا}أ)}$$

$$=\frac{\text{جتا}^2أ+\text{جا}^2أ-2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}{\text{جتا}^2أ-\text{جا}^2أ}$$

$$=\frac{1-2\,\text{جا}\,أ\,\text{جتا}\,أ}{\text{جتا}^2أ-\text{جا}^2أ}=\frac{1-\text{جا}\,2أ}{\text{جتا}\,2أ}$$

$$=\frac{1}{\text{جتا}\,2أ}-\frac{\text{جا}\,2أ}{\text{جتا}\,2أ}=\text{قا}\,2أ-\text{ظا}\,2أ$$

(51) الأيسر $$=\frac{\text{جا}ب}{1+\text{جتا}ب}=\frac{2\,\text{جا}\frac{ب}{2}\,\text{جتا}\frac{ب}{2}}{1+2\,\text{جتا}^2\frac{ب}{2}-1}=\frac{\text{جا}\frac{ب}{2}}{\text{جتا}\frac{ب}{2}}=\text{ظا}\,\frac{ب}{2}$$

(٥٢) بتوحيد المقامات

∴ الطرف الأيمن = $\frac{جا ٣ب جتا ب - جتا ٣ب جا ب}{جا ب جتا ب}$

$= ٢ \times \frac{جا (٣ب - ب)}{٢ جا ب جتا ب} = \frac{٢ جا ٢ب}{جا ٢ب} = ٢$ = الطرف الأيسر

(٥٣) الأيمن $= ١ + ظا^٢ أ - ٢ ظا أ = قا^٢ أ - ٢ ظا أ$

$= \frac{١}{جتا^٢ أ} - ٢ \frac{جا أ}{جتا أ} = \frac{١ - ٢ جا أ جتا أ}{جتا^٢ أ} = \frac{١ - جا ٢أ}{جتا^٢ أ}$

(٥٤) $جتا ٢أ = ٢ جتا^٢ أ - ١$

$جتا ٤أ = ٢ جتا^٢ ٢أ - ١ = ٢(٢ جتا^٢ أ - ١)^٢ - ١$

$= ٢(٤ جتا^٤ أ - ٤ جتا^٢ أ + ١) - ١$

$= ٨ جتا^٤ أ - ٨ جتا^٢ أ + ١$ ∵ $جا أ = \frac{١}{٢}$

∴ $جتا أ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $جتا ٤أ = ٨ \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٤ - ٨ \times \frac{٣}{٤} + ١ = \frac{-١}{٢}$

(٥٥) ∵ $ظا ٣٠° = \frac{٢ ظا ١٥°}{١ - ظا^٢ ١٥°}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢ ظا ١٥°}{١ - ظا^٢ ١٥°}$

$٢\sqrt{٣} ظا ١٥° = ١ - ظا^٢ ١٥°$

∴ $ظا^٢ ١٥° + ٢\sqrt{٣} ظا ١٥° = ١$

(٥٦) $ظا ٢ص = \frac{٢ ظا ص}{١ - ظا^٢ ص} = \frac{٢ \times \frac{١}{٤}}{١ - \frac{١}{١٦}} = \frac{٨}{١٥}$

∵ $س - ٢ص = ١٨٠°$ ⇐ $س = ١٨٠° + ٢ص$

∴ $ظا س = ظا (١٨٠° + ٢ص) = ظا ٢ص = \frac{٨}{١٥}$

$ظا (س + ص) = \frac{ظا س + ظا ص}{١ - ظا س ظا ص} = \frac{\frac{٨}{١٥} + \frac{١}{٤}}{١ - \frac{٨}{١٥} \times \frac{١}{٤}} = \frac{٤٧}{٥٢}$

∴ $ظتا (س + ص) = \frac{٥٢}{٤٧}$

∴ $\frac{٤٧}{١٣} ظتا (س + ص) = \frac{٤٧}{١٣} \times \frac{٥٢}{٤٧} = ٤$

(٥٧) $جا ٣أ = جا (٢أ + أ) = جا ٢أ جتا أ + جتا ٢أ جا أ$

$= ٢ جا أ جتا أ جتا أ + (١ - ٢ جا^٢ أ) جا أ$

$= ٢ جا أ جتا^٢ أ + جا أ - ٢ جا^٣ أ$

$= ٢ جا أ (١ - جا^٢ أ) + جا أ - ٢ جا^٣ أ$

$= ٢ جا أ - ٢ جا^٣ أ + جا أ - ٢ جا^٣ أ = ٣ جا أ - ٤ جا^٣ أ$

تمارين (٤) على صيغة هيرون

(١) ① -٢ ② $٥٥°$ ③ $\frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠}$ ④ $\frac{٣}{٢}$

⑤ أ تقع فى الربع الأول

(٥ ، ٣ ، ٤ ، أ)

$جا أ = \frac{٣}{٥}$

$ظا أ = \frac{٣}{٤}$

$جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$ظا ٢أ = \frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - (\frac{٣}{٤})^٢}$

$ظا ٢أ = \frac{٢٤}{٧}$

$ظا ٤أ = \frac{٢ ظا ٢أ}{١ - ظا^٢ ٢أ} = \frac{٢ \times \frac{٢٤}{٧}}{١ - (\frac{٢٤}{٧})^٢} = \frac{-٣٣٦}{٥٢٧}$

$جا ٢أ = \sqrt{\frac{١ - جتا أ}{٢}} = \sqrt{\frac{١ - \frac{٣}{٥}}{٢}} = \frac{\sqrt{٥}}{٥}$

⑥ (أ) $جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°)$

$= جتا ٤٥° جتا ٣٠° - جا ٤٥° جا ٣٠°$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

(ب) $ظا ٥٠° = ظا (٤٥° + ٥°)$

$= \frac{ظا ٤٥° + ظا ٥°}{١ - ظا ٤٥° ظا ٥°} = \frac{١ + ظا ٥°}{١ - ظا ٥°}$

(٢) ① $٦\sqrt{٦} = ١٥$ سم² ② ٦ سم² ③ ٥٠ سم² ④ ٤٦ سم² ⑤ $٩\sqrt{٣}$ سم² ⑥ ١٢ سم²

(٣) ① ٢٤ سم² ② $١٦\sqrt{٣}$ سم² ③ $٤٨\sqrt{٣}$ سم² ④ $٢\sqrt{٥}$ سم² ⑤ ٣٠ سم² ⑥ ٢٠ ، ١٤

(٤) ① $٢ع = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤$ ∴ $ع = ١٢$ سم

مساحة Δ أ ب هـ $= \sqrt{١٢ (١٢ - ٦)(١٢ - ٨)(١٢ - ١٠)}$

$= ٢٤$ سم²

② $٢ع = ٨ + ١١ + ١٣ = ٣٢$ ∴ $ع = ١٦$ سم

مساحة Δ أ ب هـ $= \sqrt{١٦ (١٦ - ٨)(١٦ - ١١)(١٦ - ١٣)}$

$\simeq ٤٣,٨$ سم²

③ $٢ع = ١٢ + ١٧ + ١٣ = ٤٢$ ∴ $ع = ٢١$ سم

مساحة Δ أ ب هـ $= \sqrt{٢١ (٢١ - ١٢)(٢١ - ١٧)(٢١ - ١٣)}$

$\simeq ٧٧,٨$ سم²

④ ٢ ع = ٢٠ + ١٢ + ١٦ = ٤٨ ∴ ع = ٢٤ سم

مساحة Δ أ ب هـ = $\sqrt{٢٤(٢٤-٢٠)(٢٤-١٢)(٢٤-١٦)}$

= ٩٦ سم^2

⑤ ٢ ع = ٤٠ + ٢٤ + ٣٢ = ٩٦ ∴ ع = ٤٨ سم

مساحة Δ أ ب هـ = $\sqrt{٤٨(٤٨-٤٠)(٤٨-٢٤)(٤٨-٣٢)}$

= ٣٨٤ سم^2

⑥ ٢ ع = ١٥ + ١٢ + ٩ = ٣٦ ∴ ع = ١٨ سم

مساحة Δ = $\sqrt{١٨(١٨-١٥)(١٨-١٢)(١٨-٩)}$

= ٥٤ سم^2

٥ ① نصل $\overline{ب د}$ ، في Δ أ ب د:

ب د = $\sqrt{(١٥)^2 + (٢٠)^2}$ = ٢٥ سم

مساحة Δ أ ب د = $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ٢٠ = ١٥٠ سم^2

في Δ ب هـ د:

٢ ع = ٢٥ + ٢٤ + ٣٠ = ٧٩ ∴ ع = ٣٩,٥ سم

ع - دَ = ٣٩,٥ - ٢٤ = ١٥,٥ سم

ع - بَ = ٣٩,٥ - ٣٠ = ٩,٥ سم

ع - هـَ = ٣٩,٥ - ٢٥ = ١٤,٥ سم

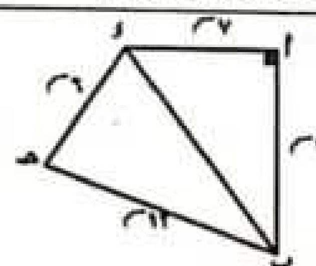
∴ مساحة Δ ب هـ د = $\sqrt{ع(ع-دَ)(ع-بَ)(ع-هـَ)}$

= $\sqrt{٣٩,٥ \times ١٥,٥ \times ٩,٥ \times ١٤,٥}$ = ٢٩٠ سم^2

∴ مساحة الشكل أ ب هـ د = م Δ أ ب د + م Δ ب هـ د

= ١٥٠ + ٢٩٠ = ٤٤٠ سم^2

② في Δ أ ب د



ب د = $\sqrt{(٧)^2 + (١٥)^2}$

ب د = ١٦,٦ سم

مساحة Δ أ ب د = $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ٧ = ٥٢,٥ سم^2

في Δ ب د هـ:

٢ ع = ١٦,٦ + ١٢ + ٦ = ٣٤,٦ (÷ ٢) ∴ ع = ١٧,٣

ع - بَ = ١٧,٣ - ٦ = ١١,٣

ع - هـَ = ١٧,٣ - ١٦,٦ = ٠,٧

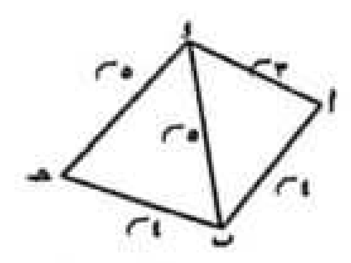
ع - دَ = ١٧,٣ - ١٢ = ٥,٣

مساحة Δ ب د هـ = $\sqrt{١٧,٣ \times ١١,٣ \times ٠,٧ \times ٥,٣}$ = ٢٦,٩ سم^2

مساحة الشكل الرباعي أ ب هـ د = م Δ أ ب د + م Δ ب هـ د

= ٥٢,٥ + ٢٦,٩ = ٧٩,٤ سم^2

③ في Δ أ ب د:



٢ ع = ٣ + ٤ + ٥

٢ ع = ١٢

ع = ٦

م Δ أ ب د = $\sqrt{٦(٦-٣)(٦-٤)(٦-٥)}$ = ٦ سم^2

في Δ ب هـ د:

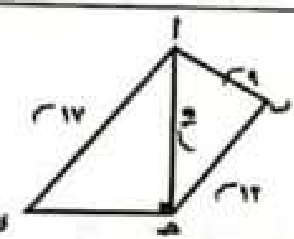
٢ ع = ٥ + ٥ + ٤ = ١٤ ∴ ع = ٧

م Δ ب هـ د = $\sqrt{٧(٧-٥)(٧-٥)(٧-٤)}$ = ٩,٢ سم^2

م الشكل الرباعي أ ب هـ د = م Δ أ ب د + م Δ ب هـ د

= ٦ + ٩,٢ = ١٥,٢ سم^2

④ في Δ أ ب هـ:



٢ ع = ٩ + ١٢ + ١٥ = ٣٦

ع = ١٨

مساحة Δ أ ب هـ

= $\sqrt{١٨(١٨-٩)(١٨-١٢)(١٨-١٥)}$ = ٥٤ سم^2

في Δ أ هـ د:

هـ د = $\sqrt{(١٧)^2 - (١٥)^2}$ = ٨ سم

مساحة Δ أ هـ د = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ١٥ = ٦٠ سم^2

∴ مساحة الشكل = ٥٤ + ٦٠ = ١١٤ سم^2

⑤ في Δ أ هـ د = $\frac{1}{2}$ × ٥٠ × ٥٠ × جا ٦٠°

= ١٠٨٢,٥ سم^2

في Δ أ ب هـ: أ هـ = ٥٠ سم

ب هـ = ٥٠ جا ٣٠° = ٢٥ سم

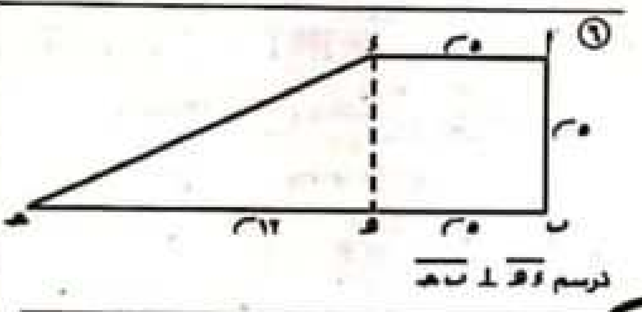
أ ب = ٥٠ جا ٦٠° = ٢٥ $\sqrt{٣}$ سم

مساحة Δ أ ب هـ = $\frac{1}{2}$ × ٢٥ × ٢٥ $\sqrt{٣}$ ≃ ٥٤١ سم^2

مساحة الشكل الرباعي أ ب هـ د = ١٠٨٢,٥ + ٥٤

≃ ١٦٢٣,٥ سم^2

⑥



نرسم $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$

∴ الشكل ا ب هـ د مربع

مساحة المربع ا ب هـ د

= ٥ × ٥ = ٢٥ سم²

و هـ = ١٧ − ٥ = ١٢ سم

مساحة Δ د و هـ

= ½ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

مساحة الشكل ا ب هـ د = ٢٥ + ٣٠ = ٥٥ سم²

(٧) نرسم ا و ⊥ د هـ

∴ الشكل ا ب هـ و مستطيل

ب هـ = ا و = ٨ سم

مساحة المستطيل ا ب هـ و

= ٦ × ٨ = ٤٨ سم²

مساحة Δ ا و د = ½ × ٤ × ٨ = ١٦ سم²

مساحة الشكل = ٤٨ + ١٦ = ٦٤ سم²

(٨) نرسم هـ و

الشكل ا ب هـ و مستطيل

ا ب = و هـ = ٤ سم

مساحة المستطيل = ٤ × ٨ = ٣٢ سم²

Δ هـ و د:

٢ع = ٤ + ٦ + ٦ = ١٦ ∴ ع = ٨

مساحة Δ هـ و د = √(٨(٨ − ٤)(٨ − ٦)(٨ − ٦))

= ١١,٣ سم²

مساحة الشكل = ٣٢ + ١١,٣ = ٤٣,٣ سم²

(٦) Δ ا ب هـ:

٢ع = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤

ع = ١٢

مساحة Δ ا ب هـ = √(١٢ (١٢ − ٦)(١٢ − ٨)(١٢ − ١٠))

= ٢٤ سم²

Δ ا هـ د:

٢ع = ١٠ + ١٠ + ٨ = ٢٨ ∴ ع = ١٤

مساحة Δ ا هـ د = √(١٤ (١٤ − ١٠)(١٤ − ١٠)(١٤ − ٨))

= ٣٦,٧ سم²

مساحة الشكل = ٢٤ + ٣٦,٧ = ٦٠,٧ سم²

(٧)

مساحة Δ ا ب هـ = ½ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

ا هـ = √((٥)² + (١٢)²) = ١٣ سم

مساحة Δ ا د هـ = ½ × ١٣ × ١٣ جا ٦٠° = ٧٣,٢ سم²

مساحة الشكل ا ب هـ د = ٣٠ + ٧٣,٢ = ١٠٣,٢ سم²

(٨)

نسقط د و ⊥ ب هـ

∴ الشكل ا ب و د المربع

ا ب = د و = ١٠ سم ∴ ب و = ا د = ١٠ سم

و هـ = ٣٤ − ١٠ = ٢٤ سم

مساحة المربع = ١٠ × ١٠ = ١٠٠ سم²

مساحة Δ د و هـ = ½ × ١٠ × ٢٤ = ١٢٠ سم²

مساحة الشكل = ١٠٠ + ١٢٠ = ٢٢٠ سم²

(٩) طول الساقين = (٣٠ − ٨)/٢ = ١١ سم

٢ع = ١١ + ١١ + ٨ = ٣٠ ∴ ع = ١٥

مساحة Δ = √(١٥ × (١٥ − ١١)(١٥ − ١١)(١٥ − ٨))

= ٤١ سم²

(١٠) نفرض أن الأطوال هي: ٧ ك ، ٥ ك ، ٣ ك

محيط الحديقة = ٣٠٠

٧ ك + ٥ ك + ٣ ك = ٣٠٠

∴ ١٥ ك = ٣٠٠ ∴ ك = ٢٠

الأطوال هي: ١٤٠ ، ١٠٠ ، ٦٠

مساحة الحديقة = $\sqrt{١٥٠ (١٥٠ - ٦٠)(١٥٠ - ١٠٠)(١٥٠ - ١٤٠)}$

= ٢٥٩٨ متر^{٢}

(١١) نفرض أن الأطوال هي:

٢س ، ٤س ، ٣س ، ٣س ، ٤س

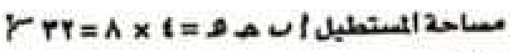
٢س + ٤س + ٣س + ٣س + ٤س = ٣٢

١٦س = ٣٢ ∴ س = ٢

∴ الأطوال هي:

٤ سم ، ٨ سم ، ٦ سم ، ٦ سم ، ٨ سم

نصل هـ جـ



مساحة المستطيل أ ب جـ هـ = ٤ × ٨ = ٣٢ سم^{٢}

Δ د هـ جـ:

٢ع = ٦ + ٦ + ٤ = ١٦ ∴ ع = ٨

مساحة Δ د هـ جـ = $\sqrt{٨(٨ - ٦)(٨ - ٦)(٨ - ٤)}$

= ١١,٣ سم^{٢}

مساحة الشكل = ٣٢ + ١١,٣ = ٤٣,٣ سم^{٢}